



History of Science Department
University of Aarhus

FRANK DANIEL CARLSEN

**Planetteorier
fra Ptolemaios til Copernicus**

Hosta, No. 2, 2000

Work-in-Progress

Hosta (**H**istory **O**f **S**cience and **T**echnology, Aarhus) is a series of publications initiated in 2000 at the History of Science Department at the University of Aarhus in order to provide opportunity for historians of science and technology outside the Department to get a glimpse of some of the ongoing or recent works at the Department by reserachers and advanced students. As most issues contain work in progress, comments to the authors are greatly valued.

Publication is only made electronically on the web site of the Department (www.ifa.au.dk/ivh/hosta/home.dk.htm). The issues can freely be printed as pdf-documents. The web site also contains a full list of issues.

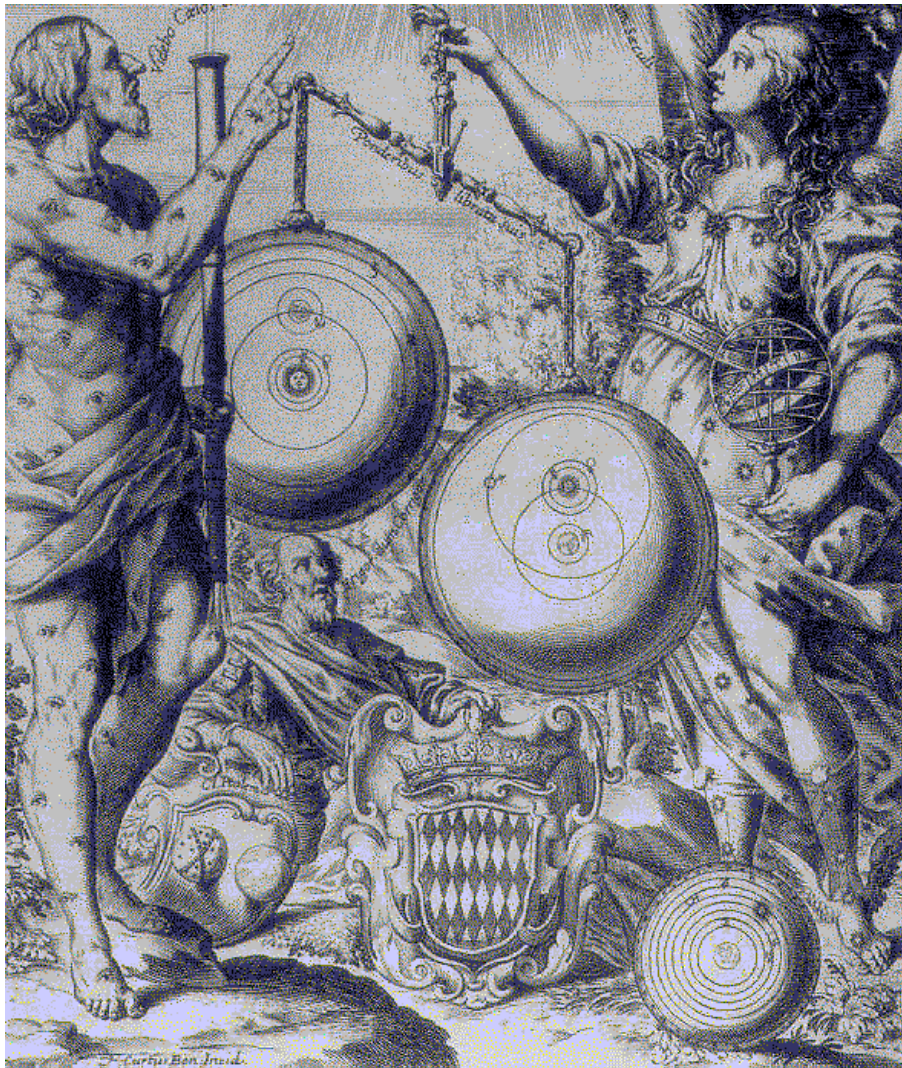
ISSN: 1600-7433



History of Science Department
University of Aarhus
Ny Munkegade, building 521
DK-8000 Aarhus C
Denmark

Planetteorier fra Ptolemaios til Copernicus

stud. scient.
Frank Daniel Carlsen



Vejleder:
K. P. Moesgaard

Indhold

Introduktion	1
Kapitel 1. Ptolemaios' planetmodeller i Almagesten	5
1.1. Modellernes fundament	5
1.1.1. Kosmologi	5
1.1.2. Rammen af fænomener	6
1.1.3. Notation	8
1.2. Solmodellen	9
1.2.1. Længdegrader og middelbevægelser	9
1.2.2. Parametre	10
1.3. Venusmodellen	12
1.3.1. Længdegrader og middelbevægelser	12
1.3.2. Parametrene	14
1.4. Model for ydre planet	17
1.4.1. Længdegrader og middelbevægelser	17
1.5. Ptolemaios' jupitermodel	19
1.5.1. Udledning af geometrisk model	19
1.5.2. Udledelsen af geometriske parametre for Jupiter	23
Kapitel 2. Ptolemaios' fysiske modeller	33
2.1. Bog 1	33
2.2. Bog 2	34
Kapitel 3. Arabiske planetmodeller	37
3.1. Notation	37
3.2. Introduktion til arabisk astronomi	37
3.2.1. Abu Ubayd al-Juzjani, d. ca. 1070	39
3.3. Maragha skolens planetmodeller	40
3.3.1. Nasir al-Din al-Tusi, 1201–1274	40
3.3.2. Mu'ayyad al-Din al-Urdi, d. 1266	42
3.3.3. Ibn al-Shatir, 1304–1375	43
3.3.4. Shams al-Din al-Khafri, d. efter 1525	48
Kapitel 4. Copernicus' planetmodeller i Commentariolus	51
4.1. Notation	51
4.2. Introduktion	51
4.3. Planetmodellerne	53
4.3.1. Solmodellen	53
4.3.2. Udledning af geometriske parametre	54
4.3.3. Venusmodellen	54

4.3.4.	Udledning af geometriske parametre	55
4.3.5.	Model for ydre planeter	55
4.3.6.	Udledning af geometriske parametre	56
Kapitel 5.	Copernicus' planetmodeller i De Revolutionibus	57
5.1.	Modellernes fundament	57
5.1.1.	Kosmologi	57
5.1.2.	Fænomener	58
5.1.3.	Notation	59
5.2.	Copernicus' præcessionsteori	60
5.2.1.	Observationsgrundlag	60
5.2.2.	Modellen	61
5.2.3.	Parametre	63
5.3.	Solmodellen	65
5.3.1.	Længdegrader og middelbevægelser	65
5.3.2.	parametre	67
5.4.	Venusmodellen	69
5.4.1.	Længdegrader og middelbevægelser	69
5.4.2.	Parametrene	71
5.5.	Model for ydre planet	73
5.5.1.	Længdegrader og middelbevægelser	73
5.6.	Copernicus' jupitermodel	75
5.6.1.	Middelbevægelserne	75
5.6.2.	Den geometriske model	75
5.6.3.	Udledning af geometriske parametre for Jupiter	77
5.7.	Udledelsen af det heliocentriske system	84
Kapitel 6.	Kepler bevægelsen	91
6.1.	Introduktion	91
6.2.	Approksimeret Kepler bevægelse	92
6.3.	Approksimationer til Kepler bevægelsen, vha. cirkelbevægelser	94
6.3.1.	Equantmodellen	94
6.3.2.	Den excentroepicykliske model	95
6.3.3.	2.ordens sammenligninger af den heliocentriske længdegrad	97
6.3.4.	2.ordens sammenligninger af den geocentriske længdegrad	100
6.4.	Ptolemaios' modeller i relation til Kepler bevægelsen	103
6.4.1.	Excentriciteten og apsidelinien	103
6.4.2.	Epicyklens radius	109
Kapitel 7.	Afslutning	111
Litteratur		115

Introduktion

Forestil dig at du står udenfor, en stjerneklar nat, langt væk fra byernes lys og forurenede luft. Undgår du at blive fascineret af himlens skønhed og perfektion? Nej vel!

Forestil dig så at du er uvidende om verdensrummets egentlige opbygning. Undgår du at undres eller at søge et svar? Nej vel!

Nat efter nat står du betaget af himlens pragt (lidt poetisk overdrivelse skader aldrig) og opdager efterhånden at nogle stjerner har en bevægelse i forhold til de øvrige indbyrdes faste “*fiksstjerner*”. Du opdager at disse såkaldte “*vandrestjerner*” udviser fænomener, som optræder regelmæssigt med bestemte perioder. Du har nu indset, at der i dette guddommelige skaberværk eksisterer en orden, som til en vis grad gør dig istand til at forudsige disse mystiske himmellegemers opførsel. Naturligvis ønsker du at konstruere en model, som tillagt de fundne perioder beskriver himlens bevægelser.

Formålet med dette lille scenario er at vise hvor naturligt motivationen for at studere himmellegemernes bevægelser opstår. Andre sekundære, men mere praktiske motivationselementer findes i astrologi, navigation og kalender konstruktion.

I dette speciale vil jeg primært beskæftige mig med modeller for planeternes bevægelse hørende til en udviklingsrig periode. En periode som endte med intet mindre end en videnskabelig revolution. Jeg taler naturligvis her om overgangen fra det geocentriske (jordcentrerede) til det heliocentriske (solcentrerede) verdensbillede¹. Periodens begyndelse tages som tidspunktet (ca. år 150) for udgivelsen af den alexandrinske astronom, Claudius Ptolemaios’ (ca. 85 – 165) store værk, *Almagesten*. *Almagesten* var et banebrydende værk på 13 bøger² (disse benævnes bog I, II...) hvori det foretrukne verdensbillede — dvs. det geocentriske — for første gang blev forsynet med geometriske modeller, der på tilfredsstillende vis redegjorde for himlens bevægelser. Ptolemaios’ værk cementerede det geocentriske verdensbillede en gang for alle. Nu var det ikke blot af filosofisk karakter, men lod sig beskrive matematisk. Senere udgav Ptolemaios et mindre værk, *Planetære Hypoteser*, som tillige skulle give hans modeller et fysisk udseende. I tiden op til Copernicus skete ingen seriøse angreb på geocentrismen, enkelte modstridende elementer i Ptolemaios’ teorier fik dog nogle arabiske astronomer til at lancerer nye og efter deres mening mere korrekte modeller, det geocentriske system blev dog bibeholdt.³ I 1543 udkom så et værk (6 bøger. Benævnes bog 1, 2...), der i omfang og matematisk elegance levede op til *Almagesten*. Nicolaus Copernicus (1473 – 1543), fra Frauenburg i Polen, var endelig blevet overtalt til at udgive *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (Om Himmelsfærenes Kredsbevægelser) hvori et nyt revolutionerende heliocentrisk

¹Det heliocentriske system blev dog først standard i slutningen af 1600-tallet.

²I dag ville man nok kalde dem kapitler.

³*Almagesten* blev oversat til arabisk og latin i hhv. det 9’ende og 12’te århundrede.

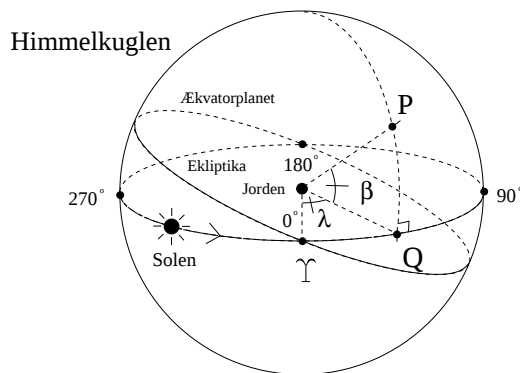
system blev præsenteret med tilhørende geometriske modeller for himmellegemernes bevægelser, desværre døde han kort tid efter udgivelsen. Uden nævneværdig relation til de her nævnte teorier, blev der i perioden udviklet planetteorier af andre astronomer. Disse spillede dog overhovedet ingen rolle for periodens udvikling og kunne slet ikke matche de her behandlede modeller.

Det er min hensigt i specialet at redegøre for relevante modeller i den nævnte periode. I denne redegørelse vil jeg komme ind på de fænomenrelaterede og kosmologiske årsager til modellernes udformning. Vægten vil være lagt på de pågældende astronoms egen beskrivelse, og dette med Jupiter som eksempel. Jeg vil i termer af moderne matematik se på bestemmelsen af modellernes parametre, dog vil Jupiter tilfældet atter blive behandlet som oprindeligt, for også at give et indblik i den oprindeligt anvendte regneteknik. Endelig vil det naturligvis også blive vist, hvordan man med en parameterbestemt model, i princippet, kan udregne planeternes position på himlen. Årsagen til at netop Jupiter anvendes som eksempel, er dels at de ydre planeter, dvs. Mars, Jupiter og Saturn, har samme geometriske model og dels udsættes Jupiter sjældent for nogen særlig interesse i historisk sammenhæng.

Dette er stort set hvad min redegørelse for de enkelte modeller vil indeholde. Herudover vil jeg se på ligheder, forskelle og sammenhænge mellem de forskellige astronoms modeller. Jeg håber herved at synliggøre, hvorledes de forskellige modeller repræsenterer successive udviklingsskridt på vejen mod heliocentrismen og derfor udgør en ikke nødvendigvis afhængig, men i hvert fald sammenhængende udvikling. Herunder vil jeg endvidere give et nyt bud på, hvad der kan have ført Copernicus til det heliocentriske system.

Til slut vil jeg sammenligne modellerne med planeternes virkelige bevægelse, dvs. ellipsebevægelsen, for derved at vise hvor tæt de egentlig var på en virkelighedstro beskrivelse.

Det er klart at ovenstående kræver en del begrænsninger for at kunne blive behandlet på en overskuelig mængde papir. Først og fremmest vil jeg ikke skelne mellem de forskellige planer planeterne bevæger sig i, dvs. jeg vil udelukkende behandle teorien for planeternes bevægelse i længdegrad. Betragt Fig. 0.1. Med en planet P's bevægelse i længdegrad, forstås bevægelsen af planetens vinkelrette projektion Q på ekliptika, regnet fra et eller andet punkt på ekliptika, f.eks. forårspunktet Υ . En planets breddegrad β (som altså ikke behandles) er vinkelafstanden fra Q til P set fra Jorden. Længdegraden er vinklen λ som vist på figuren.



FIGUR 0.1

For oldtidens astronomer var kun planeterne Månen, Merkur, Venus, Solen, Mars, Jupiter og Saturn kendte og for dem alle blev der lavet modeller.⁴ Jeg vil tillade mig at se bort fra modellerne for Merkur og Månen, da disse dels er mere komplicerede end de andre og dels også mere fejlagtige. Dette skal ikke forstås på den måde at Merkur/Måne – modellerne ikke er interessante for det betragtede udviklingsforløb, hvilket de i høj grad er. Jeg finder det dog tilstrækkeligt med det givne valg.

Da det er modellernes geometriske udseende som er underlagt hovedinteressen i dette speciale, vil parametrene beskrivende modellernes kinematiske egenskaber ikke berøres særligt. Derimod vil parametrene, beskrivende modellernes geometri, blive udsat for en vis opmærksomhed, især hvad deres udledning angår. Dette kan i første omgang forekomme som en gang kedsommelige matematiske trivialiteter. Det overlades dog til læseren, at dvæle et øjeblik over disse tekniske udredninger og forhåbentlig derved blive fascineret af, med hvilken snilde parametrene udledes fra observationer af specifikke fænomener. Jeg vil ikke her komme særligt ind på regnefejl, observationsfejl og observationsteknik. Det er som sagt selve modellernes geometriske udseende og egenskaber som har min opmærksomhed.

I udregninger og værdiangivelser vil det sexagesimale talsystem (60-talsystemet) blive anvendt, da dette system var det dominerende for de betragtede astronomer. Med tallet $(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, skrevet i sexagesimalsystemet, forstås det rationale tal b :

$$b = \sum_{i=0}^n (a_i \cdot 60^{-i})$$

Med denne lille introduktion vil jeg nu gå over til selve specialet.

Specialeopgavens rette formulering lyder som følgende:

Der ønskes en oversigt over teorierne for planeternes bevægelse i længde hos Ptolemaios i oldtiden, hos arabiske astronomer i middelalderen og hos Copernicus i renaissanceen.

Opgaven skal behandle Solen og Venus i moderne formelsprog og de tre ydre planeter - med Jupiter som særligt eksempel - i den historiske geometriske formulering.

Specielt ønskes:

1. en vurdering af modellernes sammenhæng med “virkeligheden” repræsenteret ved Keplers love for planetbevægelsen.
2. en redegørelse for den mulige sammenhæng mellem modelgeometri og verdensbillede.

⁴Månen og Solen blev dengang ligeledes kaldt for planeter.

KAPITEL 1

Ptolemaios' planetmodeller i Almagesten

1.1. Modellernes fundament

1.1.1. Kosmologi. *Almagestens* kosmologi som forefindes i bog I, er stort set identisk med Aristoteles' (384–322 fvt.) lære og kendes da også under navnet “det ptolemæiske/aristoteliske verdensbillede”. Denne kosmologi bygger i høj grad på nedenstående hypoteser om “det femte element” den såkaldte *æter*, hovedbestanddelen af himlens legemer.

Hypoteser om æteren:

1. Æteren er et evigt og uforanderligt stof, bestående af de fineste ensartede komponenter.
2. Legemer med ensartede bestanddele har en ensartet overflade, og er derfor nødvendigvis sfæriske $\Rightarrow$ æteren er sfærisk af form.
3. Den eneste bevægelse passende til et sådant stof er den simpleste af alle bevægelser — nemlig den uniforme cirkulære bevægelse.

Hypoteser om himlens legemer:

4. Stjernerne er æteriske af natur og fastsiddende på en æterisk sfære kaldet *fiksstjernesfæren*. Denne sfære roterer langsomt mod øst, uniformt om ekliptikas akse, med vinkelhastigheden ω_π relativt til *forårspunktet*.¹ Denne relative bevægelse (forårspunktet har en fast position relativt til firmamentet — se nedenfor) kendes som *præcessionen*.²
5. Omkring og forbundet med fiksstjernesfæren ligger den 9'ende sfære eller “*firmamentet*” som roterer mod vest om ækvators akse, udførende et omløb i døgnet.
6. Planeterne er ligeledes æteriske af natur og tilknyttet hver sin æteriske planetsfære. Præcis hvorledes planeternes bevægelse er relateret til disse sfærer giver Ptolemaios først et svar på i *Hypoteserne*, se kap. 2.
7. Rækkefølgen af planeterne er fra Jorden: Månen, Merkur, Venus, Solen, Mars, Jupiter og Saturn.³
8. Planetsfærerne og fiksstjernesfæren bevæger sig om universets centrum.
9. Planetsfærerne er alle forbundet med fiksstjernesfæren, hvormed planeterne alle deltager i den daglige bevægelse samt præcessionen.⁴

Hypoteser om Jorden:

¹Forårspunktet befinder sig hvor ekliptika skærer himmelkuglens ækvator, for Solen passerende i nordlig retning, se Fig. 1.1.

²Dette fænomen behandler Ptolemaios i bog III, hvor præcessionsraten bestemmes til $\omega_\pi = 1^\circ$ pr. 100 år.

³Herefter vil jeg med “planeter”, kun mene Venus, Solen, Mars, Jupiter og Saturn, idet Merkur og Månen ikke behandles i dette speciale.

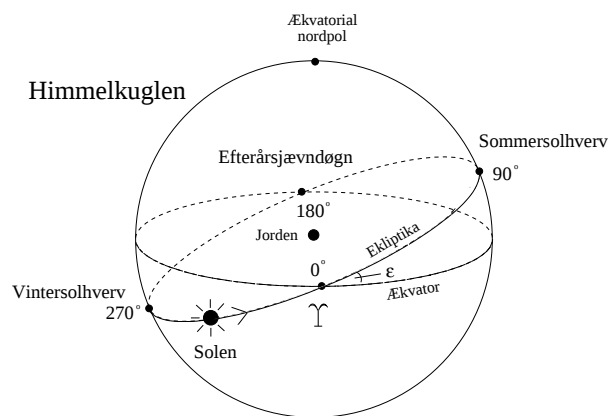
⁴Solen deltager, som den eneste, ikke i præcessionen.

10. Alt under månesfæren er af ikke-æterisk natur og derfor foranderligt. Den naturlige bevægelse for disse legemer er mod eller væk fra universets centrum i rette linier.
11. Jorden ligger ubevægeligt i universets centrum.
12. Jorden er sfærisk og som et punkt i forhold til fiksstjernesfæren.

I modelkonstruktionsøjemed er den vigtigste konklusion man kan drage heraf at:

13. Bevægelserne på himlen er alle givet i termer af jævne cirkulære bevægelser.⁵ Dette er princippet om uniform cirkulær bevægelse og benævnes fremover PUC.

Ptolemaios ønsker, via sine geometriske modeller bestående af deferenter og epicykler, først og fremmest en matematisk repræsentation af planeternes bevægelser. Om modellerne ligeledes kan behandles fysisk, dvs. i termer af planetsfærerne gives der intet entydigt svar på, i hvert fald finder den fysiske del ingen anvendelse i modellerne. Om Ptolemaios' fysiske modeller, se kap. 2.



FIGUR 1.1

1.1.2. Rammen af fænomener. De fænomener som ligger til grund for modellerne er følgende:

1. En planets bevægelse foregår indenfor et smalt bånd (zodiakken) centreret langs ekliptika (Solens tilsyneladende bane på himmelkuglen er pr. definition ekliptika. Ekliptikas plan har en hælding ϵ relativt til ækvatorplanet, denne benævnes blot *ekliptikas hældning*) og går fra vest mod øst relativt til fiksstjernerne.

På grund af dette, samt forårspunktets ubevægelighed, vælger Ptolemaios at beskrive planeternes bevægelse i et ekliptisk koordinatsystem regnende længdegrader fra forårspunktet positive i østlig retning langs ekliptika.⁶

2. En planet returnerer til samme punkt på ekliptika i løbet af en *tropisk periode*. Da præcessionen er uniform har planeternes returnering til samme position

⁵Ptolemaios bryder dog bevidst eller ubevidst med dette princip med indførelsen af equant-punktet, se underafsnit 1.3.2.

⁶Fra nu af (med mindre andet fremgår af sammenhængen) vil der med bevægelse udelukkende menes bevægelse i længde.

relativt til fiksstjernerne ligeledes en fast periode — den *sideriske periode*. For Solen kaldes disse perioder hhv. det *tropiske år* og det *sideriske år*. Planeternes vinkelhastigheder er ikke konstante, men periodiske. En planet returnerer til samme vinkelhastighed i løbet af en *anomalistisk periode*.

Denne afvigelse fra uniform cirkulær bevægelse kaldes 1.anomali og forklares ved indførelsen af den excentriske *deferent* (cirkel hvis centrum er forskudt fra observationscentret).

3. Af og til skifter planeterne (undtagen Solen) bevægelsesretning og bevæger sig mod vest, for kort tid derefter at genoptage den oprindelige bevægelse. Dette fænomen kaldes planeterens *retrograde* bevægelse og indtræffer med en periode givet ved den tid det tager for planeten at returnere til samme position relativt til Solen, dvs. en *synodisk periode*.

Den retrograde bevægelse kaldes også for planetens 2.anomali og forklares i modellerne ved *epicyklen*.

4. I midten af den retrograde bevægelse er en ydre planet i *opposition*, dvs. planetens vinkelafstand fra middelsolen er 180° (Ptolemaios' definition).
5. Følgende identitet er opfyldt for en ydre planet: $Y = E + S$, dvs. at i løbet af Y tropiske år udfører planeten E ekliptiske omløb og udviser S ens synodiske fænomener, f.eks. oppositioner.

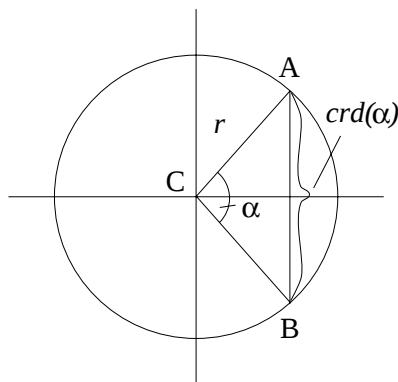
Fænomenerne 4. & 5. reddes ved at lade $\mathbf{CP} \parallel \mathbf{O\bar{S}}$ og ensrettede altid, se Fig. 1.12.

6. Venus' retrograde bevægelse foregår altid omkring retningen til Solen.
7. Venus har en maksimal elongation (både øst og vest for Solen) i modsætning til de ydre planeter, som optræder i enhver vinkelafstand fra Solen.

6. & 7. løses ved at lade $\mathbf{EC} \parallel \mathbf{O\bar{S}}$ og ensrettede altid, se Fig. 1.6.

8. Det er ikke muligt at måle nogen parallakse til planeterne.⁷

Pga. 8. vælger Ptolemaios en fælles radius i modellernes deferenter, denne sættes af hensyn til kordetabellen (bog I,11) til $R = 60^p$, hvor p er en vilkårlig enhed. Kordetabellen indeholder nemlig længden af korderne $crd(\alpha)$ i en cirkel med radius $r = 60^p$ som funktion af de tilhørende buevinkler α , se Fig. 1.2.



FIGUR 1.2

⁷Undtagen for Månen, se bog V,13 eller [Pe74, Kap. 7].

Af figuren ses endvidere at kordefunktionen⁸

$$crd(\alpha) = AB \quad (1.1.1)$$

er ækvivalent med det moderne udsagn

$$2r \sin(\frac{1}{2}\alpha) = AB$$

dvs. en sinusfunktion.

1.1.3. Notation. I dette kapitels figurer anvendes følgende betegnelser:

Rotation mod øst: Bevægelse i papirets plan mod uret.

O: Jorden.

S: Solen.

P: En planet.

Υ: Forårspunktet, se Fig. 1.1.

Ŝ: Middelsolen dvs. det rent fiktive legeme, som roterer uniformt om O med Solens middelvinkelhastighed $\omega_{\odot}$, relativt til Υ.

E: Equantpunktet, dvs. punktet hvor omkring epicykelcentret roterer uniformt.

M: Deferentcentret.

R: Radius af excentrisk cirkel.

C: Epicykelcentret.

r: Epicyklens radius.

A: Deferentens apogæum, dvs. punktet på deferenten længst fra O.

Π: Deferentens perigæum — deferentpunktet nærmest O.

v: Epicyklens apogæum.

y: Epicyklens middelpogæum.

u: Epicyklens middelperigæum.

I teksten anvendes:

1 eg.år: Et egyptisk år = 365 dg.

$T_{\odot}$: Det tropiske år.

T_{λ} : Tropisk periode.

T_{α} : Synodisk periode.

(ω, T) : Angiver middelvinkelhastigheden ω samt den tilhørende periode T , givet ved $\omega = \frac{360^\circ}{T}$.

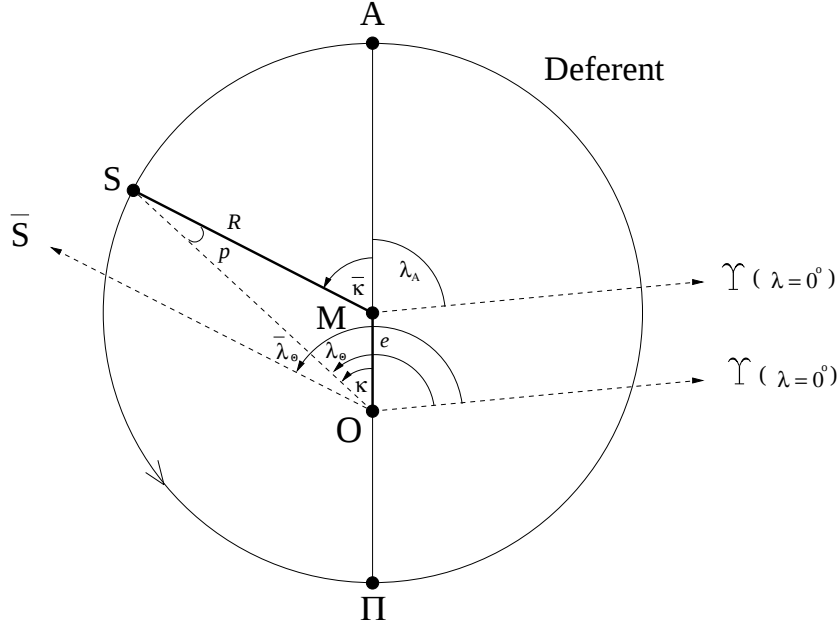
t : Lad figurerne konfiguration være givet til dette tidspunkt.

For at kunne anvende modellerne er Ptolemaios nødt til at kende deres konfiguration ved en eller anden begyndelsesværdi, kaldet *epoken*.

t_0 : Betegner Ptolemaios' epoke defineret som begyndelsen af Nabonassars regeringstid, dvs. år −746 Feb. 26, middag (i Alexandria).

⁸En henvisning til denne relation er reelt en henvisning til Ptolemaios' kordetabel.

1.2. Solmodellen



FIGUR 1.3. Ptolemaios' solmodel.

Stedvektoren $\mathbf{OS}$ fra Jorden til Solen er givet ved vektorrelationen:

$$\mathbf{OS} = \mathbf{OM} + \mathbf{MS} \quad (1.2.1)$$

OM: Definerer excentriciteten $e = |\mathbf{OM}|$ samt apsidelinien, idet OM's forlængelse skærer deferenten i A.

MS: Roterer mod øst uniformt om M med $(\omega_{\odot}, T_{\odot})$ relativt til Υ . $|\mathbf{MS}| = R$.

1.2.1. Længdegrader og middelbevægelser. Med modellens egenskaber således fastlagt kan der udformes formler til beregning af Solens længdegrad.

Middelbevægelsen i længdegrad i et givet tidsinterval Δt er givet ved $\omega_{\odot} \Delta t$ og tabellagt af Ptolemaios i bog III,2 for forskellige værdier af Δt .

Middellængdegrader:

λ_A : $\angle \Upsilon O A =$ apogæets længdegrad.

$\bar{\lambda}_{\odot}$: $\angle \Upsilon O \bar{S} = \bar{\lambda}_{\odot}(t_0) + \omega_{\odot}(t - t_0) =$ middellængdegraden.

$\bar{\kappa}$: $\angle A O \bar{S} = \bar{\kappa}(t_0) + \omega_{\odot}(t - t_0) =$ middel excentrisk anomali.

$$\bar{\lambda}_{\odot} = \bar{\kappa} + \lambda_A \quad (1.2.2)$$

Korrektioner:

p : $\angle M S O =$ excentrisk korrektion.

Denne kan udledes trigonometrisk fra Fig. 1.4.

der ses :

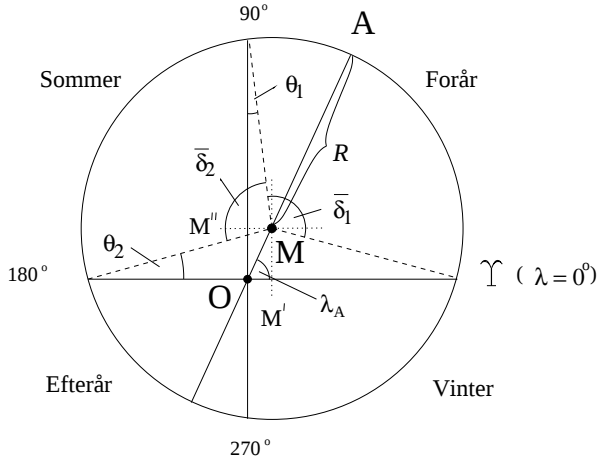
$$\sin p(\bar{\kappa}) = -\frac{OK}{OS} = -\frac{e \sin \bar{\kappa}}{l(\bar{\kappa})} \quad (1.2.3)$$

hvor

$$l(\bar{\kappa}) = OS = \sqrt{e^2 \sin^2 \bar{\kappa} + (e \cos \bar{\kappa} + R)^2} \quad (1.2.4)$$

Geometriske parametre:

Bestemmelsen af excentriciteten e og apogæets længdegrad λ_A bygger på observationer af årstidernes længde. Lad T_F, T_S, T_E og T_V være længden af hhv. foråret (forårsjævnøgn – sommersolhverv), sommeren (sommersolhverv – efterårsjævnøgn), efteråret (efterårsjævnøgn – til vintersolhverv) og vinteren (vintersolhverv – forårsjævnøgn). Betragt Fig. 1.5.



FIGUR 1.5.

T_F dg	T_S dg	T_E dg	T_V dg
$94\frac{1}{2}$	$92\frac{1}{2}$	$88\frac{1}{8}$	$90\frac{1}{8}$

TABEL 1.2.
Årstidernes længde.

θ_1 og θ_2 bestemmes:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\delta}_1 = \omega_{\odot} T_F \\ \bar{\delta}_2 = \omega_{\odot} T_S \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Fig. 1.5}} 2\theta_2 = \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2 - 180^\circ \text{ og } \theta_1 = \bar{\delta}_1 - 90^\circ - \theta_2.$$

Der fås nu:

$$\left. \begin{array}{l} OM' = R \sin \theta_1 \\ OM'' = R \sin \theta_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Pythagoras}} e = OM = [(OM')^2 + (OM'')^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Endelig fås apsidelinien fra

$$\sin \lambda_A = (M'M)/e.$$

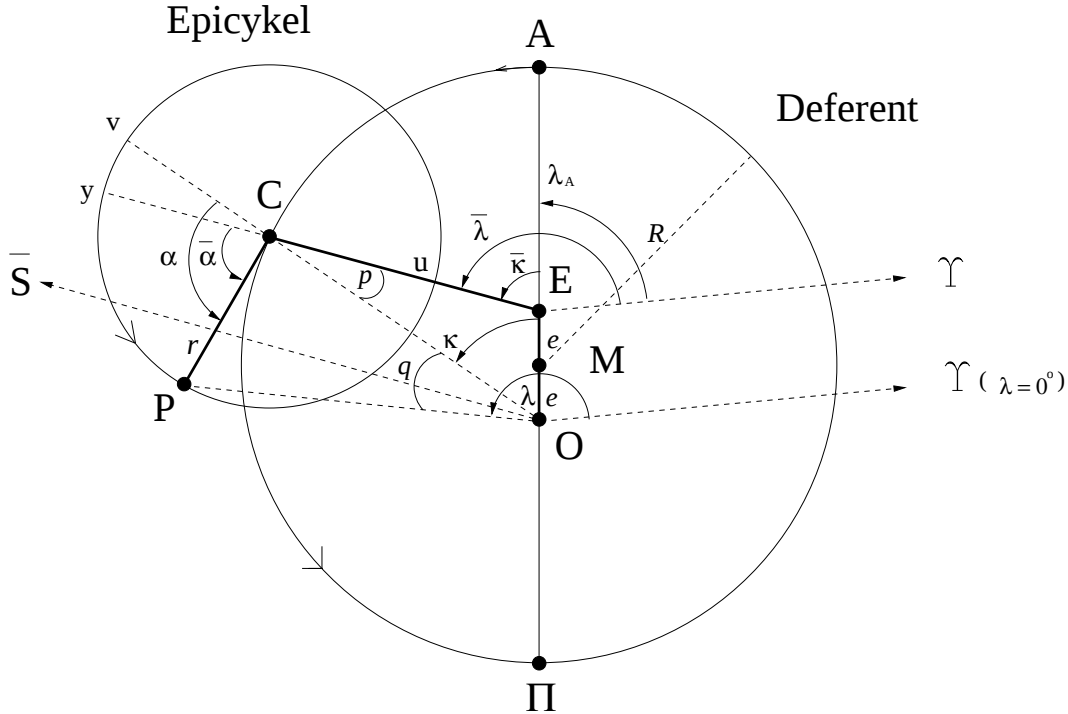
Med Ptolemaios' værdier for årstidernes længde (se tabel 1.2) er parametrene:

e p	λ_A $^\circ$
2;29,30	65;30

TABEL 1.3. Geometriske parametre.

Det skal her bemærkes, at Ptolemaios ikke selv har opfundet solmodellen, men blot verificeret og justeret denne på baggrund af nye observationer. Ptolemaios tilskriver Hipparch (ca. 190–120 fvt.) solmodellen samt opdagelsen af præcessionen. Årstidernes længde er præcist de samme som givet af Hipparch, hvorfor Ptolemaios finder samme parameterværdier og konkluderer derfor, at Solens apsidelinie ligger fast relativt til forårspunktet.

1.3. Venusmodellen



FIGUR 1.6. Ptolemaios' model for Venus.

Stedvektoren fra Jorden til Venus er her givet ved:

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OE} + \mathbf{EC} + \mathbf{CP} \quad (1.3.1)$$

OE: Definerer excentriciteten e via: $2e = |\mathbf{OE}|$ samt apsidelinens retning. Har en østlig uniform rotation om O med (ω_π, T_π) relativt til Υ .

EC: Peger altid i samme retning som $\mathbf{OS}$ hvorfor rotationen foregår uniformt om E i østlig retning med $(\omega_{\bar{\lambda}} = \omega_\odot, T_\odot)$ relativt til Υ . **EC** og dens forlængelse skærer epicyklen i hhv. u og y. **EC** er variabel.

CP: Definerer epicyklens størrelse $r = |\mathbf{CP}|$ og roterer mod øst uniformt om C med $(\omega_{\bar{\alpha}}, T_{\bar{\alpha}})$ relativt til linie uy.

1.3.1. Længdegrader og middelbevægelser. Middelbevægelsen i epicyklisk anomali er givet ved $\omega_{\bar{\alpha}}\Delta t$ og tabellagt i bog IX,4 sammen med middelbevægelsen i længdegrad som er identisk med solteoriens. Bevægelsen i præcession er givet ved $\omega_\pi\Delta t$.

Middellængdegrader:

$$\lambda_A: \angle \Upsilon OA = \lambda_A(t_0) + \omega_\pi(t - t_0) = \text{apogæets længdegrad.}$$

$$\bar{\lambda}: \angle \Upsilon OS = \bar{\lambda}_\odot = \bar{\lambda}(t_0) + \omega_\odot(t - t_0) = \text{middellængdegraden.}$$

$$\bar{\kappa}: \angle AOS = \bar{\kappa}(t_0) + (\omega_\odot - \omega_\pi)(t - t_0) = \text{middel excentrisk anomali.}$$

$$\bar{\lambda} = \bar{\kappa} + \lambda_A \quad (1.3.2)$$

$$\bar{\alpha}: \angle yCP = \bar{\alpha}(t_0) + \omega_{\bar{\alpha}}(t - t_0) = \text{middel epicyklisk anomali.}$$

$$p = \begin{cases} \leq 0 & \text{for } 0^\circ \leq \bar{\kappa} \leq 180^\circ \\ \geq 0 & \text{for } 180^\circ \leq \bar{\kappa} \leq 360^\circ \end{cases} \quad (1.3.11)$$

og

$$q = \begin{cases} \geq 0 & \text{for } 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \\ \leq 0 & \text{for } 180^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ \end{cases} \quad (1.3.12)$$

i overensstemmelse med 1.3.8 og 1.3.9 og fortegnet i 1.3.3 og 1.3.5. Venus' korrekte længdegrad kan nu endelig udregnes efter formelen:

$$\lambda(t) = \bar{\lambda}(t_0) + \omega_{\bar{\lambda}}(t - t_0) + p(\bar{\kappa}) + q(\alpha, \bar{\kappa}) \quad (1.3.13)$$

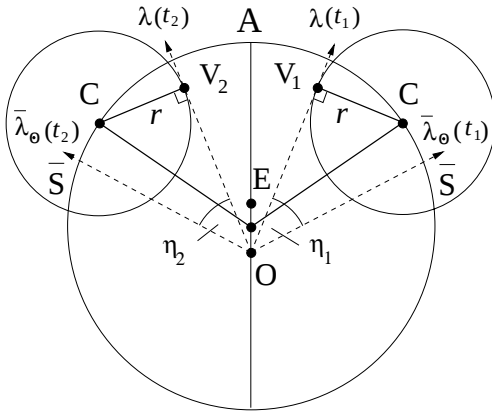
hvis parametrene e , r , $\omega_{\bar{\lambda}} = \omega_{\odot}$, $\omega_{\bar{\alpha}}$, $\bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}_{\odot}(t_0)$, $\bar{\alpha}(t_0)$ og $\lambda_A(t_0)$ er givet.

1.3.2. Parametrene.

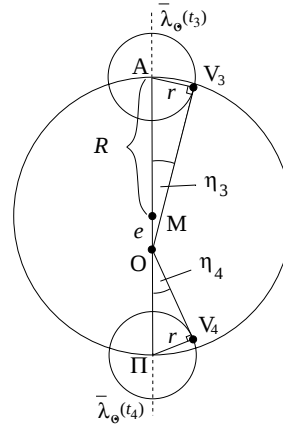
Kinematiske parametre		Epokeværdier		
$\omega_{\bar{\lambda}}$ °/eg.år	$\omega_{\bar{\alpha}}$ °/eg.år	$\bar{\lambda}(t_0)$ °	$\bar{\alpha}(t_0)$ °	$\lambda_A(t_0)$ °
359;45,24,45,21,8,35	225;1,32,28,34,39,15	330;45	71;7	46;10

TABEL 1.4

Udledelsen af de geometriske parametre udfører Ptolemaios på basis af Venus observationer med maksimal elongation fra Solen. Ved disse observationer påstås Venus at befinde sig på tangentlinien fra Jorden til epicyklen.¹⁰ Fra observations-tidspunkterne beregnes tilhørende positioner af middelsolen og heraf elongationen til denne, som dog fejlagtigt ligeledes antages at være maksimal (se [Sy85]).



FIGUR 1.9.



FIGUR 1.10.

¹⁰Påstanden er næsten korrekt, men kun fordi epicykelcentret ligger meget nær retningen til Solen. Faktisk skyldes afvigelsen kun, at apsidelinien i modellerne for Solen og Venus er forskellige, excentriciteterne er derimod ens.

Det fremgår af Fig. 1.9 at der til en maksimal østlig/vestlig elongation hører en, numerisk identisk, maksimal vestlig/østlig elongation, således at venuspositionerne er symmetriske om apsidelinien. Den numerisk identiske maksimale elongation er dog ikke entydig i Ptolemaios' model, men det viser sig, at hans observationspar trods alt er sammenhørende symmetriske elongationer (se kapitel 6, s. 109).

Venus observationerne V_1 og V_2 fra tabel 1.5 svarer ifølge Ptolemaios til situationen i Fig. 1.9. V_1 og V_2 har numerisk identiske elongationer hhv. østlige og vestlige. Pga. symmetrien vil apsidelinien indeholde punktet midt mellem de to observationer, dvs. $\frac{1}{2}(\lambda(t_1) + \lambda(t_2))$ og det diametralt modsatte punkt $\frac{1}{2}(\lambda(t_1) + \lambda(t_2)) + 180^\circ$. For at kunne afgøre hvilket af disse endepunkter der angiver apogæet benyttes yderligere to observationer ved maksimal elongation $\bar{\lambda}_\odot(t_3)$ og $\bar{\lambda}_\odot(t_4)$, som ligger nær hvert sit endepunkt. Den af disse observationer der har den mindste vinkelafstand til Venus, må være i nærheden af apogæet, da dette er fjernest Jorden, se Fig 1.10.

Med observationerne:

Obs. V_i for i	t_i dato	$\bar{\lambda}_\odot(t_i)$	$\eta(t_i)$
1	8/3. 132	344;15	47;15 øst
2	30/7. 140	125;45	47;15 vest
3	20/5. 129	55;24	44;48 vest
4	18/11. 136	235;30	47;20 øst

TABEL 1.5. Venus observationer.

får Ptolemaios $\lambda_A = 55;0^\circ$ i hans tid.

Betragt atter Fig. 1.10. Der fås

$$AO = AM + MO = R + e \text{ og } IO = IM - MO = R - e$$

$$\Downarrow$$

$$r = (R + e) \sin \eta_3 = (R - e) \sin \eta_4 \quad (1.3.14)$$

$$\Downarrow \text{ To lign. med to ubekendte.}$$

$$e = 1;15^p \text{ og } r = 43;10^p.$$

I bog IX,5 postulerer Ptolemaios at der generelt for planeternes epicykelcentre gælder at deres uniforme bevægelse ikke finder sted om deferentens centrum, men derimod om et punkt kaldet equantpunktet. Dette punkt, E, antages at ligge på apsidelinien i en afstand fra Jorden givet ved at $\frac{1}{2}\mathbf{OE} = \mathbf{OM}$. At denne påstand er sand demonstreres som det eneste sted, for Venus¹¹ i bog X,3 hvor ovenstående parameterbestemmelse ligeledes stammer fra.¹²

Bestemmelsen af equantpunktet udnytter to observationer af Venus $\lambda(t_5)$ og $\lambda(t_6)$ (se tabel 1.6) i maksimal elongation hhv. vestlig og østlig. Det specielle ved disse

¹¹Om det er således Ptolemaios først får ideen til equantpunktet og dennes placering vides ikke med sikkerhed, for han giver ikke selv noget entydigt svar herpå. En anden mulighed er at Ptolemaios udledte equantpunktet fra observationer af de retrograde sløjfers placering og længde, se [Ev84] og afsnit 1.5, s. 22.

¹²Bemærk at indførelsen af equantpunktet ikke påvirker værdien af de allerede bestemte parametre.

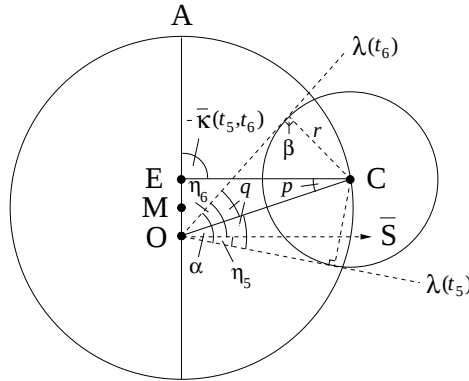
to observationer er, at middelsolen på de pågældende tidspunkter befinder sig på samme længdegrad næsten vinkelret på apsidelinien, se Fig. 1.11.

Af figuren ses at

$\alpha = \eta_5 + \eta_6$ halveres af OC $\Rightarrow q = \frac{1}{2}\alpha$. OC = $\rho(\bar{\kappa}) = r/\sin q$. Da $p = \angle COS$ er $\eta_6 = q + p$ og $\eta_5 = q - p \Rightarrow p = \frac{1}{2}(\eta_6 - \eta_5)$. Det punkt hvorom C roterer uniformt kan nu bestemmes ved OE = OC sin p . Hvis OE $\neq$ OM er equantpunktet berettiget. Med observationerne i tabel 1.6, fås OE = 2;30^p = 2OM = 2e, dvs. M kommer præcist til at ligge mellem O og E som postuleret i IX,5.

Obs.V _i for i	t _i dato	$\bar{\lambda}_{\odot}(t_i)$	$\eta(t_i)$
5	18/2. 134	325;30	43;35 vest
6	18/2. 140	325;30	48;20 øst

TABEL 1.6. Venus observationer.



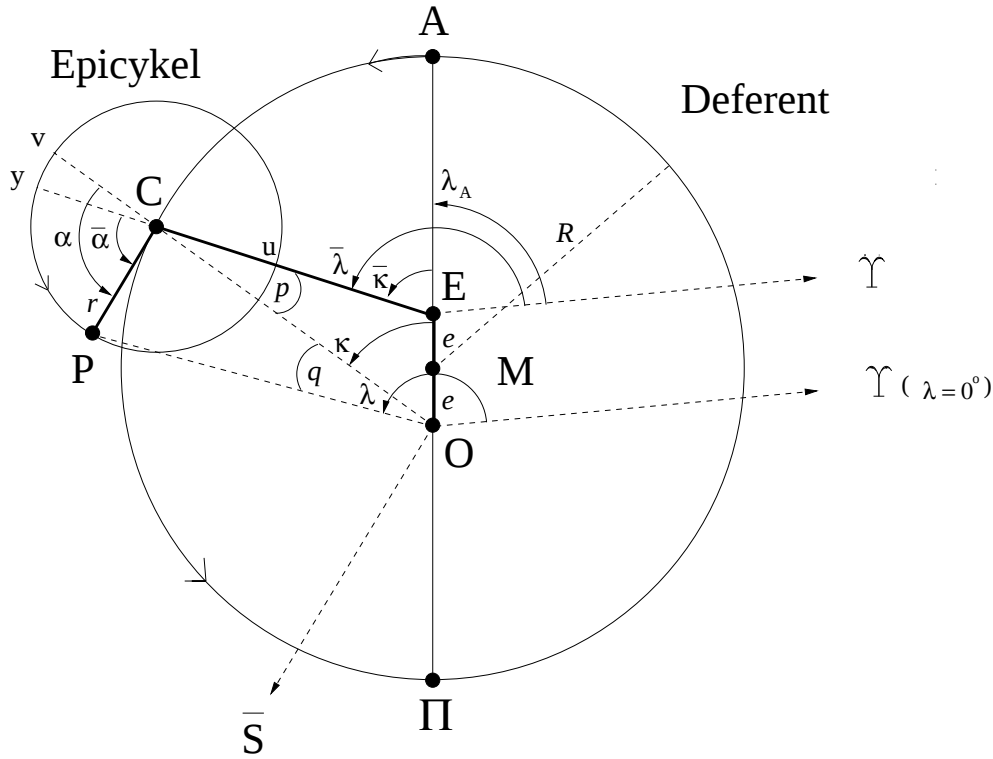
FIGUR 1.11

Bemærk at Ptolemaios' metode til bestemmelse af venusmodellens parametre, faktisk er den metode man ville anvende til solmodellens parametre (dog med equant) under antagelsen, at Venus roterer på sin epicykel, med retningen fra Jorden til Solen gennem epicyklens centrum. Da den absolutte excentricitet for Venus' bane rent faktisk ikke er særlig stor, er det ikke mærkeligt at Ptolemaios finder parametre næsten identiske med Solens. Problemet med at lade venusdeferenten være lig soldeferenten bunder i, at dels finder han ikke samme apsidelinie eller bevægelse af denne og dels har solmodellen intet equantpunkt (hvilket dog sagtens kan indføres uden at ændre modellens pålidelighed). Det ville i øvrigt være med til at harmonisere systemet, hvis alle planeterne havde et equantpunkt.

$\frac{2e}{p}$	$\frac{r}{p}$	λ_A °
2;30	43;10	55;0

TABEL 1.7. Geometriske parametre.

1.4. Model for ydre planet



FIGUR 1.12. Ptolemaios' model for ydre planet.

Retningsvektoren til en ydre planet regnet fra Jorden er givet ved samme relation som for Venus — nemlig:

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OE} + \mathbf{EC} + \mathbf{CP} \quad (1.4.1)$$

Eneste forskel mellem de to modeller er at relationen til $\bar{S}$ er overført til $\mathbf{CP}$, som nu altid peger i samme retning som $\mathbf{OS}$. Dette betyder at rotationen af $\mathbf{CP}$ kan skrives som $(\omega_{\bar{\alpha}} = \omega_{\odot} - \omega_{\bar{\lambda}}, T_{\bar{\alpha}})$, hvor $\frac{1}{T_{\bar{\alpha}}} = \frac{1}{T_{\odot}} - \frac{1}{T_{\bar{\lambda}}}$. $(\omega_{\bar{\lambda}}, T_{\bar{\lambda}})$ er den uafhængige rotation af $\mathbf{EC}$.

1.4.1. Længdegrader og middelbevægelser. Her kan man kopiere det tilsvarende afsnit fra venusmodellen, idet de to modeller kun adskiller sig ved deres relation til middelsolen, og således er geometrisk identiske. Formlerne 1.3.2–1.3.13 er derfor stadig gældende i dette afsnit. Navnene på de variable er uændret og kun vinkler og middelbevægelser relateret til middelsolen ændres:

$$\omega_{\bar{\lambda}} \Delta t = (\omega_{\odot} - \omega_{\bar{\alpha}}) \Delta t = \text{middelbevægelsen i længdegrad.}$$

$$\bar{\lambda}: \angle \gamma \text{EC} = \bar{\lambda}_{\odot} - \bar{\alpha} = \bar{\lambda}(t_0) + \omega_{\bar{\lambda}}(t - t_0) = \text{middellængdegraden.}$$

$$\bar{\kappa}: \angle \text{AEC} = \bar{\kappa}(t_0) + (\omega_{\bar{\lambda}} - \omega_{\pi})(t - t_0) = \text{middel excentrisk anomali.}$$

Middelbevægelserne og korrektionerne for de ydre planeter er tabellagt i hhv. bog IX,4 og XI,11.

Indførelsen af equantpunktet forbedrer modellernes overensstemmelse med planeternes bevægelse, men er samtidig et brud med PUC, hvorfor man skulle tro, at Ptolemaios ville give det noget større opmærksomhed end tilfældet rent faktisk er.

For ingen steder nævner han, at der her er et problem, ej heller ændrer han på formuleringen af PUC i bog I, eller omtaler bevægelserne som værende andet end uniformt cirkulære. Ptolemaios synes derfor i al ubemærkethed at have tillagt PUC en ekstra fortolkning — nemlig at en uniform cirkulær bevægelse ikke nødvendigvis er uniform mht. til cirkelbevægelsens centrum. Forklaringen på dette kan skyldes, at han på den ene side nødtigt vil undvære den øgede præcision stammende fra equantpunktet og på den anden side heller ikke ønsker konfrontation med datidens indgroede aristoteliske kosmologi.

1.5. Ptolemaios' jupitermodel

I dette afsnit vil jeg gennemgå de argumenter og udregninger, som fremstillet i *Almagesten*, leder til den geometriske model med tilhørende parametre.

1.5.1. Udledning af geometrisk model. Behandlingen af de tre ydre planeter foregår fuldstændig analogt og resulterer da også i en fælles geometrisk model, som kun adskiller sig ved værdierne af modellens parametre, for hver enkelt planet. Udledelsen af jupitermodellen er således samtidig udledelsen af modellen for en ydre planet.

Ptolemaios begynder teorien for de indre og ydre planeter i bog IX med en konstatering af en overordnet enighed om de ydre planeters placering over solsfæren. Derimod er der delte meninger om, hvorvidt de indre planeter skal placeres over eller under Solen. Da planeterne ikke har nogen målelig parallakse, kan deres afstande ikke beregnes og dermed er en verificering af planeternes rækkefølge umulig.¹³ Placeringen af de indre planeter under Solen, som givet i pkt. 7, s. 5, findes dog mest plausibel da Solen hermed mere naturligt adskiller de planeter som når alle mulige vinkelafstande til Solen, fra de som altid bevæger sig i dens nærhed. Med rækkefølgen således fastlagt går Ptolemaios over til udledelsen af de geometriske modeller, som først og fremmest via jævnt cirkulære bevægelser, skal være i stand til at gengive planeternes tilsyneladende anomalier. Der skelnes her mellem to typer¹⁴, som adskiller sig ved deres størrelse og periode for hver enkelt planet.

- En anomali relateret til positionen på ekliptika, — 1.anomali.
- En anomali relateret til Solen, — 2.anomali.

Ptolemaios påpeger at en undersøgelse af planeternes tilsyneladende bevægelse kan være en meget svær opgave, grundet observationernes unøjagtighed og fåtal over et tilstrækkeligt stort tidsinterval, samt at de to anomaliers kontinuerte kombination vanskeliggør en adskillelse af deres individuelle karakteristika. Som en hovedregel anvender Ptolemaios kun de observationer, som er mest pålidelige — dvs:

- Observationer hvor der er direkte/tæt kontakt med en stjerne eller månen.¹⁵
- Observationer foretaget med en armillar sfære.

Ovenstående anomalier skal nu tillægges cirkelbevægelser hvis perioder gives ved relationer af formen $Y = E + S$, se pkt. 5, s. 7. Perioderne var allerede beregnet af Hipparch, hvis værdier Ptolemaios korrigerer på basis af observationer og den færdige model.¹⁶ For Jupiter gives perioderne ved relationen:

65 returneringer i anomali svarer til hhv. 71 tropiske år $-4\frac{9}{10}dg$ og 6 ekliptiske omløb $-4\frac{5}{6}^\circ$.

Dette giver en årlig middelbevægelse i epicyklisk anomali på

$$\omega_{\bar{\alpha}} = 365^{dg}/\text{eg.år} \frac{65 \cdot 360^\circ}{(71 \cdot T_{\odot} - 4\frac{9}{10})dg} = 329; 25, 1, 52, 28, 10, 0^\circ/\text{eg.år} \quad (1.5.1)$$

¹³Fra observationer af måneformørkelser samt en værdi for afstanden til månen, kan Ptolemaios i bog V,¹⁵ udregne en værdi for afstanden til Solen, se også [Pe74, s. 209–213].

¹⁴Pkt. 2 & 3 s. 6–7.

¹⁵Ptolemaios behandler først solteorien i bog III, måler månepositioner fra Solen og laver månemodellen i bog VI, fra Månen findes positionen af stjernerne i bog VII og VIII.

¹⁶Ptolemaios' værdier stemmer dog ikke overens med den angivne metode, hvilket tyder på at resultaterne er fremkommet ad anden vej, se [To84, Appendix C] og [Mo87].

OC: Roterer mod øst uniformt om O, med vinkelhastigheden ω relativt til apsidelinien. $R = |\mathbf{OC}|$.

CP: Roterer mod vest uniformt om C, med vinkelhastigheden ω relativt til OC. $r = |\mathbf{CP}|$.

At de to modeller er ækvivalente, ses ved at OMPC altid danner et parallelogram.¹⁷ Eneste ændring fra den indirekte til den direkte epicykelmodel er at **CP** nu roterer mod øst.

Det ses klart at alle tre modeller giver en resulterende bevægelse af P, ikke-uniform set fra O:

De ækvivalente modeller.

- I A har P minimal vinkelhastighed set fra O.
- I II maksimal hastighed.

Dette ses let fra den excentriske model pga. afstanden til A og II, og af epicykelmodellen ved at P i A og II kun har hastighedskomponenter vinkelret på apsidelinien, som hhv. er modsatrettede og ensrettede, se Fig. 1.13. For den direkte model er det lige omvendt.

- Når $\angle AOP = 90^\circ$ eller 270° — dvs. i kvadraturerne — antager P, set fra O, sin middelvinkelhastighed ω .¹⁸

Endvidere vil korrektionen p til middelbevægelsen antage sit maksimum i disse punkter. Beviset for dette udfører Ptolemaios for begge modeller. For epicykelmodellen er det klart idet OP tangerer epicyklen.¹⁹ Den direkte model antager ligeledes sin middelbevægelse i punkterne med maksimal korrektion, som dog ikke ligger i kvadraturene, men derimod når $\angle AOP' = 90^\circ$. Ved denne position er **OP** tangent til epicyklen.

Fra ovenstående betragtninger følger nu en vigtig iagttagelse vedrørende planetens bevægelse i modellerne: For de ækvivalente modeller gælder nemlig at tiden (repræsenteret ved vinklen β) hvori planeten bevæger sig fra punktet A med mindst tilsyneladende hastighed til punktet med middelhastigheden ($\beta = 90^\circ + \sin^{-1} r/R$), er større end tiden (repræsenteret ved $\angle PMII$) for at gå fra middelhastighedspunktet til punktet II med størst tilsyneladende hastighed. I den direkte model er det omvendte tilfældet og dermed haves et kriterium til bestemmelse af, om hvorvidt en anomali skal beskrives ved den direkte model eller ved en af de ækvivalente modeller. Dette udnytter Ptolemaios, som fra en række forskellige Sol-planet konfigurationer observeret i samme omegn (dette eliminerer 1.anomali) på ekliptika, har fundet at alle planeterne er længere om at nå fra største til middel hastighed end fra middel til mindste hastighed. Konklusionen er derfor at 2.anomali kun kan beskrives ved den direkte epicykelmodel.

Undersøgelsen af 1.anomali sker på baggrund af observationer af successive Sol-planet konfigurationer af samme art, f.eks oppositioner, da sådanne er uafhængige af 2.anomali. Denne gang findes at tiden fra mindste hastighed til middelhastighed altid er større end tiden fra middel til største hastighed. De ovennævnte observationer understøttes ikke af nogen form for observationsdata.

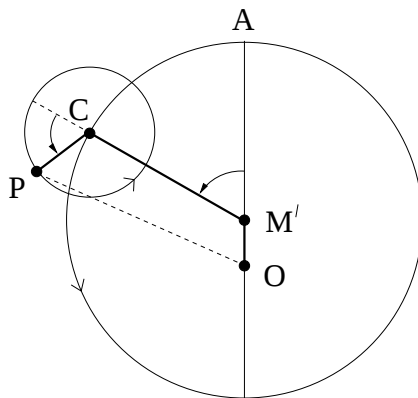
¹⁷Vektoraddition er kommutativ.

¹⁸Dette viser Ptolemaios ikke, men kan ses af Fig. 1.13 ved at OP tangerer cirklen hvorved hastighedskomponenten hidrørende fra epicyklen reduceres til 0, set fra O.

¹⁹For den excentriske model se [Pe74, s. 141–143].

Ptolemaios kan nu vælge mellem en af de to ækvivalente modeller og vælger den excentriske, da 2.anomali jo særligt var tilknyttet en epicykelmodel.²⁰

Efter hvad der herefter følger, er det klart at Ptolemaios udviklede en foreløbig planetmodel af typen Fig. 1.15 (en dobbelt excentrisk model) med værdisatte parametre. Han skriver nemlig, at han ved sammenligning af observationer med resultater beregnet fra modellen kombineret af epicyklen og den excentriske cirkel (den foreløbige model), har fundet at apsidelinien ikke er fast relativt til forårspunktet (planeterne deltager i præcessionen) og at deferentcentret ikke samtidig er centret for den uniforme bevægelse. En sådan sammenligning kræver at den foreløbige model var fuldt udviklet.



FIGUR 1.15. Foreløbig planetmodel.

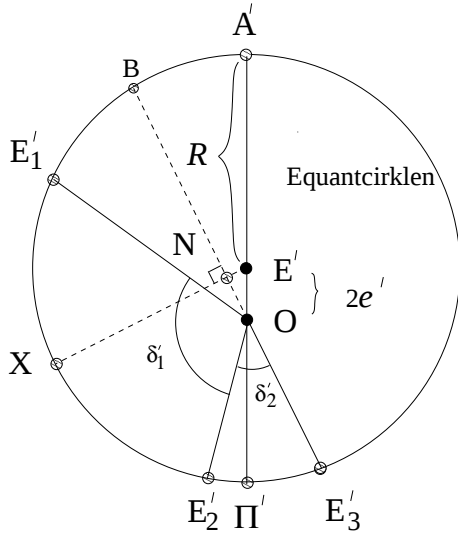
Problemerne løses ved at lade deferentplanet rotere, mod øst, uniformt om O med vinkelhastigheden $\omega_\pi = 1^\circ$ pr. 100 år. Samtidig adskilles deferentcentret M fra equantpunktet E (M' i figuren) således at $OE = 2OM$, som på Fig. 1.12.

Ptolemaios fortsætter herefter (bog IX,6 – bog X,5) med at udlede parametre for de indre planeter, herunder en verificering af equantpunktet. I bog X,6 tager han atter fat på de ydre planeter med en forklaring på, hvorfor equantpunktet også skal indføres for dem. Ved grove vurderinger findes nemlig, at excentriciteten udregnet fra 1.anomali (f.eks. fra den ikke-uniforme fordeling af en planets oppositioner langs ekliptika) er ca. dobbelt så stor som excentriciteten udledt fra størrelsen af de retrograde buer, i apogæum og perigæum.²¹ Udregningen af excentriciteten og apogæets position kan dog ikke foregå ad samme linier som for de indre planeter. De ydre kan antage enhver mulig elongation og det er derfor ikke klart, som for de indre, hvornår vores synsline OP til planeten tangerer epicyklen. Istedet anvendes en metode udnyttende observationer af oppositioner med middelsolen. Denne type observationer benyttes da planeten her befinder sig på samme længdegrad som epicykelcentret og således er uafhængig af bevægelsen på epicyklen, dvs. den 2.anomali. Ptolemaios begynder herefter udledelsen af de geometriske parametre.

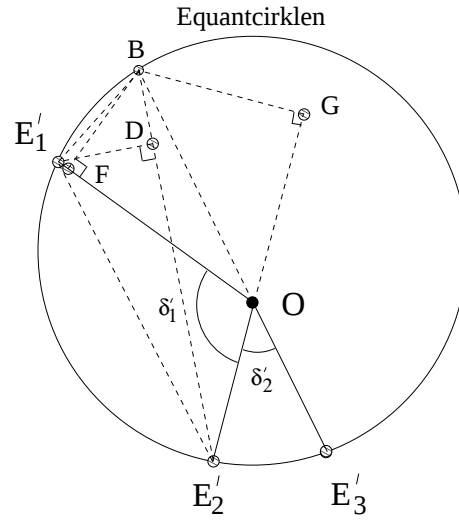
²⁰Epicykelmodellen med indirekte rotation kan kvalitativt beskrive en retrograd bevægelse nær epicykelapogæet, men tilføres numeriske værdier er den faktisk ude af stand til at frembringe retrogradation for Venus og Mars, se [Aa63].

²¹Om equantens og deferentens rolle i forhold til de retrograde bevægelser, se [Ev84].

approximation $2e'$ til $2e$. I den approksimerede situation, Fig. 1.17 ses positionerne E'_i på equantcirklen under vinklerne $\delta'_i = \delta_i$ fra O og fra E' (approximationen til E) ses de som før under vinklerne $\bar{\delta}_i$.



FIGUR 1.17.



FIGUR 1.18.

Da R 's virkelige værdi ikke kan måles, sættes $R = 60^p$. Den excentricitet der udregnes er således heller ikke den absolutte værdi, men blot et udtryk der fortæller om størrelsesforholdet mellem $2e'$ og R . For at finde $2e'$ udnyttes flg. identitet:

$$BO \cdot OE'_3 = (R + 2e') \cdot (R - 2e') \quad (1.5.3)$$

Der kræves altså en bestemmelse af BO og OE'_3 i enheder af equantcirklen, hvor $R = 60^p$.

Betragt Fig. 1.18

BE'_1 , i enheden hvor $BO = 120^p$: I ekliptika haves

$$\sphericalangle E'_1 E'_3 = \delta'_1 + \delta'_2 = 141; 12^\circ \Rightarrow \sphericalangle E'_1 O E'_3 = 141; 12^\circ$$

$\Downarrow$

$$\sphericalangle E'_1 O B = 180^\circ - 141; 12^\circ = 38; 48^\circ.$$

I $\triangle OBF$, hvor $BO = 120^p$:

$$\sphericalangle BF = 77; 36^\circ \stackrel{1.1.1}{\Rightarrow} BF = 75; 12^p. \quad (1.5.4)$$

Ptolemaios bruger her, at en vinkel i en trekant er halvt så stor som den tilhørende buevinkel i den omskrevne cirkel. Herved er han i stand til at gå direkte fra trekanten til cirklen og derfra til kordetabellen, idet radius vælges til 60^p (i en retvinklet trekant er hypotenusen, diameter, i den omskrevne cirkel).

I equantcirklen:

$$\sphericalangle E'_1 E'_2 E'_3 = \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2 = 133; 21^\circ \Rightarrow \sphericalangle E'_1 B E'_3 = 66; 40, 30^\circ$$

$\Downarrow$

$$\sphericalangle BE'_1 F = 180^\circ - 38; 48^\circ - 66; 40, 30^\circ = 74; 31, 30^\circ.$$

I $\triangle E'_1BF$, hvor $BE'_1 = 120^p$:

$$\sphericalangle BF = 149; 3^\circ \stackrel{1.1.1}{\Rightarrow} BF = 115; 39^p. \quad (1.5.5)$$

Fra 1.5.4 og 1.5.5 fås

$$BE'_1 = 78; 2^p, \text{ i enheden hvor } BO = 120^p. \quad (1.5.6)$$

Ptolemaios udregner BF i to enheder, 1.5.4 og 1.5.5 og kan ud fra deres forhold omregne en størrelse fra den ene enhed til den anden. I ovenstående tilfælde er $BE'_1 = (120 \cdot \frac{75;12}{115;39})^p$.

$E'_1E'_2$, i enheden hvor $BO = 120^p$: I $\triangle GOB$, $BO = 120^p$

$$\delta'_2 = \angle BOG = 36; 29^\circ \Rightarrow \sphericalangle BG = 72; 58^\circ$$

fra 1.1.1 fås

$$BG = 71; 21^p. \quad (1.5.7)$$

I equantcirklen:

$$\sphericalangle E'_2E'_3 = \bar{\delta}_2 = 33; 26^\circ \Rightarrow \angle E'_2BE'_3 = 16; 43^\circ.$$

Fra vinkelsummen i $\triangle BOE'_2$

$$\angle BE'_2G = \angle BOG - \angle E'_2BE'_3 = 19; 46^\circ.$$

I $\triangle E'_2BG$, $BE'_2 = 120^p$:

$$\sphericalangle BG = 39; 32^\circ \Rightarrow BG \stackrel{1.1.1}{=} 40; 35^p. \quad (1.5.8)$$

I enheden hvor $BO = 120^p$ fås fra 1.5.7 og 1.5.8 at

$$BE'_2 = 210; 58^p. \quad (1.5.9)$$

I equantcirklen:

$$\sphericalangle E'_1E'_2 = \bar{\delta}_1 = 99; 55^\circ$$

$\Downarrow$

$$\angle E'_1BE'_2 = 49; 57, 30^\circ.$$

I $\triangle E'_1BD$, $BE'_1 = 120^p$:

$$\sphericalangle E'_1D = 99; 55^\circ \text{ og } \sphericalangle BD = 80; 5^\circ \quad (1.5.10)$$

$\Downarrow$ 1.1.1

$$E'_1D = 91; 52^p \text{ og } BD = 77; 12^p. \quad (1.5.11)$$

I enheden hvor $BO = 120^p$ fås nu fra 1.5.6 og 1.5.11

$$E'_1D = 59; 44^p \text{ og } BD = 50; 12^p.$$

Med værdien 1.5.9 fås

$$DE'_2 = BE'_2 - BD = 160; 46^p.$$

Pythagoras på trekant $E'_1E'_2D$ giver

$$E'_1E'_2 = ((E'_1D)^2 + (DE'_2)^2)^{\frac{1}{2}} = 171; 30^p, \text{ hvor } BO = 120^p. \quad (1.5.12)$$

BO og OE₃' i enheder af equantcirklen: På equantcirklen kan E₁'E₂' og dermed BO findes i enheder hvor $R = 60^p$

$$E_1'E_2' = crd\bar{\delta}_1 = 91;52^p. \quad (1.5.13)$$

Fra 1.5.12 og 1.5.13 findes nu

$$BO = 64;17^p \quad (1.5.14)$$

↓_{1.5.6}

$$BE_1' = 41;47^p \stackrel{1.1.1}{\Rightarrow} \angle BE_1' = 40;45^\circ$$

og dermed

$$\angle BE_1'E_2'E_3' = \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2 + \angle BE_1' = 174;6^\circ \quad (1.5.15)$$

↓_{1.1.1}

$$BE_3' \approx 119;50^p. \quad (1.5.16)$$

Ved subtraktion af 1.5.16 fra 1.5.14 fås

$$OE_3' = 55;33^p. \quad (1.5.17)$$

Excentriciteten: Alle de nødvendige størrelser til beregning af $2e'$ i enheder af equantcirklen er nu fundet og relationen 1.5.3 benyttes.

$$BO \cdot OE_3' = (R + 2e') \cdot (R - 2e')$$

↓

$$(R + 2e') \cdot (R - 2e') = 3570;56^p, \text{ hvor } R = 60^p$$

↓

$$(2e')^2 = 29;4 \Rightarrow 2e' \approx 5;23^p. \quad (1.5.18)$$

Approksimationer til de middel excentriske anomalier: Betragt Fig. 1.17.

I enheder af equantcirklen have

$$E_3'N = \frac{1}{2}BE_3' \stackrel{1.5.16}{=} 59;55^p \text{ og } OE_3' \stackrel{1.5.17}{=} 55;33^p$$

↓_{Subtraktion}

$$ON = 4;22^p.$$

I $\triangle ONE'$, hvor $OE' = 2e' = 120^p$:

$$ON = 97;20^p \stackrel{1.1.1}{\Rightarrow} \angle ON = 108;24^\circ \Rightarrow \angle OE'N = 54;12^\circ.$$

Så i equantcirklen

$$\angle \Pi'X = 54;12^\circ.$$

Approksimationerne $\bar{\kappa}_i'$ kan nu findes

$$\angle \Pi'E_3' = \frac{1}{2}\angle BE_1'E_2'E_3' - \angle \Pi'X \stackrel{1.5.15}{=} 32;51^\circ$$

↓

$$\bar{\kappa}_3' = \angle A'E'E_3' = 180^\circ + 32;51^\circ = 212;51^\circ \quad (1.5.19)$$

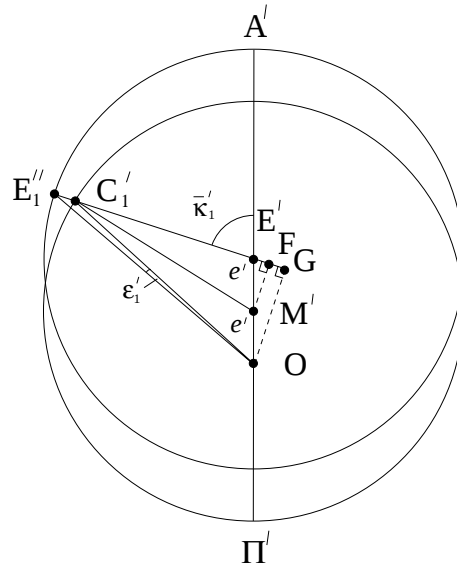
og

$$\bar{\kappa}_2' = \angle A'E'E_2' = \bar{\kappa}_3' - \bar{\delta}_2 = 179;25^\circ \quad (1.5.20)$$

og

$$\bar{\kappa}_1' = \angle A'E'E_1' = \bar{\kappa}_2' - \bar{\delta}_1 = 79;30^\circ. \quad (1.5.21)$$

Ovenstående approksimationer er som sagt udledt under antagelsen, at epicykelcentret bevæger sig uniformt på equantcirklen. I virkeligheden — dvs. i modellen — bevæger epicykelcentret sig på deferenten, hvis centrum er lokaliseret på apsidelinien i punktet midt mellem Jorden og equantpunktet. Da positionerne E_i er projektioner fra E af C_i på equantcirklen, kan nye forbedrede værdier for E_i 's position set fra Jorden bestemmes ud fra de approksimerede parametre. Betragt derfor Fig 1.19 som viser konfigurationen ved første opposition med de fundne approksimationer. I figuren er C'_1 og E''_1 de nye forbedrede positioner af hhv. C_1 og E_1 . Det skal bemærkes at de indbyrdes vinkelforskelle $\bar{\delta}_i$ og δ_i mellem C_i 'erne set fra hhv. E og O bevares i de approksimerede situationer.



FIGUR 1.19

Positionen af E''_1 set fra O skal bestemmes, dvs. vinklen ϵ'_1 .

$\angle OC'_1G$: I $\triangle M'E'F$, $M'E' = 120^p$:

$$\angle A'E'E''_1 = \bar{\kappa}'_1 = 79;30^\circ$$

$\Downarrow$

$$\angle M'E'F = 79;30^\circ$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} \angle M'F = 159^\circ \quad \text{og} \quad \angle E'F = 21^\circ &\stackrel{1.1.1}{\Rightarrow} \begin{cases} M'F = 117;59^p \\ E'F = 21;52^p. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

I enheden hvor $R = M'C'_1 = 60^p$:

$$M'E' = \frac{1}{2}OE' = e' \stackrel{1.5.18}{\approx} 2;42^p$$

fra 1.5.22 fås

$$M'F = 2;39^p \quad \text{og} \quad E'F = 0;30^p. \quad (1.5.23)$$

$\Downarrow$ Pythagoras

$$(FC'_1)^2 = (M'C'_1)^2 - (M'F)^2 \Rightarrow FC'_1 = 59;56^p.$$

Da

$$\left. \begin{array}{l} E'F = FG \\ \text{og } OG = 2M'F \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C'_1G = FC'_1 + FG = 60; 26^p \\ \text{og } OG = 5; 18^p. \end{array} \right\} \quad (1.5.24)$$

$\Downarrow$ Pythagoras

$$(OC'_1)^2 = (OG)^2 + (C'_1G)^2 \Rightarrow OC'_1 = 60; 40^p. \quad (1.5.25)$$

I $\triangle OC'_1G$, $OC'_1 = 120^p$: Fra 1.5.24 og 1.5.25 fås

$$OG = 10; 29^p \xrightarrow{1.1.1} \left\{ \begin{array}{l} \angle OG = 10; 1^\circ \\ \text{og } \angle OC'_1G = 5; 0, 30^\circ. \end{array} \right. \quad (1.5.26)$$

$\angle OE''_1G$: I deferenten, $R = M'C'_1 = 60^p$:

$OG \stackrel{1.5.24}{=} 5; 18^p$ og $E'E''_1 = 60^p$ (deferenten og equantcirklen er jo lige store).

Da endvidere $E'G = 2E'F \stackrel{1.5.23}{=} 1^p$ er $E''_1G = E'G + E'E''_1 = 61^p$.

Pythagoras sætning giver nu

$$(OE''_1)^2 = (OG)^2 + (E''_1G)^2 \Rightarrow OE''_1 = 61; 14^p. \quad (1.5.27)$$

Med 1.5.24 giver dette for $OE''_1 = 120^p$ i $\triangle OGE''_1$:

$$OG = 10; 23^p \xrightarrow{1.1.1} \left\{ \begin{array}{l} \angle OG = 9; 55^\circ \\ \text{og } \angle OE''_1G = 4; 57, 30^\circ. \end{array} \right. \quad (1.5.28)$$

Korrektionen ϵ'_1 : Ved subtraktion af 1.5.28 fra 1.5.26 fås

$$\angle C'_1OE''_1 = \epsilon'_1 = 0; 3^\circ. \quad (1.5.29)$$

Fra tabel 1.8 vides at C'_1 har en længdegrad på $233; 11^\circ$ set fra O. Den nye approksimation E''_1 til E_1 har da længdegraden (set fra O)

$$233; 11^\circ + \epsilon'_1 = 233; 14^\circ.$$

Ved at bruge samme metode for de to resterende oppositioner får Ptolemaios:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon'_2 = -0; 1^\circ \\ \epsilon'_3 = 0; 7^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Længdegraden af } E'_2 : 337; 53^\circ \\ \text{Længdegraden af } E'_3 : 14; 30^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta''_1 = 104; 39^\circ \\ \delta''_2 = 36; 37^\circ \end{array} \right.$$

hvor δ''_1 og δ''_2 er de nye approksimationer til hhv. δ_1 og δ_2 .

Med de udledte forbedrede approksimationer δ''_i til δ_i udføres proceduren s. 23 – 26 atter, hvorved bedre værdier for $2e$ og $\bar{\kappa}_i$ opnås. Der er altså her tale om en iterationsproces, som efter hvert skridt giver bedre tilnærmelser. Processen ender når de tilnærmede værdier for δ_i ikke ændres betydeligt efter hver enkelt trin, dvs. når approksimationerne for ϵ_i forbliver nogenlunde konstante. Heldigvis er den første approksimation $\delta_i = \delta'_i$ så god, at Ptolemaios kun behøver at gennemgå to iterations-skridt (dvs. processen med δ''_i er det sidste skridt), før processen giver tilfredsstillende resultater (Ptolemaios tjekker om de fundne parametre er i stand til at reproducere de observerede δ_i).

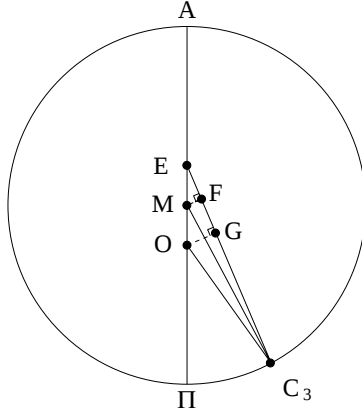
Ptolemaios får:

$$\boxed{2e = 5; 30^p}$$

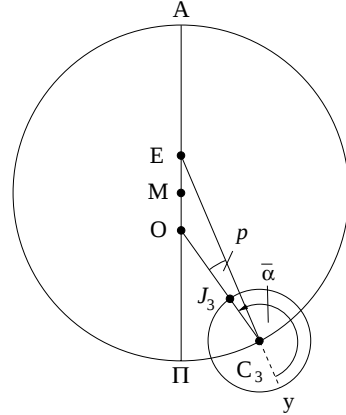
$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_1 &= 77; 15^\circ \\ \bar{\kappa}_2 &= 177; 10^\circ \\ \bar{\kappa}_3 &= 210; 36^\circ. \end{aligned} \quad (1.5.30)$$

Apogæets længdegrad λ_A : λ_A udregnes fra J_3 i tabel. 1.8 samt resultaterne 1.5.30.

Betragt Fig. 1.20



FIGUR 1.20.



FIGUR 1.21.

$$\angle \Pi E C_3 = \bar{\kappa}_3 - 180^\circ = 30;36^\circ. \quad (1.5.31)$$

I $\triangle MEF$, $ME = 120^p$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle MF = 61;12^\circ \\ \text{og } \angle EF = 180^\circ - 61;12^\circ = 118;48^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{1.1.1} \left\{ \begin{array}{l} MF = 61;6^p \\ EF = 103;17^p. \end{array} \right. \quad (1.5.32)$$

I enheder af deferenten $R = MC_3 = 60^p$: $ME = e^{1.5.30} 2;45^p$ og fra 1.5.32 fås

$$MF = 1;24^p \text{ og } EF = 2;22^p$$

$\Downarrow$ Pythagoras

$$(C_3F)^2 = (MC_3)^2 - (MF)^2 \Rightarrow C_3F = 59;59^p$$

fratrækkes herfra, længden $FG = EF$ fås

$$GC_3 = 57;37^p, \text{ hvor } OG = 2MF = 2;48^p.$$

Bruges Pythagoras i $\triangle OC_3G$ fås nu

$$(OC_3)^2 = (OG)^2 + (GC_3)^2 \Rightarrow OC_3 = 57;41^p.$$

I $\triangle OC_3G$, $OC_3 = 120^p$:

$$OG = 5;50^p \xrightarrow{1.1.1} \left\{ \begin{array}{l} \angle OG = 5;34^\circ \\ \text{og } \angle OC_3G = p = 2;47^\circ. \end{array} \right. \quad (1.5.33)$$

Der haves nu

$$\angle \Pi O C_3 = \angle \Pi E C_3 + \angle O C_3 G \stackrel{1.5.31}{=} \stackrel{1.5.33}{=} 33;23^\circ.$$

Da $\lambda_3 = 14;23^\circ$, $\kappa_3 = 180^\circ + \angle \Pi O C_3 = 213;23^\circ$ og $q = 0^\circ$ fås fra 1.3.9

$$\boxed{\lambda_A = 14;23^\circ - 213;23^\circ = 161^\circ} \quad (1.5.34)$$

Ovenstående resultat gælder naturligvis kun omkring observationstidspunktet t_3 pga. præcessionen.²² For at have fastlagt modellens konfiguration til dette tidspunkt mangler vi yderligere positionen på epicyklen, se Fig. 1.21:

Fra 1.5.33 fås

$$\angle OC_3E = p = 2;47^\circ \Rightarrow \bar{\alpha}_3 = 180^\circ + p = 182;47^\circ.$$

Epicyklens radius r : Hertil bruges atter observationen J_3 , samt nedenstående observation J_4 , af Jupiter udenfor opposition:

Obs. J_4	Dato t_4	Længdegrad $\lambda(t_4)$
4	11/7. 139, + 5h	75;45°

TABEL 1.9. Observation af Jupiter udenfor opposition.

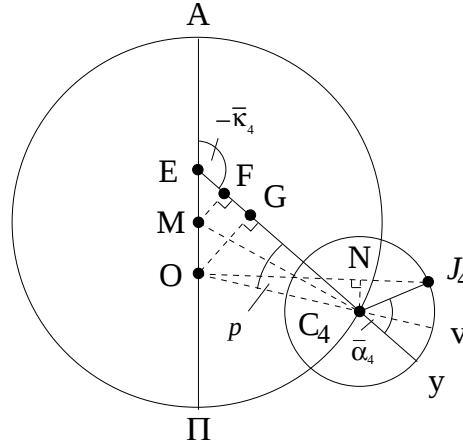
Tidsforskellen mellem J_4 og J_3 er : $\Delta t_3 = 1 \text{ eg.} \cdot \text{år } 276 dg$.
 $\omega_{\bar{\lambda}}$ og $\omega_{\bar{\alpha}}$ er givet i hhv. 1.5.2 og 1.5.1.

$$\begin{aligned} \text{Middelbevægelse i længdegrad:} & \quad \omega_{\bar{\lambda}} \Delta t_3 = 53;17^\circ \\ \text{Middelbevægelse i epicyklisk anomali:} & \quad \omega_{\bar{\alpha}} \Delta t_3 = 218;31^\circ \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_4 &= \bar{\kappa}_3 + \omega_{\bar{\lambda}} \Delta t_3 = 263;53^\circ \\ \bar{\alpha}_4 &= \bar{\alpha}_3 + \omega_{\bar{\alpha}} \Delta t_3 = 41;18^\circ. \end{aligned} \tag{1.5.35}$$

Modellens konfiguration til tiden t_4 er afbildet i Fig. 1.22.



FIGUR 1.22

$$\angle C_4E\Pi = \bar{\kappa}_4 - 180^\circ = 83;53^\circ. \tag{1.5.36}$$

I $\triangle MEF$, $ME = 120^p$:

$$\left. \begin{aligned} \angle MF &= 167;46^\circ \\ \text{og } \angle EF &= 12;14^\circ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{1.1.1} \left\{ \begin{aligned} MF &= 119;19^p \\ \text{og } EF &= 12;47^p. \end{aligned} \right. \tag{1.5.37}$$

I enheden $MC_4 = R = 60^p$: $ME = e = 2;45^p$ og fra 1.5.37 fås

$$\begin{aligned} MF &\approx 2;44^p \\ \text{og } EF &= 0;18^p. \end{aligned}$$

²²At apsidelinien deltager i præcessionen, slutter Ptolemaios fra en generalisering af bekræftende resultater for Merkur.

Pythagoras anvendt på $\triangle MFC_4$ giver

$$(FC_4)^2 = (MC_4)^2 - (MF)^2 \Rightarrow FC_4 = 59;56^p.$$

Da $EF = FG$ og $OG = 2MF = 5;28^p$ er

$$GC_4 = FC_4 - EF = 59;38^p$$

$\Downarrow$ Pythagoras

$$(OC_4)^2 = (OG)^2 + (GC_4)^2 \Rightarrow OC_4 = 59;52^p. \quad (1.5.38)$$

I $\triangle OGC_4$, $OC_4 = 120^p$:

$$OG \approx 10;58^p \xrightarrow{1.1.1} \begin{cases} \sphericalangle OG = 10;30^\circ \\ \text{og } \angle OC_4E = p = 5;15^\circ. \end{cases} \quad (1.5.39)$$

Fra 1.5.36 fås ved addition

$$\angle HOC_4 = 89;8^\circ.$$

Da længdegraden af perigæet er 341° og $\lambda_4 = 75;45^\circ$ fås ved subtraktion

$$\angle HIOJ_4 = 94;45^\circ$$

Ved subtraktion af $\angle HOC_4$ fås

$$\angle C_4OJ_4 = q = 5;37^\circ. \quad (1.5.40)$$

I $\triangle C_4ON$, $OC_4 = 120^p$:

$$\sphericalangle C_4N = 11;14^\circ \xrightarrow{1.1.1} C_4N = 11;44^p. \quad (1.5.41)$$

Med $R = MC_4 = 60^p$:

$$C_4N \xrightarrow{1.5.38 \text{ og } 1.5.41} 5;50^p. \quad (1.5.42)$$

Da $\angle yC_4J_4 = \bar{\alpha}_4 \xrightarrow{1.5.35} 41;18^\circ$ fås ved subtraktion af $\angle yC_4v = p$, givet i 1.5.39

$$\angle vC_4J_4 = \alpha_4 = 36;3^\circ.$$

Herfra subtraheres q , givet ved 1.5.40

$$\angle C_4J_4N = 30;26^\circ.$$

I $\triangle C_4J_4N$, $C_4J_4 = 120^p$:

$$\sphericalangle C_4N = 60;52^\circ \xrightarrow{1.1.1} C_4N = 60;47^p$$

$\Downarrow$ 1.5.42

I enheden $R = 60^p$, er epicyklens radius $C_4J_4 = r$:

$$\boxed{r \approx 11;30^p} \quad (1.5.43)$$

Alle jupitermodellens parametre er nu givet, på nær epokeværdierne. Disse udregnes ved, at man til et eller andet tidspunkt kender modellens konfiguration (f.eks. for J_3 , se s. 29) og herfra fratrækker middelbevægelserne udregnet fra tidsforskellen mellem den pågældende tid og epoken.

For Jupiter finder Ptolemaios, se tabel 1.10:

$\bar{\lambda}(t_0)$ °	$\bar{\alpha}(t_0)$ °	$\lambda_A(t_0)$ °
184;41	146;4	152;9

TABEL 1.10

For de andre ydre planeter finder Ptolemaios på tilsvarende måde flg. parametre (parametrene for Jupiter er taget med for overskuelighedens skyld):

Planet	Geometriske parametre			Kinematiske parametre	
	$2e$ p	r p	λ_A °	$\omega_{\bar{\lambda}}$ °/eg.år	$\omega_{\bar{\alpha}}$ °/eg.år
Mars	12;00	39;30	115;30	191;16,54,27,38,35,45	168;28,30,17,42,32,50
Jupiter	5;30	11;30	161	30;20,22,52,52,58,35	329;25,1,52,28,10,0
Saturn	6;50	6;30	233	12;13,23,56,30,30,15	347;32,0,48,50,38,20

TABEL 1.11

Planet	Epokeværdier		
	$\bar{\lambda}(t_0)$ °	$\bar{\alpha}(t_0)$ °	$\lambda_A(t_0)$ °
Mars	3;32	327;13	106;40
Jupiter	184;41	146;4	152;9
Saturn	296;43	34;2	224;10

TABEL 1.12

For Ptolemaios' metode i termer af de moderne trigonometriske funktioner, se [Ne75, s.172–180].

KAPITEL 2

Ptolemaios' fysiske modeller

Den manglende beskrivelse af universets fysiske struktur råder Ptolemaios bod på i sit senere værk, *Planetære hypoteser* (hypoteser betyder her modeller). Heri udarbejder han modeller repræsenterende den fysiske udgave af *Almagestens* geometriske modeller, dvs. modeller af de virkelige mekanismer, som styrer himlens bevægelser. Ptolemaios håber endvidere, at disse modeller vil tjene som retningslinje i konstruktionen af astronomiske instrumenter.

Hypoteserne er opdelt i to bøger, hvis vigtigste resultater gengives nedenfor.

2.1. Bog 1

Ptolemaios bygger sine fysiske modeller på flg. antagelser:

1. *Almagestens* geometriske modeller er direkte relateret til fysisk virkelige sfærer i himlen.
2. Der kan ikke eksistere tomt rum i universet (denne findes også i det aristoteliske verdensbillede).

Systemet der herved opstår, er et arrangement af tætpakkede æteriske sfærer i rækkefølgen givet ved pkt. 7, s. 5. Udover at redegøre for himlens virkelige mekanismer (se afsnit 2.2), har *det Ptolemæiske system* den fordel, at det muliggør en absolut (værdier angivende relative størrelsesforhold planetmodellerne imellem og ikke kun i en enkelt model, kalder jeg absolutte) afstandsbestemmelse til planeterne.¹ I *Almagesten* fandt Ptolemaios kun absolutte afstande til Månen og Solen, i enheder af Jordens radius r_{jord} , se [Pe74, Kap.7]. Resultaterne afrundet til hele tal er givet i tabel 2.1, hvor L,m og l hhv. betegner den maksimale, den gennemsnitlige og den minimale afstand.

Planet	L r_{jord}	m r_{jord}	l r_{jord}
Månen	64	48	33
Solen	1260	1210	1160

TABEL 2.1.

Planet	$\frac{L}{l}$	L r_{jord}	m r_{jord}	l r_{jord}
Merkur	88/34	166	115	64
Venus	104/16	1079	622;30	166
Solen	25/23	1260	1210	1160
Mars	7/1	8820	5040	1260
Jupiter	37/23	14187	11504	8820
Saturn	7/5	19865	17026	14187

TABEL 2.2.

Bemærk at Månens tilsyneladende diameter, som følge heraf, burde variere med ca. en faktor 2, hvilket naturligvis ikke er tilfældet, da Månens virkelige afstandsvariation ligger mellem $56r_{jord}$ og $64r_{jord}$. For de andre planeter er det kun muligt at

¹Bestemmelsen af absolutte afstande inddrager Merkur og Månen, hvorfor disse medtages i dette afsnit.

udregne relative afstande (disse markeres med et indeks ') ved brug af *Almagestens* værdier (se kapitel 1) for r og e ved $R = 60^p$:

$$L' = \begin{cases} R + (r + e) & \text{for Venus og ydre planeter.} \\ R + e & \text{for Solen.} \end{cases}$$

$$l' = \begin{cases} R - (r + e) & \text{for Venus og ydre planeter.} \\ R - e & \text{for Solen.} \end{cases}$$

Fra antagelserne øverst på side 33 udtrækkes flg. ligheder:

ad 1. De relative størrelsesforhold er lig de absolutte størrelsesforhold, dvs. $\frac{L'}{l'} = \frac{L}{l}$.

ad 2. Den største afstand af den n 'te planet fra Jorden er lig den mindste afstand af den $(n+1)$ 'te planet, dvs. $L_n = l_{n+1}$.

Planeternes absolutte afstande beregnes nu via:

$$\frac{L'_n}{l'_n} = \frac{L_n}{l_n} = \frac{L_n}{L_{n-1}} \Rightarrow L_n = L_{n-1} \left(\frac{L'_n}{l'_n} \right), \text{ hvor } L_0 = 64r_{j\text{ord}}. \quad (2.1.1)$$

Resultater baseret på afrundede værdier af $\frac{L'}{l'}$ er afbildet i tabel 2.2. Ptolemaios afrunder afstanden til fiksstjernesfæren til $\approx 20000r_{j\text{ord}}$ (i kapitel 6, s. 91 ses at Ptolemaios' afstande er alt for små). Af afgørende betydning for Ptolemaios' system skal det bemærkes, at 2.1.1 for Solen giver $L = 1173r_{j\text{ord}}$ og $l = 1079r_{j\text{ord}}$, hvilket passer ganske godt med resultaterne fra *Almagesten*. *Almagestens* afstande til Månen og Solen resulterer dog i et gab mellem Solen og Venus, som han ikke er i stand til at forklare. Ptolemaios foreslår, at denne afvigelse kan rettes ved at man i *Almagestens* metode, til beregning af Solens absolutte afstand, giver afstanden til Månen en lidt større værdi, hvorved afstanden til Solen formindskes.² Hvis han istedet havde anvendt de præcise værdier af forholdet $\frac{L'}{l'}$, ville maksimal afstanden L til Venus være udregnet til ca. $1187r_{j\text{ord}}$.

Udover de absolutte afstande udregner Ptolemaios også absolutte diametre og volumina af planeterne.³

2.2. Bog 2

I denne del præsenteres modellerne af de roterende æteriske sfærer, styrende himlens bevægelser.⁴ I figurene vil O, M og E som sædvanlig betegne hhv. Jorden, deferentcentret og equantpunktet. En østlig rotationsretning defineres som en bevægelsesretning af den øverste del af en cirkel ud af papirets plan.

Modellen for fiksstjernesfæren er vist i Fig. 2.1, ved et tværsnit indeholdende akserne $\gamma\delta$ og $\alpha\beta$ for hhv. ekliptika og ækvator.

Sfære nr.1: *Den første bevæger* (firmamentet). Denne roterer mod vest om ækvatoraksen med en periode på et døgn. Alle andre sfærer deltager i denne daglige bevægelse.

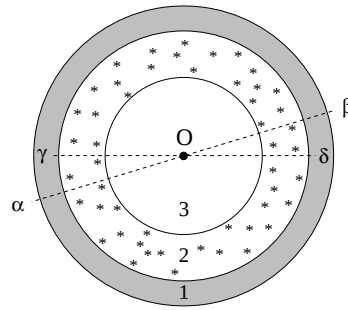
Sfære nr.2: Fiksstjernesfæren. Bevæges med sfære 1, men har samtidig rotation mod øst om ekliptikas akse relativt til sfære 1, hvorved præcessionen opstår. Kun solsfærene deltager ikke i præcessionsbevægelsen.

²Dette er vist i [Go67, s. 10–11].

³[Ne75, s. 921–922].

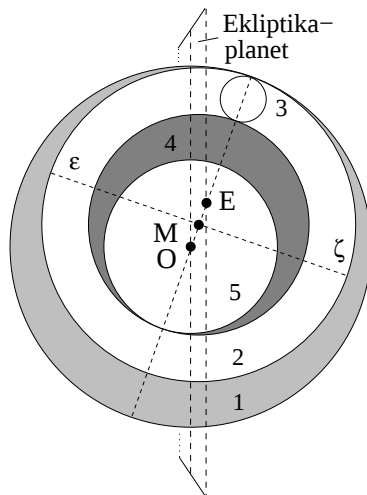
⁴Da disse modeller ikke blot strækker sig i længdegrad, men også i breddegrad, vil det blive nødvendigt at anvende elementer fra breddeteorien.

Sfære nr.3: Dette sfæriske hulrum indeholder planetsfærene (ikke vist på figuren), således at saturnsfærene ender, hvor fiksstjernesfæren begynder.

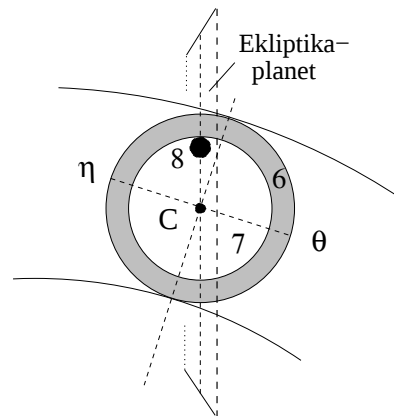


FIGUR 2.1. Fiksstjernesfæren.

Sfærene for de ydre planeter er vist i Fig. 2.2 ved et tværsnit indeholdende aksenen for sfære 2, samt linien gennem O og M. Epicyklen er vist i en forstørret udgave som et tværsnit langs samme plan, se Fig. 2.3. Det fremgår af figuren at epicyklen samt planeten er i apogæum. Ekliptikas plan er ligeledes indtegnet i overensstemmelse med, at en ydre planet i apogæum ikke samtidig antager sin maksimale breddegrad.



FIGUR 2.2.
Sfærene for ydre planet.



FIGUR 2.3.
Epicykelsfærene.

Kun sfærer med direkte indvirkning på planetbevægelserne nævnes nedenfor (Sfærene 1 og 4 sørger blot for at rummet mellem planeternes sfærer er fyldt ud. Dette gælder også for Fig. 2.5). Alle nedenstående rotationer vil foregå mod øst.

Sfære nr.2: Deferentsfæren. Roterer om aksenen $\epsilon\zeta$ med en tropisk periode. Denne rotation er uniform mht. equantpunktet E.

Sfære nr.3: Epicykelsfærene, se Fig. 2.3.

Sfære nr.5: Sfærisk hulrum som for den pågældende planets vedkommende indeholder sfærene for planeterne under den, i rækkefølgen givet ved 7. s. 5, hvor Saturn er den yderste planet.

Sfære nr.6: Den epicykelbærende sfære. Roterer om aksenen $\eta\theta$ (parallel med $\epsilon\zeta$) med samme vinkelhastighed som deferentsfæren, men i modsat retning.

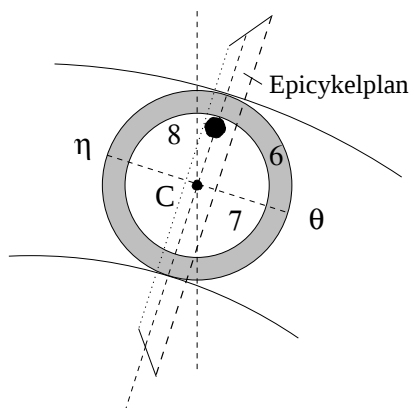
Sfære nr.7: Den solide planetbærende sfære. Deltager i bevægelsen af den epicykelbærende sfære. Roterer samtidig om akse gennem epicykelcentret C, vinkelret på ekliptikaplanet (eller rettere: en parallelforskydning af denne), således at planeten bevæges med en synodisk periode relativt til linien EC.

Sfære nr.8: Dette er planeten selv, indeholdt i den solide sfære.

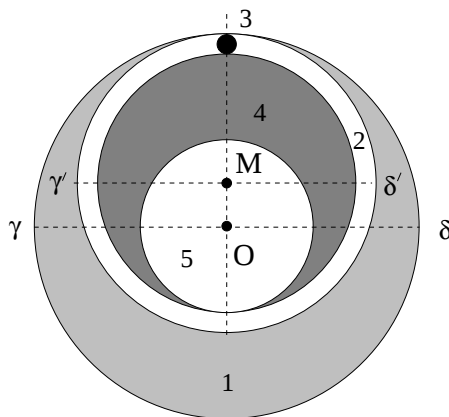
Funktionen af sfære 6 er at modvirke deferentsfærens rotation, således at planetens bevægelsesplan i epicyklen (epicykelplanet) forbliver parallel med ekliptika.

Modellen for de ydre planeter kan også benyttes for Venus, dog med flg. ændringer:

- Ekliptikaplanet i Fig. 2.2 skal stå vinkelret på papirets plan, dvs. Venus opnår sin maksimale breddegrad i apogæet.
- Rotationsaksen af den solide epicykelsfære skal gå gennem C og stå vinkelret på epicykelplanet. Skæringslinien mellem epicykelplanet og deferentplanet (epicykelcentrets bevægelsesplan) er parallel med apsidelinien. Som følge af bevægelsen af sfære 6, forbliver epicykelplanet parallel med sig selv. Epicykelsfærene er vist i Fig. 2.4.



FIGUR 2.4.
Epicykelsfærene for Venus.



FIGUR 2.5.
Solsfærerne.

Betragt solmodellen i Fig. 2.5.

Sfære nr.2: Deferentsfæren. Roterer om aksens $\gamma'\delta'$ med en periode på et tropisk år.

Sfære nr.3: Solen, fastsiddende i deferentsfæren.

Sfære nr.5: Sfærisk hulrum indeholdende sfærene for Venus, Merkur og Månen.

For god ordens skyld skal det nævnes, at breddegradsteorien fra *Hypoteserne* adskiller sig fra *Almagestens*, ved:

- For Venus: Epicykelplanet har en fast inklinations til deferentplanet.
- For ydre planeter: Epicykelplanet er parallel med ekliptikas plan.

Ptolemaios' fysiske modeller giver ingen ny forklaring på, hvordan epicykelcentret kan rotere i en cirkulær bane uniformt om et andet punkt end banens centrum. Faktisk forekommer modellerne endnu mere umulige end før, idet epicyklen er fastgjort (dog med mulighed for egenrotation) i en fysisk uforanderlig sfære roterende om egen akse, men uniformt om en anden akse, som ikke går gennem sfærens centrum. Ptolemaios' forhåbninger, om en repræsentation af modellerne i et astronomisk instrument, kan altså ikke indfries.

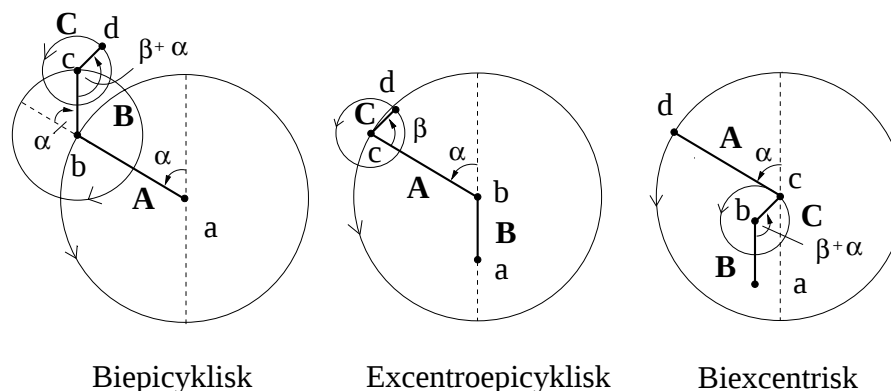
KAPITEL 3

Arabiske planetmodeller

3.1. Notation

- D: Centrum for en epicyklet og den ydre cirkel i Tusi koblingen.
 K: (a) For Shatir's planetmodel, centrum for den sekundære epicykel.
 (b) For Khafri's planetmodel, centrum for cirkel definerende bevægelsen af deferentcentret.
 (c) For Tusi, centrum af indre cirkel i Tusi koblingen.
 e : For Venus og de ydre planeter angiver den excentriciteten i ptolemæisk forstand, dvs. $e = \frac{1}{2}|\mathbf{OE}|$.

For planeterne stiftes bekendtskab med flg. ækvivalente modeltyper¹:



FIGUR 3.1

Herudover anvendes notationen fra kapitel 1.

3.2. Introduktion til arabisk astronomi

Den arabiske astronomis² historie indeholder to store perioder, hvor den første begynder i det 9'ende århundrede med overførelsen af de græske videnskaber til den arabiske verden. Denne overførelse skete i form af oversættelser af de store videnskabelige værker, heriblandt Ptolemaios' *Almagest* og *Planetære hypoteser*. Den ptolemæiske astronomi, med sin klare matematiske metode og succesfulde redegørelse for himlens fænomener, var alt andet overlegent (ptolemæisk astronomi havde i forvejen, siden dens dannelse, stået uden nævneværdig modstand og ingen fremskridt var foretaget på dette område) og dannede snart herefter grundlaget for den arabiske verdens astronomiske aktivitet. Denne aktivitet koncentrerede sig, i sin første spæde

¹Ækvivalensen følger klart efter et moderne synspunkt fra kommutativ vektoraddition af $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$.

²Med arabisk astronomi menes astronomisk litteratur skrevet på arabisk.

begyndelse, om en verificering af *Almagestens* resultater på baggrund af nye observationer. Små afvigelser i middelbevægelserne, ville i et kort tidsinterval have en neglignelig indflydelse på beregnede værdier, men fra *Almagestens* tilblivelse til dens indlemmelse i den arabiske verden, var der gået ca. 700 år, hvilket havde forstørret effekten betydeligt. En sammenligning med *Almagestens* forudsigelser afslørede derfor hurtigt afvigelser i præcessionsraten samt i visse af solteoriens parametre. Således fandt man en større værdi for præcessionsraten og en mindre værdi for ekliptikas hældning. Dette ledte til *trepidationsteorier*, som tillagde fiksstjernesfæren ekstra oscillerende bevægelser, for at forklare variationerne. Positionen af Solens apsidelinie blev fundet større end præcessionen forudsagde, hvorfor den ikke blot blev givet en bevægelse med præcessionen, men også en selvstændig østlig rotation. Solbanens excentricitet blev ligeledes fundet mindre og i kombination med apsidelinens rotation lavede Al-Zarqali (1028–1087) en solmodel, hvor deferentens centrum roterer på en lille cirkel. Disse småjusteringer af solparametrene ledte naturligvis til en granskning af Ptolemaios' metode, som bl.a. resulterede i at Ptolemaios' brug af observationer ved solhverv, blev vurderet uanvendelige pga. usikkerheden forbundet med en præcis bestemmelse af et solhverv.³ Istedet anvendtes bl.a. observationer af Solen i midten af sæsonerne (den såkaldte *fusul* metode), hvor ændringen i breddegrad sker meget hurtigere.

Afvigelserne i Ptolemaios' parametre gav således hovedsagelig anledning til kritik af hans observationer og metoder, hvorfor de geometriske modeller for planeterne bevægelse forblev intakte på et fundamentalt plan. Først omkring det 11'te århundrede havde kritikken af ptolemæisk astronomi nået et sådant niveau, at ændringer i modellerne var påkrævet. Denne type kritik kulminerede med et stort værk af Ibn Al-Haytham (ca. 965–1039) udelukkende omhandlende kritik af tre af Ptolemaios' værker: *Almagesten*, *Hypoteserne* og hans *Optik*. "*Tvivl angående Ptolemaios*", som Al-Haythams værk hedder, indeholder et meget vigtigt kritikpunkt rettet mod Ptolemaios' største opdagelse, nemlig equantpunktet. Ptolemaios' brug af cirkulære bevægelser uniformt om punkter forskellige fra deres respektive centre er et brud mod PUC, der end ikke lader sig reproducere som en fysisk virkelighed. Equantpunktet er dermed i modstrid med principperne fra *Almagesten* og *Hypoteserne*, hvorfor Al-Haytham slutter, at Ptolemaios fejlede i sit forsøg på at redegøre for de virkelige mekanismer styrende planeterne bevægelser. Den efterfølgende astronomiske udvikling var angivelig under påvirkning af Al-Haythams og lignende kritiske værker, for konstruktionen af en alternativ astronomi, blev herefter de arabiske astronomers primære mål. Al-Haythams værk markerer derfor skillelinien mellem den første og den anden store periode. Den første periode blev domineret af astronomer såsom Thabit Ibn Qurra (836–901), Al-Battani (ca. 868–929), Al-Biruni (973–1048), Al-Zarqali og kendetegnes som beskrevet ved indførelsen og korrigeringen af den ptolemæiske astronomi, uden dog at pille ved de mest fundamentale byggesten.

Kendetegnet for den anden periode er derimod netop reformationen af ptolemæisk astronomi, hvilken udviklede sig langs to forskellige linier. Den ene var en tilbagevenden til den strengt aristoteliske kosmologi, som krævede uniformt cirkulære bevægelser udelukkende om universets centrum, dvs. Jorden. Hermed blev

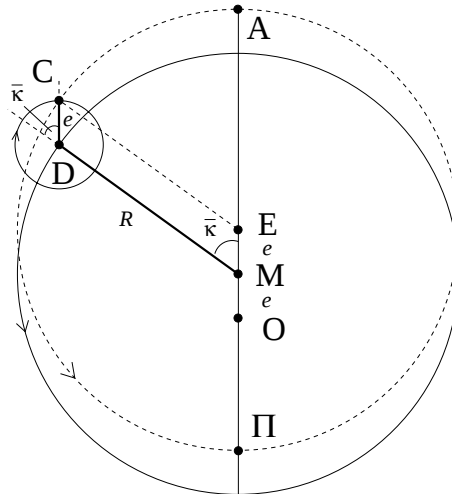
³Ved solhverv står Solen enten højest (sommersolhverv) eller lavest (vintersolhverv) på himlen, hvilket er meget svært at observere præcist, da Solens breddegrad omkring dette tidspunkt ikke ændres særligt.

excentriske cirkler og epicykler afskaffet, hvilket naturligvis ikke ledte til tilfredsstillende planetmodeller. Astronomerne i denne gruppe tæller bl.a. Al-Bitruji (d. (død) 1204) og Ibn-Rushd (1128–1198) og begrænser sig geografisk til Andalusien i Spanien.

Anden udviklingslinie var ikke som den første baseret på filosofiske uoverensstemmelser, men på en manglende matematisk sammenhæng med den fysiske virkelighed. Således var der ingen protester mod ptolemæisk kosmologi, excentriske cirkler, epicykler eller mod de parameterkorrigerede geometriske modellers resultater. Det største kritikpunkt var, ligesom for Al-Haytham, problemet med equantpunktet. Målet for disse astronomer var derfor, at udarbejde modeller adlydende PUC, som samtidig med at bevare de ptolemæiske modellers resultater, også er fysisk konsistente. Dette mål kan i sin enkelthed reduceres til løsningen af equantproblemet. Omtalte gruppe af astronomer hørte alle til i mellemøsten og refereres oftest til som medlemmer af *Maragha skolen*. Årsagen hertil skyldes at de første af denne type astronomer, blev tilknyttet observatoriet i Maragha, en by beliggende i den nordvestlige del af nutidens Iran.

I nedenstående vil jeg se på de forskellige løsningsmetoder til equantproblemet, som udsprang fra denne skole og derfor (på nær for Shatir) kun betragte den del af modellen som redegør for den 1. anomal. Alle de betragtede modeller er geometriske repræsentationer af de virkelige fysiske modeller, som alle har basis i Ptolemaios' *Hypoteser*. Det er underforstået at vektoren $\mathbf{EC}$ for en indre planet, er parallel med retningsvektoren $\mathbf{OS}$ og at vektoren $\mathbf{CP}$ (kun vist for Shatir) for en ydre planet er parallel med vektoren $\mathbf{OS}$. Alle undtagen Shatir beholder Ptolemaios' solmodel. Som udgangspunkt betragtes først en model af Abu Ubayd al-Juzjani (hører ikke til Maragha skolen).

3.2.1. Abu Ubayd al-Juzjani, d. ca. 1070. Den første man med sikkerhed ved, konstruerede en alternativ planetmodel fri for equantproblemet var Juzjani, hvis model er vist i Fig. 3.2.



FIGUR 3.2

MD: Roterer uniformt mod øst med vinkelhastigheden $\omega_{\bar{\kappa}}$ relativt til apsidelinien. $|\mathbf{MD}| = R$.

DC: Roterer uniformt mod vest med vinkelhastigheden $\omega_{\bar{r}}$ relativt til **MD**.

Effekten af dette er at **DC** forbliver parallel med apsidelinien. $|\mathbf{DC}| = e$.

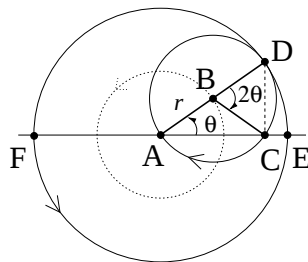
Denne excentroepicykliske model bestående af en epicyklet og en excentrisk cirkel involverer udelukkende uniforme cirkulære bevægelser og det fremgår, at epicykelcentret bevæger sig uniformt om equantpunktet i overensstemmelse med observationer.

Juzjanis løsning består altså blot i at lade equantcirklen fungere som epicykelbærer (ækvivalent med en dobbelt excentrisk model). At denne type model er utilstrækkelig, var dog allerede slået fast af Ptolemaios (se s. 22 om den foreløbige model). Modellen redegør nemlig ikke for den observerede variation i epicyklens tilsyneladende størrelse bestemt af afstanden fra O til C.⁴ En korrekt løsning indebærer altså dels en bevarelse af afstanden til epicykelcentret, givet ved deferenten, og dels en bevarelse af equantpunktet.

3.3. Maragha skolens planetmodeller

Opførelsen af Observatoriet i Maragha begyndte i 1259 under ledelse af Nasir al-Din al-Tusi og det stod færdigt i 1263. En anden astronom, Mu'ayyad al-Din al-Urdi, hjalp med konstruktionen af de astronomiske instrumenter. Både Tusi og Urdi havde, før de blev tilknyttet Maragha observatoriet, udviklet planetmodeller, fri for equantproblemet. Urdi's findes i værket *Kitab al-Hay'ah* og Tusi's i *Hall-i mushkilat-i mu'iniyya*. Der er en del usikkerhed om rækkefølgen af disse værker,⁵ men sandsynligvis blev de lavet uafhængigt af hinanden, eftersom både Tusi og Urdi mener at være først med løsningen af equantproblemet. I et senere værk *Tadhkira* fra 1260/61 fastholder Tusi denne påstand og må på dette tidspunkt have fået kendskab til Urdi's modeller, hvorfor det må formodes at Tusi var først.

3.3.1. Nasir al-Din al-Tusi, 1201–1274. For at reparere Juzjanis model skal epicykelcentret bringes tættere på den ptolemæiske deferent, samtidig med at equantpunktet bevares.⁶ Hertil anvender Tusi en mekanisme som senere er blevet kaldt Tusi koblingen, se Fig. 3.3 (notationen i figuren er uden relation til kap. 1. Den stiplede cirkel tilhører en ækvivalent form af Tusis mekanisme, se s. 61).



FIGUR 3.3. Tusi koblingen.

AD: Roterer uniformt gennem θ . $|\mathbf{AD}| = 2r$.

BC: Roterer uniformt modsat **AD** gennem 2θ . $|\mathbf{BC}| = r$.

⁴Årsagen til at Juzjani åbenbart ikke helt har indset hvorfor Ptolemaios adskilte equantpunktet fra deferentcentret, ligger nok i Ptolemaios' lidt vage forklaring på dette punkt.

⁵Se [Rg93, s. 69 + 453–454] og [Sa94.a, s. 143–160]

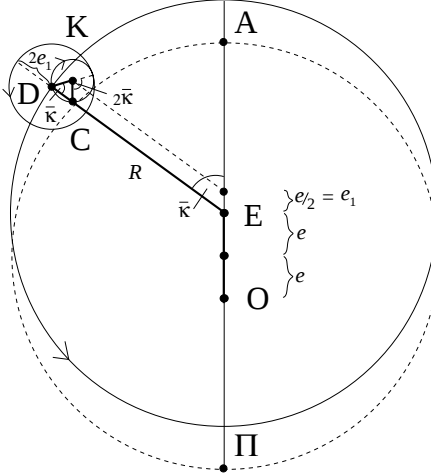
⁶For at undgå misforståelser bruges denne benævnelse for deferenten i Ptolemaios' modeller.

AC: Beskriver en retliniet oscillation omkring A mellem E og F givet ved:

$$|\mathbf{AC}| = |\mathbf{AD}| \cos \theta = 2r \cos \theta$$

Betragt Fig. 3.4.

Ved at placere Tusi koblingen for enden af en roterende radiusvektor beskrivende equantcirklen, opnås en bevægelse af C som er uniform om E, hvis afstand fra E er varierende.



FIGUR 3.4

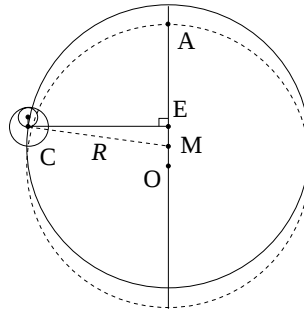
Retningsvektoren til C er givet ved flg. sum af konstant længde, uniformt roterende vektorer:

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OE} + \mathbf{ED} + \mathbf{DK} + \mathbf{KC} \quad (3.3.1)$$

OE: Definerer retningen af apsidelinien, samt excentriciteten $e = \frac{1}{2}|\mathbf{OE}|$.

ED: Roterer mod øst, uniformt om E, med vinkelhastigheden $\omega_{\bar{\kappa}}$ relativt til apsidelinien. Bærer Tusis mekanisme i endepunktet, dvs. i D. $|\mathbf{ED}| = R$.

Tusi sætter radius e_1 i den lille cirkel (AB i Fig. 3.3) til $e_1 = \frac{1}{2}e$ og giver den en rotation på $\omega_{\bar{\kappa}}$. Resultatet heraf bliver at afstandsvariationen tilpasses således at C's bane ligger meget nær den ptolemæiske deferent (stiplet linie) kun sammenfaldende i apogæet og perigæet. Den pågældende bane er dog ikke selv en perfekt cirkel, hvilket Tusi beviser i *Tadhkira* på flg. måde:⁷ Betragt Fig. 3.5 for situationen ved $\bar{\kappa} = 90^\circ$.

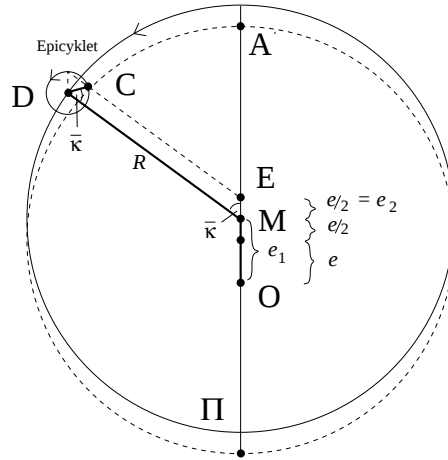


FIGUR 3.5

⁷Tusi udfører kun beviset for sin månemodell (se [Rg93, s. 206]), men det lader sig nemt overføre til de andre planeter.

I perigæum og apogæum ligger C på den ptolemæiske deferent, dvs $MC = R$. Men for f.eks. $\bar{\kappa} = 90^\circ$, er $EC = R$ og $MC > EC = R$. Ergo kan banen for C ikke være en cirkel.

3.3.2. Mu'ayyad al-Din al-Urdi, d. 1266. Urdi's løsning består i kun at overføre halvdelen af den ptolemæiske excentricitet til epicykletten, som gives samme vinkelhastighed som deferenten. Urdi's excentroepicykliske model er givet i Fig. 3.6, hvor den stiplede cirkel angiver den ptolemæiske deferent.



FIGUR 3.6

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OM} + \mathbf{MD} + \mathbf{DC} \quad (3.3.2)$$

OM: Definerer retningen af apsidelinien samt excentriciteten via $e_1 = |\mathbf{OM}| = \frac{3}{2}e$.

MD: Roterer mod øst uniformt om M med vinkelhastigheden $\omega_{\bar{\kappa}}$ relativt til apsidelinien. $|\mathbf{MD}| = R$.

DC: Roterer mod øst uniformt om D med vinkelhastigheden $\omega_{\bar{\kappa}}$ relativt til **MD**. $|\mathbf{DC}| = e_2 = \frac{1}{2}e$.

Som det fremgår, består bevægelsen af epicykelcentret udelukkende af sammensætninger af uniforme cirkulære bevægelser. Bevægelsen af C ligger meget tæt på den ptolemæiske deferent, men er kun sammenfaldende i apogæet og perigæet, hvorfor dens bane ikke er en perfekt cirkel.

Hvis man om e_1, e_2 kun ved at $e_1 > e > e_2$, kan opsplittningen $e_1 = \frac{3}{2}e$ og $e_2 = \frac{1}{2}e$ faktisk udledes under antagelsen at C ligger på den ptolemæiske deferent i apogæet og perigæet samt at **OC**'s projektion på apsidelinien, for $\bar{\kappa} = 90^\circ/270^\circ$, er lig **OE**.⁸ Dvs:

$$\mathbf{OC} = \begin{cases} e_1 + R - e_2 = R + e & \text{i apogæet.} \\ R - e_1 + e_2 = R - e & \text{i perigæet.} \end{cases} \Leftrightarrow e_1 - e_2 = e. \quad (3.3.3)$$

og

$$\mathbf{OE} = e_1 + e_2 = 2e. \quad (3.3.4)$$

Den givne opsplittning fås ved løsning af disse ligninger.

Uniformiteten mht. E følger fra paralleliteten af MD og EC.

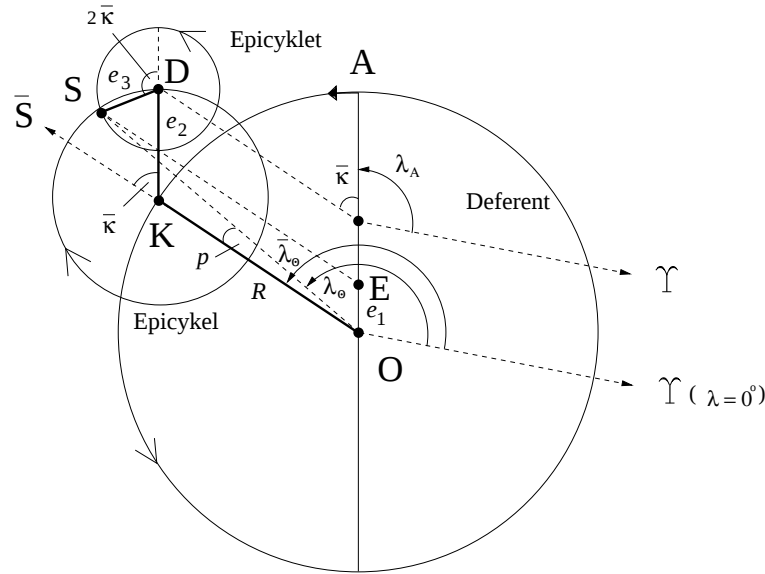
⁸Hvis Urdi anvendte disse antagelser, kunne de være motiveret fra Ptolemaios' udledning af venusmodellens geometriske parametre, hvor netop disse egenskaber bruges, se s. 14–16.

3.3.3. Ibn al-Shatir, 1304–1375. Maragha skolens kulmination indtraf med Shatirs værk, *Kitab Nihayat al-Sul fi Tashih al-Usul*, hvori nye planetmodeller præsenteres, delvist på baggrund af observationer og ikke udelukkende for at løse equant-problemet. Endvidere betragtede Shatir det som en fordel at vektoren, styrende middelbevægelsen i længdegrad, udgik fra Jorden.⁹ Det opnåede system bliver hermed ægte geocentrisk.

For alle planetsfærer finder Shatir at de deltager i præcessionen, som gives en konstant værdi på $\omega_\pi = 1^\circ/70$ eg.år. Herudover har de alle en ekstra østlig rotation relativt til fiksstjernesfæren. Dette giver alt i alt en østlig rotation af planetmodellernes apsidelinier på $\omega_A = 1^\circ/60$ eg.år relativt til Υ .

Solmodellen:

I beskrivelsen af Solens bevægelse afviger Shatir exceptionelt fra den traditionelle hipparch'ske solmodel som en konsekvens af nye observationer. Således findes, at Solens tilsyneladende diameter har en større variation end forudsagt.¹⁰ Netop derfor skal der tages hensyn til denne parameter i en model for Solen. Dette gøres ved indførelsen af en epicykel, men istedet for at lade denne rotere på en excentrisk deferent, transformerer Shatir excentriciteten til en epicykel roterende på en geocentrisk deferent. Shatirs model som er vist i nedenstående figur, er således en biepicyklisk model.



FIGUR 3.7. Shatirs solmodel.

$$\mathbf{OS} = \mathbf{OK} + \mathbf{KD} + \mathbf{DS} \quad (3.3.5)$$

OK: Roterer mod øst uniformt om O med $(\omega_\odot, T_\odot)$ relativt til Υ . $|\mathbf{OK}| = R$.

⁹Shatir kritiserede Urdi for hans brug af excentriske cirkler.

¹⁰Ptolemaios' solmodel giver afstanden fra Jorden til Solen en relativ variation mellem $62;30^p$ og $57;30^p$. Dette giver en, iflg. Ptolemaios, negligibel variation, på ca. $0;2,43^\circ$, af Solens tilsyneladende diameter, hvorfor denne holdes konstant på den observationelt bestemte værdi $0;31,20^\circ$, (se [To84, s. 251–254]).

Han nævner dog visse observationsresultater, som uden tvivl har dannet grundlaget for udledelsen af e_1 og e_2 . Disse er gengivet nedenfor¹¹:

(1.) Solens tilsyneladende diameter: $\begin{cases} 0; 29, 5^\circ & \text{i apogæum} \\ 0; 32, 32^\circ & \text{i middelfastanden} \\ 0; 36, 55^\circ & \text{i perigæum.} \end{cases}$

Med en middelfastand på 60^p svarer dette til:

$$|\mathbf{OS}| \approx \begin{cases} 60^p \cdot 0; 32, 32^\circ / 0; 29, 5^\circ \approx 67; 7^p & \text{i apogæum} \\ 60^p \cdot 0; 32, 32^\circ / 0; 36, 55^\circ \approx 52; 53^p & \text{i perigæum.} \end{cases} \quad (3.3.8)$$

(2.) Centret E (equantpunktet) for Solens uniforme bevægelse er via fusul metoden bestemt til:

$$\text{OE} = e_1 = 2; 7^p.$$

Shatir opgiver ingen observationer, men henviser til et tidligere værk, der endnu ikke er lokaliseret.

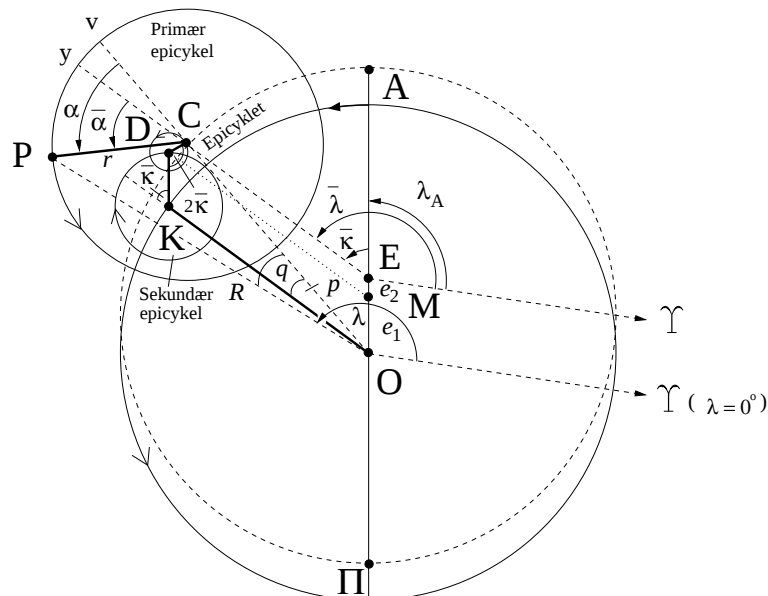
Hvis disse resultater skal gengives af modellen i Fig. 3.7, skal dens parametre opfylde flg. betingelser:

1. $e_2 + e_3 = 7; 7^p \Rightarrow$ Afstanden $|\mathbf{OS}|$ opfylder 3.3.8.
2. $e_2 - e_3 = e_1 = 2; 7^p \Rightarrow$ Bevægelsen af S bliver uniform om E.

Shatirs værdier for e_2 og e_3 givet i tabel 3.1 er præcist løsningen til ovenstående betingelser.

Model for Venus og ydre planeter:

Som model for de resterende planeter anvender Shatir, Urdi's model med en transformeret excentricitet, se Fig. 3.10. At vælge netop denne løsning, er med til at harmonisere systemet, idet modellen for 1.anomali nu konstruktionsmæssigt er identisk med solmodellen.



FIGUR 3.10

¹¹Bemærk at Shatirs model giver en variation af Solens tilsyneladende diameter på ca. $0;8^{\circ}$, hvilket er noget større end den virkelige variation på ca. $0;1^{\circ}$.

Fortegnet for p og q er givet fra hhv. 1.3.8 og 1.3.9.

Udledning af geometriske parametre:

Modellernes parametre er givet i tabel 3.2.

Planet	Geometriske parametre			Kinematiske parametre	
	e_1 p	e_2 p	r p	$\omega_{\bar{\lambda}}$ $^{\circ}/\text{eg.}\ddot{\text{a}}\text{r}$	$\omega_{\bar{\alpha}}$ $^{\circ}/\text{eg.}\ddot{\text{a}}\text{r}$
Saturn	5;7,30	1;42,30	6;30	12;12,39,53,55	-
Jupiter	4;7,30	1;22,30	11;30	30;19,32,58,43	-
Mars	9;0	3;0	39;30	191;16,10,55,55	-
Venus	1;41	0;26	43;33	-	225;1,48,0,0

TABEL 3.2

Der ses at de ydre planeter alle opfylder betingelserne 3.3.3 og 3.3.4 fra side 42, hvorfor e_1 og e_2 er en opsplitning af Ptolemaios' $2e$ i forholdet 3:1. Nyere observationer har vist at $2e = |\mathbf{OE}| = 2;7^p$ for Venus, istedet for Ptolemaios' $2;30^p$.¹² Man skulle nu tro at Shatir ville splitte denne værdi således at $e_1 = \frac{3}{4} \cdot 2e \approx 1;35,25^p$ og $e_2 = \frac{1}{4} \cdot 2e \approx 0;31,45^p$, men dette er ikke tilfældet. Shatirs opsplitning givet i tabel 3.2 kan udledes fra flg. betingelser:

1. $e_1 - e_2 = 1;15^p \Rightarrow \mathbf{C}$ befinder sig på den ptolemæiske deferent i A og Π .
2. $e_1 + e_2 = 2;7^p \Rightarrow \mathbf{OC}$'s projektion på apsidelinien er lig $\mathbf{OE}$ i kvadraturene.

På trods af af 1. øger Shatir den ptolemæiske epicykels radius fra $43;10^p$ til $43;33^p$, hvilket interessant nok svarer til en forøgelse på $2;30^p - 2;7^p = 0;23^p$. Hvad der ligger til grund for den anderledes opsplitning og den større epicykelradius, kan der kun gisnes om, men hvis han anvendte betingelse 1. kan epicyklens radius næsten kun være bestemt observationelt. Det skal bemærkes, at de anvendte modeller ikke kræver nye løsningsmetoder i forhold til Ptolemaios, når værdien for $2e$ og r skal bestemmes. Bemærk endvidere at Shatirs saturnmodel giver et problem idet $r = 6;30^p < 6;50^p = e_1 + e_2$, hvilket i termer af fysiske sfærer må betyde at den planetbærende epicykelsfære nødvendigvis gennemskærer den mindre sekundære epicykelsfære.

Epokeværdierne er givet i tabel 3.3.

Planet	Epokeværdier		
	$\bar{\lambda}(t_0)$ $^{\circ}$	$\bar{\alpha}(t_0)$ $^{\circ}$	$\lambda_A(t_0)$ $^{\circ}$
Saturn	157;58,20	-	254;52
Jupiter	272;6,10	-	180;52
Mars	292;0,0	-	137;52
Venus	-	320;50,19	77;52

TABEL 3.3

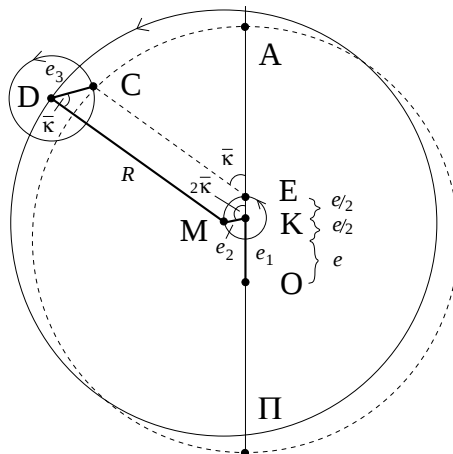
¹²F.eks. angiver Al-Zarqali $2e = 2;6,44^p$.

Shatir angiver oprindeligt middelbevægelsen for deferenten og epicyklen i enheden $^{\circ}/dg$, se tabel 3.4. I tabel 3.1 og 3.2 er middelbevægelsen for deferenten og epicyklen angivet i $^{\circ}/eg.\text{år}$.

Planet	$\omega_{\bar{\lambda}}$ $^{\circ}/dg$	$\omega_{\bar{\alpha}}$ $^{\circ}/dg$
Saturn	0;2,0,26,17,5	-
Jupiter	0;4,59,6,14,35	-
Mars	0;31,26,29,44,32	-
Venus	-	0;36,59,28,26,18,4,56
Solen	0;59,8,9,51,46,57,32,3	-

TABEL 3.4

3.3.4. Shams al-Din al-Khafri, d. efter 1525. I et kommenterende værk, af Khafri, til Tisis *Tadhkira*, kaldet *al-Takmila fi sharh al-tadhkira*, præsenteres en ikke-ptolemæisk planetmodel (vist i Fig. 3.13) i henhold til Maragha-skolens tradition. Khafri var derfor den sidste (så vidt man ved) Maragha astronom til at udvikle en planetmodel før udgivelsen af Copernicus', *De Revolutionibus*. Betragt Fig. 3.13.



FIGUR 3.13

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OK} + \mathbf{KM} + \mathbf{MD} + \mathbf{DC} \quad (3.3.13)$$

OK: Definerer retningen af apsidelinien samt excentriciteten $e_1 = |\mathbf{OK}| = \frac{3}{2}e$.

KM: Roterer mod øst uniformt om K med $(2\omega_{\bar{\kappa}}, \frac{1}{2}T_{\bar{\kappa}})$ relativt til apsidelinien.

$|\mathbf{KM}| = e_2 = \frac{1}{2}e$.

MD: Har uniform rotation om M mod øst med $(\omega_{\bar{\kappa}}, T_{\bar{\kappa}})$ relativt til apsidelinien.

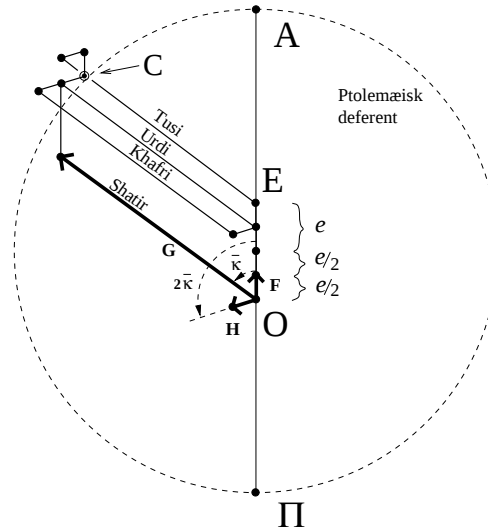
$|\mathbf{MD}| = R$.

DC: Roterer mod øst uniformt om D med $(\omega_{\bar{\kappa}}, T_{\bar{\kappa}})$ relativt til **MD**. $|\mathbf{DC}| = e_3 = e$.

Denne model er ækvivalent med de andre Maragha modeller (se Fig. 3.14) og det er uklart om Khafri, udover ækvivalensen, har haft andre begrundelser for modellen.

Det er plausibelt, at han i virkeligheden blot har villet vise med hvilken mangfoldighed af ækvivalente modeller, planeternes bevægelse kan beskrives. F.eks. angiver han ikke mindre end fire modeller for Merkur uden dog at foretrække en bestemt af dem.

I Fig. 3.14 er Maragha modellerne for 1.anomali afbildet med ens parametre.



FIGUR 3.14

Der ses at modellerne kan udtrykkes som en sum af de tre retningsvektorer $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ og $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{OC} = \begin{cases} 4\mathbf{F} + \mathbf{G} - \mathbf{H} - \mathbf{F} & \text{for Tusi} \\ 3\mathbf{F} + \mathbf{G} - \mathbf{H} & \text{for Urdi} \\ \mathbf{G} + 3\mathbf{F} - \mathbf{H} & \text{for Shatir} \\ 3\mathbf{F} + \mathbf{H} + \mathbf{G} - 2\mathbf{H} & \text{for Khafri} \end{cases}$$

Modellernes ækvivalens følger af at vektoraddition er kommutativ.

KAPITEL 4

Copernicus' planetmodeller i *Commentariolus*

4.1. Notation

$\bar{S}$: Middelsolen. Har samme betydning som før, bortset fra at den her er centrum for jordbanen.

R : Jordbanens radius.

r : Radius af deferenten for en planet.

K : Centrum for epicykel.

A_h : Aphelion,

(a) For solmodellen, punktet i jordbanen længst fra Solen.

(b) For indre/ydre - planetmodeller, punktet på deferenten hvor planeten er længst fra middelsolen.

Π_h : Perihelion, for Jorden og ydre/indre planeter, det punkt på hhv. jordbanen og deferenten hvor de er nærmest middelsolen.

$\star$: Betegner en vilkårlig stjerne i zodiakken.

Herudover benyttes notationen fra de foregående kapitler, hvor de seneste kapitler prioriteres højest.

4.2. Introduktion

At visse himmelfænomener kan beskrives ækvivalent, som en bevægelse af Jorden var allerede kendt af Ptolemaios. En bevægelig Jord var dog så absurd en anskuelse, at Jordens ubevægelighed indgik som en grundlæggende hypotese i næsten enhver seriøs kosmologi. Sammenholdt hermed blev himmellegemernes bevægelse beskrevet ved geocentriske modeller. Gennem fremsættelsen af fyldestgørende *heliocentriske* modeller blev Copernicus den første til seriøst at bryde med forestillingen om en statisk Jord. Copernicus beskriver sit nye heliocentriske system tilbundsgående i værket *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (se kap. 5) fra 1543. Som en forsmag herpå, giver han en kort præsentation af sine modeller i et lille skrift, kaldet *Commentariolus*, fra omkring 1510.¹

I introduktionen til *Commentariolus* udtrykker Copernicus sin utilfredshed med, at Ptolemaios' brug af equantpunktet strider mod PUC. De ptolemæiske modeller virker for Copernicus derfor ikke perfekte nok eller tilstrækkeligt i overensstemmelse med fornuften. Da PUC er en konsekvens af opfattelsen af planeterne som båret af roterende materielle sfærer, kan Copernicus' protester være et udtryk for, at han selv tror på sfærenes materialitet og derfor ønsker samhörighed med denne opfattelse. Bruddet med PUC angives endvidere som den direkte årsag til at han begyndte at overveje alternative planetmodeller. Det er derfor sandsynligt (se kap 5, afsnit 5.7) at han udarbejdede sine modeller dels i overensstemmelse med PUC og dels i overensstemmelse med sfærenes materialitet.

¹Se [Ro85, s. 75–80] om dateringen af *Commentariolus*.

Copernicus' system bygger på nedenstående syv postulater, som dog ikke er nødvendige for at løse equantproblemet. Derimod elimineres koncentriske og geocentriske/geo-heliocentriske systemer af hhv. postulat 1. og postulat 2. De resterende postulater leder til et heliocentrisk system.

1. Der findes ikke et fælles centrum for de himmelske sfærer.
2. Jordcentret er ikke universets centrum, kun gravitationens og månesfærens.
3. Alle planetsfærene omkredser Solen som var den i midten af dem alle. Universets centrum ligger derfor nær Solen.²
4. Forholdet mellem afstanden til Solen og afstanden til fiksstjernesfæren er så meget mindre end forholdet mellem Jordens diameter og afstanden til Solen, at afstanden til Solen er ubetydelig sammenlignet med afstanden til fiksstjernesfæren.³
5. Enhver tilsyneladende bevægelse af fiksstjernesfæren skyldes en bevægelse af Jorden.
6. Enhver tilsyneladende bevægelse af Solen skyldes bevægelsen af Jorden og den sfære som fører os rundt om Solen.
7. Planeternes tilsyneladende retrogradation, skyldes Jordens bevægelse.

Planet	Omløbstid år
Saturn	30 år
Jupiter	12 år
Mars	23 mdr.
Jorden	1 år
Venus	9 mdr.
Merkur	3 mdr.

TABEL 4.1. Omløbstiderne er rundet op til nærmeste hele tal. For Venus burde denne værdi være angivet til 8 mdr.

Ved ombytningen af Jorden med Solen som universets centraltliggende ubevægelige legeme, bliver rækkefølgen af planetsfærene fra Solen: Merkurs, Venus', Jordens, Mars', Jupiters og Saturns. Månesfæren roterer om Jorden. Yderst og omsluttende planetsfærene, ligger den ubevægelige fiksstjernesfære. Planeternes ordning korresponderer nu med deres omløbstid om Solen, således at jo større afstand fra Solen jo længere omløbstid, se tabel 4.1. Bemærk endvidere at idet Copernicus nu kan sige at jordbanen (og ikke kun Jordens radius, som Ptolemaios angav) er meget mindre end fiksstjernesfæren, kan denne vurderes meget større end i det ptolemæiske univers. En anden konsekvens af det nye arrangement er en flerfoldig bevægelse af Jorden⁴:

1. bevægelse: Det årlige omløb om Solen.
2. bevægelse: Den daglige rotation om egen akse.
3. bevægelse: Jordaksens bevægelse, hvorved præcessionen opstår.

²Af modellerne fremgår det, at Copernicus betragter middelsolen, dvs. centret for jordbanen, som universets centrum.

³Da der ikke kan måles en parallakse til fiksstjernerne, til trods for at stjernepositioner kan måles fra forskellige steder i jordbanen, er dette postulat nødvendigt.

⁴Idet Jorden nu er en planet, må dette betyde den aristoteliske æters endeligt, en konsekvens Copernicus undlader at bemærke.

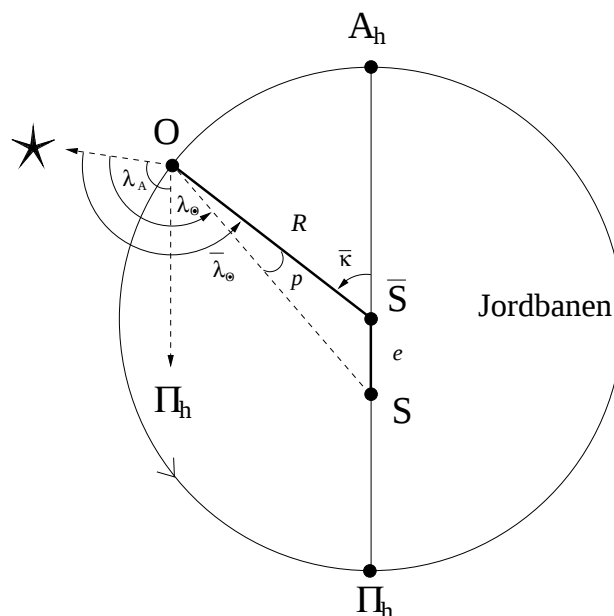
Detaljerne omkring den 3. bevægelse har Copernicus ikke fået på plads endnu. Det fremgår at han ved så meget som pkt. 10.a, s. 58 samt at jordaksens bevægelse er underlagt en mindre variation, hvorfor præcessionen og dermed de tropiske perioder er varierende. Som følge heraf anbefaler Copernicus, at man istedet måler de konstante sideriske perioder, dvs. perioder relativt til fiksstjernerne. Hvis Copernicus, som følge af det variable tropiske år og den komplicerede præcession, ønskede at skifte referencepunkt og dette inden han begyndte at tænke i heliocentriske baner, da ville det være naturligt at lade Jorden være skyld i præcessionsbevægelsen istedet for fiksstjernesfæren.

4.3. Planetmodellerne

Copernicus' beskrivelse af planetmodellerne ledsages ikke af nogen forklarende figurer eller matematiske udredninger, hvilket udsættes til et større planlagt værk (sandsynligvis *De Revolutionibus*). I nedenstående tilføjes dog både figurer og en smule forklarende matematik. For alle modellerne er apsidelinien siderisk fast og for Venus og Jorden er de sammenfaldende.

Da Copernicus endnu ikke har nogle nye observationer til rådighed, beregner han de geometriske parametre fra de *Alfonsinske tabeller* (og evt. andre værker) som er udledt på basis af de ptolemæiske modeller. Copernicus finder altså reelt de ptolemæiske parametre og overfører disse til hans egne modeller. Da apsidelinierne er siderisk faste kan apogæets position målt fra en given stjerne med tropisk længdegrad $\lambda_{\star}^{\Upsilon}$ beregnes ved $\lambda_A^{\Upsilon} - \lambda_{\star}^{\Upsilon}$, hvor apogæets tropiske længdegrad λ_A^{Υ} og stjernens position findes fra bl.a de *Alfonsinske tabeller*.⁵

4.3.1. Solmodellen.



FIGUR 4.1

⁵Længdegrader og vinkelhastigheder regnet fra Υ (dvs. de tropiske værdier), mærkes herefter med et index Υ .

DP: Roterer mod øst uniformt om D med $(2\omega_{\odot}, \frac{1}{2}T_{\odot})$ relativt til $\star$. $|\mathbf{DP}| = e_2 = \frac{1}{3}e_1$.

Shatirs model (se Fig. 3.10, side 45) opnås ved, i Fig. 4.2, at flytte vektoren $\bar{\mathbf{S}}\mathbf{K}$ til P. De to modeller afviger geometrisk, kun ved summationsordnen af vektorene i modellen og er derfor ækvivalente.

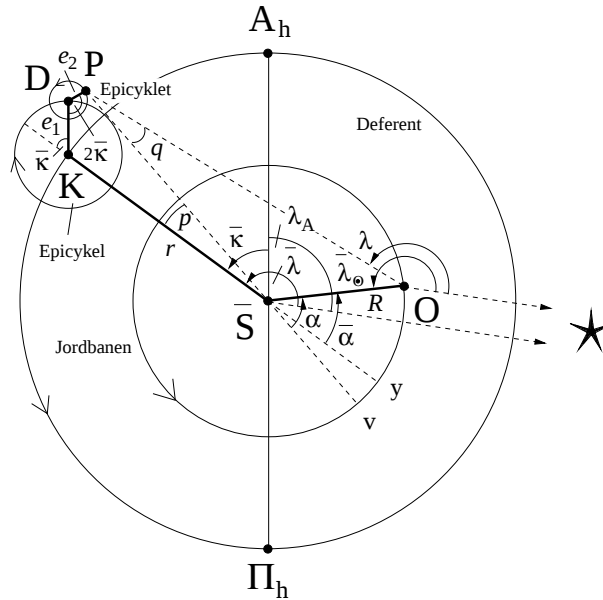
Den sande længdegrad af Venus udtrykkes ved:

$$\boxed{\lambda = \bar{\lambda}_{\odot} + p + q} \quad (4.3.4)$$

Hvor p og q er givet ved hhv. 3.3.11 og 3.3.12 fra Shatirs model.

4.3.4. Udderelse af geometriske parametre. Forudsat ens apsidelinier er bevægelsen af epicykelcentret i Ptolemaios' model intet andet end bevægelsen af Solen i en solmodel med et equantpunkt. For Ptolemaios' venusmodel gælder derfor: $\tan 1/2p_{max} = e(\text{Sol})/R \Rightarrow 2e = 2R \tan 1/2p_{max}$ (Copernicus anvender istedet, med en mindre fejl til følge $2e = R \sin p_{max}$ som gælder for solmodellen). Med $p_{max} = 2; 10^\circ$ fås nu at venusmodellens $2e$ er lig $1^p \Rightarrow e_1 = \frac{3}{4}$ og $e_2 = \frac{1}{4}$. r beregnes fra Ptolemaios' model i situationen hvor epicyklen er i middelafrstand fra O, dvs. hvor $|\mathbf{MC}| = |\mathbf{OC}|$. Da q i en given situation er maksimal når $\mathbf{CP} \perp \mathbf{PO}$ (notationen hører til Fig. 1.6) er radius af den ptolemæiske epicykel derfor lig $r = R \sin q_{max}$, hvilket med $R = 25^p$ og $q_{max} = 45; 59^\circ$ giver at $r \approx 18^p$.

4.3.5. Model for ydre planeter.



FIGUR 4.3

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OS} + \bar{\mathbf{S}}\mathbf{K} + \mathbf{KD} + \mathbf{DP} \quad (4.3.5)$$

OS: Se modellen for Solen.

$\bar{\mathbf{S}}\mathbf{K}$: Roterer mod øst uniformt om $\bar{\mathbf{S}}$ med $(\omega_{\bar{\lambda}}, T_{\bar{\lambda}})$ relativt til $\star$. $|\bar{\mathbf{S}}\mathbf{K}| = r$.

$\mathbf{KD}$: Definerer retningen af apsidelinien. $|\mathbf{KD}| = e_1$. Roterer mod vest, uniformt om K med $(\omega_{\bar{\lambda}}, T_{\bar{\lambda}})$ relativt til $\bar{\mathbf{S}}\mathbf{K}$.

DP: Roterer mod øst uniformt om D med $(2\omega_{\bar{\lambda}}, \frac{1}{2}T_{\bar{\lambda}})$ relativt til $\star$. $|\mathbf{DP}| = e_2 = \frac{1}{3}e_1$.

Copernicus' model er her atter blot Shatirs model for 1.anomali med epicyklen flyttet til centrum af deferenten. Forskellen mellem de to modeller er at Shatir adderer vektoren $\mathbf{O\bar{S}}$ til sidst hvor Copernicus begynder med denne (herudover er deferentcentret naturligvis identificeret som middelsolen). R og r er således hhv. epicyklens og deferentens radier i den ptolemæiske model. Den sande længdegrad af planeten er givet ved:

$$\boxed{\lambda = \bar{\lambda} + p + q} \quad (4.3.6)$$

hvor p og q er givet ved samme udtryk som for venusmodellen, blot skal r og R byttes rundt.

4.3.6. Udledning af geometriske parametre. Copernicus angiver her hverken p_{max} eller q_{max} . Ved brug af de *Alfonsinske tabeller* kan parametrene dog reproducere for $R = 25^p$:

Som for Venus findes q_{max} fra Ptolemaios' model med $|\mathbf{OC}| = |\mathbf{MC}|$. Dette giver at radius af den ptolemæiske epicykel er lig $R = r \sin q_{max}$, hvor r = radius i ptolemæisk deferent.

⇓

$$r = \frac{R}{\sin q_{max}} \quad (4.3.7)$$

I Ptolemaios' model indtræder p_{max} når $\mathbf{EC} = \mathbf{OC}$, dvs. når $\mathbf{MC}$ står vinkelret på apsidelinien. Så:

$$\tan 1/2p_{max} = e/r \Rightarrow 2e = 2r \tan 1/2p_{max}.$$

Copernicus anvender igen fejlagtigt $2e = r \sin p_{max}$, som derfor giver værdier afvigende i mindre grad fra den ptolemæiske værdi.

Da $e_1 + e_2 = 2e$, udregnes $e_1 = \frac{3}{4} \cdot 2e$ og $e_2 = \frac{1}{4} \cdot 2e$. Resultaterne for Venus og de ydre planeter er afbildet i nedenstående tabel for $R = 25^p$.

Planet	r p	e_1 p	$e_2 = 1/3e_1$ p	λ_A
Saturn	230;50	19;41	6;34	nær h^2 -Sag.
Jupiter	130;25	10;6	3;22	8° øst for β -Leo
Mars	38	5;34	1;51	$6;30^\circ$ vest for α -Leo
Venus	18	0;45	0;15	10° vest for Pollux

TABEL 4.2

I tabellen ses en af det nye systems helt store fordele, nemlig at det muliggør en absolut bestemmelse af solsystemets dimensioner (givet ved planeterne afstand til middelsolen) i enheder af jordbanens radius.

Copernicus' planetmodeller i *De Revolutionibus*

5.1. Modellernes fundament

5.1.1. Kosmologi. Hvor Ptolemaios forsøgte at lave en kosmologi i overensstemmelse med himmellegemernes bevægelse som set fra en ubevægelig Jord, går Copernicus et skridt videre og ændrer denne kosmologi ud fra økonomiske og relativistiske betragtninger af himlens bevægelser. Grundet universets kolossale størrelse er det for Copernicus absurd, at det er det enorme firmament, som ved sin rotation forårsager den daglige bevægelse, især da den selvsamme bevægelse fremkommer ved at lade Jorden rotere om sin egen akse. Da det aristoteliske princip om Jordens ubevægelighed hermed er brudt, kan Jorden ligeså godt gives endnu en bevægelse nemlig rotation om Solen og dermed betragtes som et af himlens legemer på lige fod med de fem andre planeter. Solen overtager således Jordens plads som universets centrum, en selvfølgelighed som Copernicus så smukt udtrykker på flg. vis:

*For hvem i dette smukkeste af templer kan placere denne lampe på et andet eller bedre sted end dette, hvorfra den kan oplyse alt på samme tid.*¹

Dette nye arrangement giver en mere naturlig forklaring på planeternes retrogradation som en tilsyneladende bevægelse skyldet Jordens bane om Solen, se s. 58, ad. 3. Fra det nye system udspringer dermed en besparelse i modellerne, som fritages fra deres ptolemæiske epicykler. Præcessionen kan ligeledes forklares ved bevægelser af Jorden, hvormed fiksstjernesfæren gøres ubevægelig. Da den daglige bevægelse er frtaget den 9'ende sfære, afskaffes denne fuldstændigt og universet er pludselig blevet en del mere økonomisk.

Følgende fundamentale antagelser kan udtrækkes fra *De Revolutionibus* (bog 1).

Hypoteser om den sfæriske form:

1. Rotation er naturligt for et sfærisk legeme.
2. Gravitation er en naturlig tendens af dellegemer til at samle sig i formen af en globe. Planeterne har derved naturligt en globeform.

Hypoteser om himlens legemer:

3. Universet og himlens legemer er sfæriske.
4. Solen ligger ubevægeligt i universets centrum.
5. Hver planet (Solen undtaget) er tilknyttet individuelle uniformt roterende sfærer (hvor de største, planetsfærene, omslutter Solen), styrende planeternes bevægelse i zodiakken. Der fås heraf at planeterne bevæger sig omkring Solen i baner sammensat af jævnt cirkulære bevægelser (PUC).
6. Udenom planetsfærene ligger fiksstjernesfæren urørligt fast. Tykkelsen af denne sfære er ukendt, men kan være uendelig.²

¹Citat fra [Ro78, s. 22].

²Copernicus accepterer muligheden for at universet er uendeligt stort, men erkender at dette ikke kan fastslås og overlader derfor svaret i hænderne på naturfilosofferne.

7. Rækkefølgen af planeterne er fra Solen: Merkur, Venus, Jorden (og omkring denne, — Månen), Mars, Jupiter og Saturn. Denne rækkefølge følger planeterne stigende omløbstider.

Hypoteser om Jorden:

8. Jorden er en planet.
9. Foruden rotation om Solen, roterer Jorden om egen akse og skaber derved den tilsyneladende daglige rotation af himlen.
10. Jordaksen har en tofoldig bevægelse givet ved:
 - a. En rotation mod vest med en omløbstid på et middel tropisk år $T_{\odot}^{\Upsilon} < T_{\odot}$ det sideriske år (hvis de to omløbstider var ens, ville jordaksens retning være uforanderlig), således at jordaksen peger mod en middelækvatorial nordpol, som i løbet af en periode på $T_{\pi} = \frac{360^{\circ}}{\omega_{\pi}}$, hvor $\omega_{\pi} = \omega_{\odot}^{\Upsilon} - \omega_{\odot}$, fuldfører et omløb om ekliptikas akse. Resultatet af denne bevægelse er en langsom vestlig flytning af ækvators skæringspunkter med ekliptika (dvs. middelpræcessionen), se Fig. 5.1.
 - b. Ovenstående rotation er underlagt en lille variation omkring den før omtalte middelpol. Variationen giver en periodisk variation af ekliptikas hældning og præcessionsraten.
11. Afstanden fra Jorden til universets centrum er ubetydelig i forhold til universets ufattelige størrelse.

På grund af 10. og 6. fravælger Copernicus forårspunktet som nulpunkt for den ekliptiske længdegrad og vælger istedet fiksstjernen γ -Aries (også kaldet vædderpunktet), som punktet hvorfra de nu sideriske længdegrader angives. Hermed behøver man kun at tage præcessionsbevægelsen i betragtning i forbindelse med tropiske størrelser.

5.1.2. Fænomener. Copernicus kan iagttage præcis samme fænomener som Ptolemaios, hans fortolkning af disse er dog betydelig anderledes. Betragt fænomenerne s. 6–7.

- ad.2: Copernicus anser ikke præcessionen for uniform og dermed er det tropiske år ikke konstant. Grundet planeterne ikke-uniforme sideriske omløb vælger Copernicus, som Ptolemaios, en excentrisk cirkel.
- ad.3: Den retrograde bevægelse er en tilsyneladende bevægelse skyldet Jordens bane om Solen. For de ydre planets vedkommende forekommer den retrograde bevægelse når de overhales indenom af Jorden og for de indre når disse overhaler Jorden indenom. I Ptolemaios' modeller giver Jordens bevægelse således en afspejling i de ydre planets epicykler og i de indre planets deferenter. De indre planets epicykler er blot deres egen bane om Solen.
- ad.4-7: Er en naturlig konsekvens af det nye system, dog får relationen i [5.] også et udtryk for de indre planeter.

$$Y = \begin{cases} E + S & \text{ydre planeter} \\ E - S & \text{indre planeter} \end{cases} \quad (5.1.1)$$

dvs. i løbet af Y sideriske år (Y sideriske jordomløb) udfører planeten E sideriske omløb og indhentes af/indhenter Jorden S gange.

- ad.8: Copernicus kan heller ikke observere nogen parallaxse, men kan som følge af sit system beregne en planets middelf afstand til Solen i enheder af Jordens

middelafstand, se s. 83. I sine udregninger sætter Copernicus radius i planetbanerne til 10000^p , foranlediget af hans kordetabel (bog 1,XII), som udover at være udregnet på basis af cirkler med radius 100000^p adskiller sig fra Ptolemaios' ved at angive *halve korder til den dobbelte buevinkel*, hvilket rent faktisk er sinus til vinklen. En henvisning til 1.1.1 betyder herefter en anvendelse af Copernicus' kordetabel.

5.1.3. Notation. De betegnelser der ikke nævnes her, har samme betydning som i det af de tidligere kapitler hvor de senest blev anvendt.

$\bar{\Upsilon}$: Middelforårspunktet.

Γ : γ -Aries første fiksstjerne i stjernebilledet Aries (vædderen).³

$\bar{A}_h$: Middellaphelion.

$\bar{\Pi}_h$: Middelperihelion.

M: (a) For solmodellen, centrum for den lille cirkel definerende bevægelsen af middellaphelion.

(b) For venusmodellen, centrum for lille cirkel definerende bevægelsen af deferentcentret.

(c) For ydre planet, centrum for deferenten.

C: (a) For Venus, centrum for deferenten.

(b) For ydre planet, centrum af epicykletten.

v: For Venus, punktet på deferenten længst fra Jorden ved en givet konfiguration.

For ydre planet er det punktet i jordbanen længst fra den ydre planets position.

y: Ovenstående middelværdi.

u: Punktet i jordbanen diametralt modsat y.

I teksten:

t_0 : Betegner en af Copernicus' epoker, dvs:

Nr.	Epoke	Δt
1	Olympiad 1	0
2	Alexander 1	451 eg.år og 247 dg
3	Cæsars kalender reform 1	278 eg.år og $118\frac{1}{2}dg$
4	Kristus (år 1)	45 eg.år og 12 dg

TABEL 5.1

³ γ -Aries lå på Ptolemaios' tid ca. $6;40^\circ$ øst for forårspunktet, iflg. Ptolemaios' stjernekatolog.

5.2. Copernicus' præcessionsteori

Copernicus' klare fordel i forhold til tidligere astronomer var rådigheden over en meget større mængde af observationer fordelt på et tidsinterval på over 1800 år. Langtidseffekter i bevægelsen af himlens legemer som var skjult (eller ikke studeret ordentligt) for Ptolemaios, blev således synlige for Copernicus. En af disse langtidseffekter er forårspunktets præcession og variationen af denne. Copernicus behandler præcessionsteorien sammen med solteorien i bog 3.

5.2.1. Observationsgrundlag. Fra observationer af bestemte fiksstjerner, foretaget på tidspunkter rangerende fra Timocharis år -294 til Copernicus i 1525, findes gennemsnitlige værdier af præcessionsraten ω_π i de forskellige tidsperioder (disse afrundes til hele antal eg.år), se tabel 5.2.

Nr.	Periode	Δt eg.år	$\Delta \lambda$ °	ω_π
1	Timocharis – Ptolemaios	432	4;20	$1^\circ/100$ år
2	Hipparch – Ptolemaios	266	2;40	$1^\circ/100$ år
3	Menelaus – Battani	782	11;55	$1^\circ/66$ år
4	Ptolemaios – Battani	741	11;30	$1^\circ/65$ år
5	Battani – Copernicus	645	9;11	$1^\circ/71$ år

TABEL 5.2. Timocharis, fra det 3.århundrede fvt, Menelaus (ca.70 – ca.130).

Der ses at præcessionsraten er gået fra lav til høj og til lav igen. Til undersøgelsen af ekliptikas hældning ϵ anvender Copernicus flg. data:

Astronom	Dato t	Δt eg.år	ϵ °
Aristarch	-279	0	23;51,20
Ptolemaios	140	419	23;51,20
Battani	880	740	23;35
Al-Zarqali	1070	190	23;34
Prophatius	1300	230	23;32
Copernicus	1515	215	$\leq 23;28,30$

TABEL 5.3. Aristarch (ca.310 – ca.230 fvt). Prophatius (1236 – 1312).

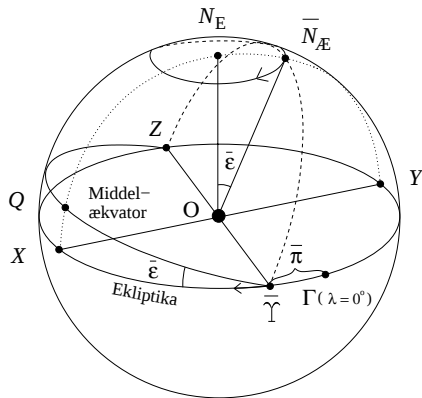
ϵ ses at være faldende i hele perioden, først med en lav rate, derefter noget hurtigere. Copernicus konkluderer at både ekliptikas hældning og præcessionsraten oscillerer om middelværdierne hhv. $\bar{\epsilon}$ og ω_π samt at præcessionsraten og hældningen i det angivne tidsinterval ca. har gennemløbet hhv. en og en halv periode.⁴ Der antages derfor at perioden T_θ for hældningen, præcist er dobbelt så stor som præcessionsratens. Endvidere antages at hældningen oscillerer mellem værdierne $23;28^\circ$ og $23;52^\circ$ ($\Rightarrow \bar{\epsilon} = 23;40^\circ$), samt at de to oscillationer begynder deres cykler samtidigt.⁵

⁴Copernicus' store tiltro (han havde ikke noget valg) til sine foregængere, betød at upræcise observationer blev betragtet som korrekte og resulterede bl.a. i de nævnte oscillationer. Disse anomalier er rent fiktive i hvert fald hvad deres størrelsesorden angår.

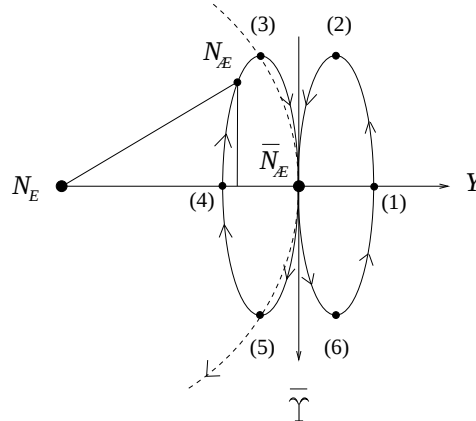
⁵Selv om Copernicus ikke selv omtaler hældningens grænser som en antagelse, taler meget dog herfor, se [We75, Kap.III] .

Specielt er den minimale præcessionsrate og maksimale hældning sammenfaldende på et tidspunkt mellem Timocharis og Ptolemaios.⁶

5.2.2. Modellen. Modellens formål er, i termer af uniforme cirkulære bevægelser, at tilskrive jordaksen en bevægelse som producerer en oscillerende præcessionsrate, samt en oscillation af ekliptikas hældning i henhold til data.



FIGUR 5.1.



FIGUR 5.2.

Betragt Fig. 5.1. Middelpræcessionsraten ω_{π} og middelhældningen $\bar{\epsilon}$ opnås ved at lade den middel ækvatorielle nordpol $\bar{N}_E$ rotere mod vest uniformt om den ekliptiske nordpol N_E med (ω_{π}, T_{π}) relativt til Γ . Dette resulterer i en tilsvarende uniform bevægelse af $\bar{Y}$ langs ekliptika. Den sande pol N_E 's bevægelse er en kombination af nedenstående oscillationer også kaldet *librationer*. Disse er afbildet kvalitativt, som en plan bevægelse, i Fig. 5.2:

1. Oscillation med $(\omega_{\theta}, T_{\theta})$ om $\bar{N}_E$ på cirkelbuen $X\bar{N}_EY \Rightarrow \epsilon$ oscillerer om $\bar{\epsilon}$.
2. Oscillation om $\bar{N}_E$ langs $\bar{Y}\bar{N}_EZ$ med $(2\omega_{\theta}, \frac{1}{2}T_{\theta}) \Rightarrow \bar{Y}$ oscillerer om $\bar{Y}$.

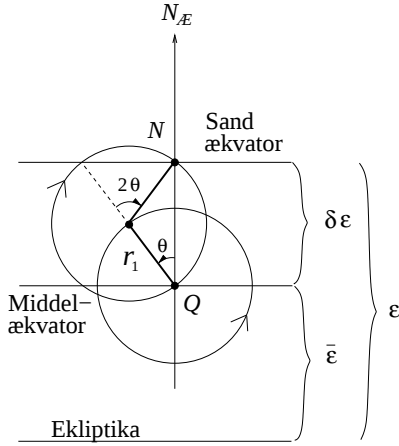
De nummererede punkter i Fig. 5.2 har flg. betydninger: (1): ϵ antager her sin maksimal værdi og ω_{π} sin minimal værdi. (2),(3): Største afvigelse fra $\bar{Y}$ i negativ retning. (4): Minimal værdi for ϵ og ω_{π} . (5),(6): Største afvigelse fra $\bar{Y}$ i positiv retning. For at kunne producere denne bevægelse anvender Copernicus, Tusi koblingen. Tusis mekanisme, i den version Copernicus anvender, består af en cirkel (stiplet cirkel i Fig. 3.3, s. 40) med radius r roterende om A, med en ligeså stor, men modsat roterende epicykel (cirkel BC) og bruges til at frembringe en retliniet oscillation. Da de virkelige oscillationer foregår langs små buestykker, som approksimativt kan betragtes som rette linier, kan Tusi's mekanisme anvendes uden problemer. De to oscillationer 1. og 2. tilskrives som sagt til jordaksen (dvs. N_E), men hvordan denne fysisk forbindes med Tusi's mekanisme nævner Copernicus intet om.

Hvorledes Tusi koblingen frembringer oscillationerne 1. og 2. illustreres nemmest ved i de to tilfælde at føre mekanismen til hhv. Q og $\bar{Y}$, se hhv. Fig. 5.3 og Fig. 5.4.

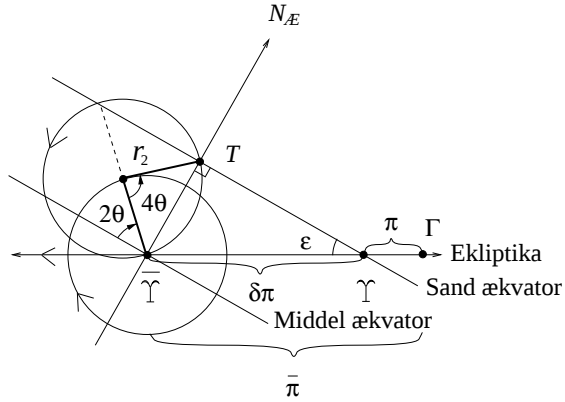
⁶Situation (1) i Fig. 5.2.

1: Oscillation langs $X\bar{N}_{\mathcal{E}}Y$.

2: Oscillation langs $\bar{\Upsilon}\bar{N}_{\mathcal{E}}Z$.



FIGUR 5.3. Tusi koblingen for ϵ .



FIGUR 5.4. Tusi koblingen for Υ .

Herunder behandles kun størrelser relevante for præcessionen, idet kun denne indvirker på planeternes længdegrader.

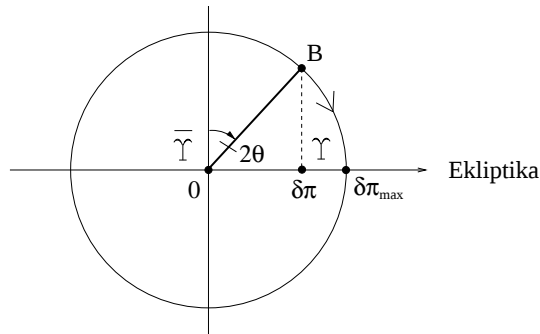
Fig. 5.4: Der ses at

$$\delta\pi = \frac{\bar{\Upsilon}T}{\sin \epsilon} = \frac{2r_2 \sin(2\theta)}{\sin \epsilon} = \delta\pi_{max} \sin(2\theta) \quad (5.2.1)$$

hvor

$$\delta\pi_{max} \approx \frac{2r_2}{\sin \bar{\epsilon}} \quad (5.2.2)$$

Den lille variation på ϵ (se s. 60) er negligerel i $\delta\pi_{max}$ og fortegnet er givet i overensstemmelse med 5.2.5. Der følger heraf at bevægelsen af Υ relativt til $\bar{\Upsilon}$ er ækvivalent med bevægelsen af projektionen $\bar{\Upsilon}\mathbf{B} \sin(2\theta)$ af radiusvektoren $\bar{\Upsilon}\mathbf{B}$ på ekliptika, se Fig. 5.5



FIGUR 5.5

Middelværdier:

$\omega_{\bar{\pi}}\Delta t$: = middelbevægelsen i præcession.

$\bar{\pi} := \bar{\Upsilon} - \Gamma = \bar{\pi}(t_0) + \omega_{\bar{\pi}}(t - t_0)$ = middelpræcessionen.

$\bar{\pi}$ angiver altså positionen af $\bar{\Upsilon}$ regnet fra Γ positiv i vestlig retning.

$\omega_\theta \Delta t$: = middelbevægelsen i anomalie.

θ : = $\theta(t_0) + \omega_\theta(t - t_0)$ = præcessions anomalien.

Korrektioner:

$\delta\pi$: = $\bar{\Upsilon} - \Upsilon$ = præcessionens korrektion.

$$\delta\pi = \delta\pi_{max} \sin(2\theta) \quad (5.2.3)$$

Korrekte værdier:

π : = den sande præcession.

$$\pi = \bar{\pi} - \delta\pi \quad (5.2.4)$$

Fra 5.2.4 fås flg. fortegnelsesregel for $\delta\pi$:

$$\delta\pi = \begin{cases} \geq 0 & \text{for } 0^\circ \leq 2\theta \leq 180^\circ \\ \leq 0 & \text{for } 180^\circ \leq 2\theta \leq 360^\circ \end{cases} \quad (5.2.5)$$

Den sande værdi for præcessionen til tiden t udregnes efter formelen:

$$\boxed{\pi(t) = \bar{\pi}(t_0) + \omega_{\bar{\pi}}(t - t_0) - \delta\pi_{max} \sin(2[\theta(t_0) + \omega_\theta(t - t_0)])} \quad (5.2.6)$$

med de fundamentale parametre $\bar{\pi}(t_0)$, $\theta(t_0)$, $\omega_{\bar{\pi}}$, ω_θ og $\delta\pi_{max}$.

Da π er forskellen mellem den sideriske længdegrad λ og den tropiske λ^Υ fås flg. relation mellem de to længdegrader

$$\lambda^\Upsilon = \lambda + \pi \quad (5.2.7)$$

5.2.3. Parametre. De kinematiske parametre gives i bog 3,VI, dog med yderst sparsomme oplysninger om, hvorledes den faktiske udledning har fundet sted.⁷ Copernicus angiver:

$\omega_{\bar{\pi}}$ ° / eg.år	$T_{\bar{\pi}}$ eg.år	ω_θ ° / eg.år	T_θ eg.år
0;0,50,12,5	25816	0;6,17,24,9	3434

TABEL 5.4. Kinematiske parametre.

Epoke nr.	$\bar{\pi}(t_0)$ °	$\theta(t_0)$ °
1	354;44	285;30
2	1;2	332;52
3	4;55	2;2
4	5;32	6;45

TABEL 5.5. Epokeværdier.

Bestemmelsen af $\delta\pi_{max}$:

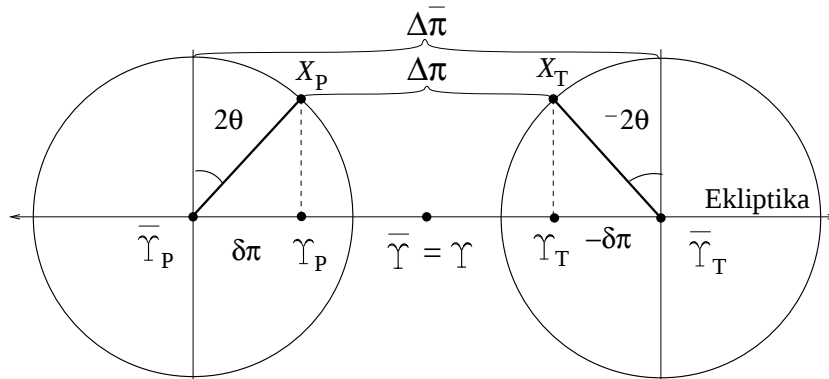
Hertil bruges observationerne 1. og 2. af β -Sco (se tabel 5.6) foretaget af hhv. Timocharis og Ptolemaios.

⁷Bud på Copernicus' metode findes i [We75, Kap.III] og [Mo68].

Obs. i	λ_i^{Υ} °	Dato t_i
1	212	-294 dec 21
2	216;20	139 feb 23

TABEL 5.6

Copernicus antager at anomaliens nulpunkt ($\theta = 0$) indtraf præcist midt mellem de to observationer, hvorfor positionen af $\bar{\Upsilon}$ på observationstidspunkterne ligger symmetrisk om positionen af $\bar{\Upsilon} = \Upsilon$ på tidspunktet midt imellem.⁸ I Fig. 5.6 er situationen på de to tidspunkter afbildet ved brug af Fig. 5.5 med Ptolemaios' værdier i venstre side.



FIGUR 5.6

Fra tabel 5.6 fås forskydningen af Υ :

$$\Delta\pi = \lambda_2^{\Upsilon} - \lambda_1^{\Upsilon} = 4;20^{\circ}$$

Da $\Delta t = t_2 - t_1 = 432$ eg.år, findes forskydningen af $\bar{\Upsilon}$

$$\Delta\bar{\pi} = \omega_{\bar{\pi}} \Delta t \approx 6^{\circ}$$

Fra Fig. 5.6 ses at

$$\Delta\bar{\pi} - \Delta\pi = 2\delta\pi = 1;40^{\circ}$$

og

$$\Delta 2\theta = 2\omega_{\theta} \Delta t = 90;35^{\circ}$$

$\delta\pi_{max}$ følger nu fra

$$\delta\pi = \delta\pi_{max} \sin(\frac{1}{2}\Delta 2\theta)$$

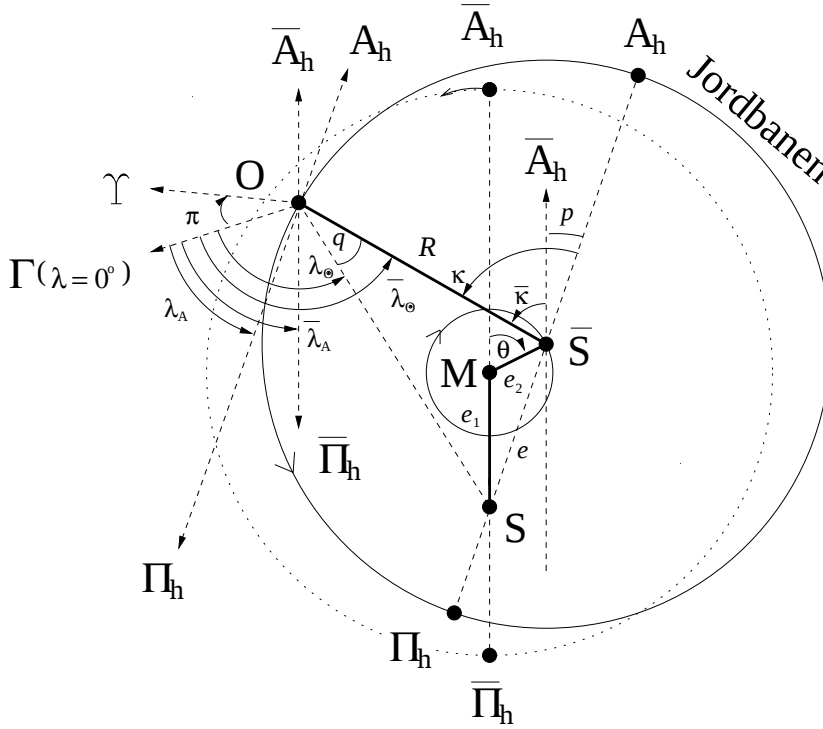
↓

$$\boxed{\delta\pi_{max} \approx 1;10^{\circ}}$$

Hermed er teorien for præcessionen, eller rettere for jordaksens bevægelse, klarlagt.

⁸År -77. Dette tidspunkt korrigeres senere til ca. år -64.

5.3. Solmodellen



FIGUR 5.7. Copernicus' model for Solen.

Retningsvektoren fra Solen til Jorden er givet ved:

$$\mathbf{SO} = \mathbf{SM} + \mathbf{MS} + \mathbf{\bar{S}O} \quad (5.3.1)$$

SM: Roterer mod øst uniformt om S med $(\omega_{\bar{A}}, T_{\bar{A}})$ relativt til Γ . Definerer retningen af apsidelinens middeposition. $|\mathbf{SM}| = e_1$.

MS: Har uniform rotation om M mod vest med $(\omega_{\theta}, T_{\theta})$ relativt til middeapsidelinien. Definerer med **SM** den sande apsidelinie samt excentriciteten idet retningen til A_h er givet ved $\mathbf{SM} + \mathbf{MS}$ og $e = |\mathbf{SM} + \mathbf{MS}|$. $|\mathbf{MS}| = e_2$.

S̄O: Roterer mod øst uniformt om $\bar{S}$ med $(\omega_{\odot}, T_{\odot})$ relativt til Γ . $|\mathbf{\bar{S}O}| = R$.

Bemærk at det ptolemæiske apogæum også angiver retningen af perihelion.

5.3.1. Længdegrader og middelbevægelser. I et vilkårligt tidsinterval Δt fås flg. middelbevægelser:

$\omega_{\odot} \Delta t$: = middelbevægelsen i længdegrad.

$\omega_{\odot}^{\Upsilon} \Delta t$: = $(\omega_{\odot} + \omega_{\pi}) \Delta t$ = middelbevægelsen i tropisk længdegrad.

$\omega_{\bar{A}} \Delta t$: = middelbevægelsen af apsidelinien.

$\omega_{\bar{\kappa}} \Delta t$: = $(\omega_{\odot} - \omega_{\bar{A}}) \Delta t$ = middelbevægelsen i anomali.

Disse middelbevægelser (undtagen $\omega_{\bar{A}}$) er tabellagt i bog 3,XIII.

Middellængdegrader:

$\bar{\lambda}_A$: $\angle \Gamma O \bar{\Pi}_h = [\bar{\lambda}_{\odot}(t_0) - \bar{\kappa}(t_0)] + \omega_{\bar{A}}(t - t_0)$ = længdegraden af middeapsidelinie.

$\bar{\lambda}_{\odot}$: $\angle \Gamma O \bar{S} = \bar{\lambda}_{\odot}(t_0) + \omega_{\odot}(t - t_0)$ = middellængdegraden.

$\bar{\lambda}_{\odot}^{\Upsilon}$: $\angle \Upsilon O \bar{S} = \bar{\lambda}_{\odot}^{\Upsilon}(t_0) + \omega_{\odot}^{\Upsilon}(t - t_0)$ = den tropiske middellængdegrad.

$$\bar{\lambda}_{\odot}^{\Upsilon} = \bar{\lambda}_{\odot} + \bar{\pi} \quad (5.3.2)$$

$\bar{\kappa}$: $\angle \bar{A}_h \bar{S} O = \bar{\kappa}(t_0) + \omega_{\bar{\kappa}}(t - t_0) =$ middel excentrisk anomali.

$$\bar{\lambda}_{\odot} = \bar{\kappa} + \bar{\lambda}_A \quad (5.3.3)$$

Korrektioner:

q : $\angle \bar{S} O S =$ bane korrektion.

givet ved

$$\sin q(\kappa, \theta) = -\frac{e \sin(\kappa)}{[R^2 + e^2 + 2Re \cos(\kappa)]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.3.4)$$

p : $\angle \bar{A}_h \bar{S} A_h =$ excentrisk korrektion.

givet ved

$$\sin p(\theta) = -\frac{e_2 \sin \theta}{e}, \quad (5.3.5)$$

$$\text{hvor } e = [(e_1)^2 + (e_2)^2 + 2e_1 e_2 \cos \theta]^{\frac{1}{2}}$$

Fortegnet i 5.3.4 og 5.3.5 er givet i overensstemmelse med hhv. 5.3.11 og 5.3.12.

Numeriske værdier af p og q udregnes fra tabellen i bog 3,XXIII.

Korrekte længdegrader:

λ_A : $\angle \Gamma O \Pi_h =$ apogæets korrekte længdegrad.

$$\lambda_A = \bar{\lambda}_A + p \quad (5.3.6)$$

$\lambda_{\odot}$: $\angle \Gamma O S =$ korrekt længdegrad.

$$\lambda_{\odot} = \bar{\lambda}_{\odot} + q \quad (5.3.7)$$

$\lambda_{\odot}^{\Upsilon}$: $\angle \Upsilon O S =$ korrekt tropisk længdegrad.

$$\lambda_{\odot}^{\Upsilon} = \bar{\lambda}_{\odot}^{\Upsilon} + q - \delta \pi \quad (5.3.8)$$

κ : $\angle A_h \bar{S} O =$ korrekt excentrisk anomali.

$$\kappa = \bar{\lambda}_{\odot} - \lambda_A \quad (5.3.9)$$

$$\bar{\kappa} = \kappa + p \quad (5.3.10)$$

Fra 5.3.7 og 5.3.10 fås flg. fortegneregler:

$$q = \begin{cases} \leq 0 & \text{for } 0^\circ \leq \kappa \leq 180^\circ \\ \geq 0 & \text{for } 180^\circ \leq \kappa \leq 360^\circ \end{cases} \quad (5.3.11)$$

$$p = \begin{cases} \leq 0 & \text{for } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \\ \geq 0 & \text{for } 180^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \end{cases} \quad (5.3.12)$$

Solens sande længdegrad kan nu udregnes efter

$$\boxed{\lambda_{\odot}(t) = \bar{\lambda}_{\odot}(t_0) + \omega_{\odot}(t - t_0) + q(\kappa)} \quad (5.3.13)$$

Med parametrene $e_1, e_2, \omega_{\odot}, \bar{\lambda}_{\odot}(t_0), \bar{\kappa}(t_0)$ og $\omega_{\theta}, \theta(t_0)$, hvor de to sidste er kendt fra præcessionsteorien.

5.3.2. parametre.

$\omega_{\odot}$ °/eg.år	$T_{\odot}$ dg.	$\omega_{\bar{A}}$ °/eg.år
359;44,49,7,4	365;15,24,10	0;0,24,20,14

TABEL 5.7. Kinematiske parametre.

Epoke nr.	$\bar{\lambda}_{\odot}(t_0)$	$\bar{\kappa}(t_0)$
1	96;16	40;14
2	225;37	166;31
3	272;4	211;4
4	272;31	211;14

TABEL 5.8.
Epokeværdier.

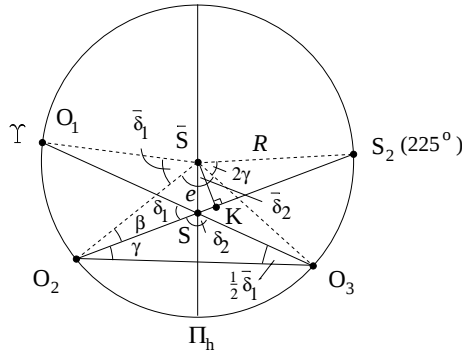
Geometriske parametre:

Hvor Ptolemaios i sin udledning anvendte to positioner af Solen ved jævndøgn samt en ved solhverv (se s. 11), benytter Copernicus istedet for solhvervs observationen en observation af Solen midt mellem efterårsjævndøgn og vintersolhverv, dvs. i $\lambda_{\odot}^{\Upsilon} = 225^{\circ}$. Herved undgås en svær bestemmelse af et solhverv.

Obs. S_i for i	$\lambda_{\odot}^{\Upsilon}$	Dato t_i	Δt dg.	$\Delta \bar{\lambda}_{\odot}^{\Upsilon}$
1	180°	14/9. 1515, + 6;30h	0	0
2	225°	29/10. 1515, + 12;54h	45;16	44;37
3	0°	11/3. 1516, + 4;20h	133;37	131;42

TABEL 5.9. Observationer af Solen regnet fra Υ .

Middelbevægelsen $\Delta \bar{\lambda}_{\odot}^{\Upsilon}$ er udregnet med $\omega_{\odot}^{\Upsilon} = 0;59,8^{\circ}/dg$. De tilhørende positioner O_i af Jorden er afbildet i Fig. 5.8.



FIGUR 5.8.

Vinkel	°
δ_1	45
δ_2	135
$\bar{\delta}_1$	44;37
$\bar{\delta}_2$	131;42

TABEL 5.10.

Der ses

$$2\gamma = 2[180^{\circ} - (\delta_2 + \frac{1}{2}\bar{\delta}_1)] \text{ og heraf } \beta = \frac{180^{\circ} - (\bar{\delta}_2 + 2\gamma)}{2}$$

e bestemmes:

$$O_2O_3 = 2R \sin \frac{1}{2}\bar{\delta}_2 \xrightarrow{\text{Fra Fig. 5.8}} O_2S = O_2O_3 \frac{\sin \frac{1}{2}\bar{\delta}_1}{\sin \bar{\delta}_2}$$

$$O_2S_2 = 2R \sin \frac{1}{2}(\bar{\delta}_2 + 2\gamma)$$

Så

$$\left. \begin{array}{l} SK = \frac{1}{2}(O_2S_2) - O_2S \\ K\bar{S} = R \sin \beta \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Pythagoras}} e = S\bar{S} = [(SK)^2 + (K\bar{S})^2]^{\frac{1}{2}}$$

↓

$$\boxed{e = 323^p, \text{ hvor } R = 10000^p}$$

Apsidelinien bestemmes:

$$\angle O_2S\Pi_h = \sin^{-1}\left(\frac{K\bar{S}}{e}\right)$$

så

$$\lambda_A^{\Upsilon} = \angle O_1S\Pi_h = \delta_1 + \angle O_2S\Pi_h$$

↓

$$\boxed{\lambda_A^{\Upsilon} = 96; 40^\circ}$$

På tidspunktet for observation S_1 fås fra præcessionsteorien at $\pi = 27; 15^\circ$.

↓

$$\boxed{\lambda_A = \lambda_A^{\Upsilon} - \pi = 69; 25^\circ}$$

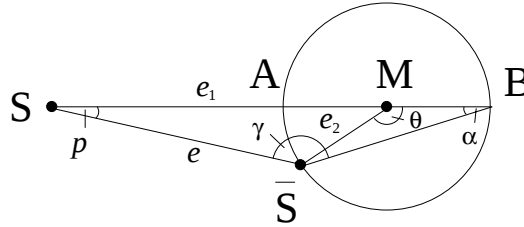
De fundne geometriske parametre er kun gældende for omkring år 1515.

Bestemmelse af e_1 og e_2 :

Copernicus bruger flg. antagelser samt observation S_1 fra tabel 5.9.

1. Perioden for e_2 er T_θ .
2. e antager maksimum i $\theta = 0^\circ$.
3. $e_{max} = 417^p$, hvor $R = 10000^p$.

$\theta = 0^\circ$ den 28/8 år -64 hvilket giver et tidsinterval til S_1 på ca. $\Delta t = 1580$ eg.år. Der fås nu at $\theta(t_1) = \omega_\theta \Delta t \approx 165; 39^\circ$. Denne situation er afbildet i nedenstående figur.



FIGUR 5.9

Da $SB = e_{max}$, $S\bar{S} = e$ og $\alpha = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta)$ fås $\gamma = \sin^{-1}(\frac{e_{max}}{e} \sin \alpha)$ og $p = 180^\circ - \gamma - \alpha$.

Heraf bestemmes

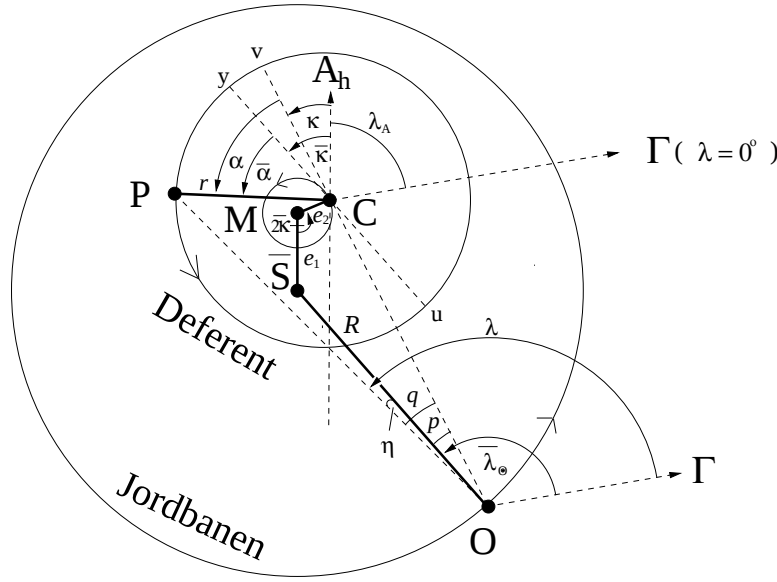
$$B\bar{S} = SB \frac{\sin p}{\sin \gamma} \quad \text{og} \quad AB = \frac{B\bar{S}}{\cos \alpha}$$

Dette giver nu

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = e_{max} - \frac{1}{2}AB \\ e_2 = \frac{1}{2}AB \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} e_1 = 369^p \\ e_2 = 48^p \end{array}} \quad (5.3.14)$$

Fra sin egen og nogle arabiske astronomers (ikke Maragha) værdier for solbanens excentricitet, finder Copernicus at denne har været aftagende siden Ptolemaios (dette er ligeledes årsagen til antagelse nr. 1, ovenfor). Derfor indfører han i forhold til *Commentariolus* en lille cirkel til at variere excentriciteten.

5.4. Venusmodellen



FIGUR 5.10. Copernicus' model for Venus.

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OS} + \mathbf{SM} + \mathbf{MC} + \mathbf{CP} \quad (5.4.1)$$

OS: Er beskrevet i solmodellen.

SM: Definerer retningen af apsidelinien. $|\mathbf{SM}| = e_1$, varierer med tiden.

MC: Roterer mod øst uniformt om M med $(2\omega_{\odot}, \frac{1}{2}T_{\odot})$ relativt til Γ . Definerer med $\mathbf{SM}$ excentriciteten via: $e = e_1 - e_2$ (og $2e = e_1 + e_2$). $|\mathbf{MC}| = e_2$.

CP: Roterer mod øst uniformt om C med $(\omega_{\bar{\alpha}}, T_{\bar{\alpha}})$ og $(\omega_{\bar{\lambda}}, T_{\bar{\lambda}})$ (hvor $\omega_{\bar{\lambda}} = \omega_{\bar{\alpha}} + \omega_{\odot}$) relativt til hhv. **OS** (eller linien uy) og Γ . $|\mathbf{CP}| = r$.

Bemærk aphelion har samme retning som apogæet.

5.4.1. Længdegrader og middelbevægelser. Middelbevægelsen i parallakse er Venus' bevægelse i længdegrad relativt til Jorden. I bog 5,III er denne tabellagt som $\omega_{\bar{\alpha}} \Delta t$ hvor Δt gives i hhv. heltallige $dg.$ og eg.år fra 1-60.

Middellængdegrader:

λ_A : $\angle \Gamma C A_h =$ længdegraden af aphelion.

$\bar{\lambda}$: $\angle \Gamma O \bar{S} = \bar{\lambda}_{\odot} =$ middellængdegraden, se solteorien.

$\bar{\kappa}$: $\angle A_h C y =$ middel excentrisk anomali.

$$\bar{\kappa} = \bar{\lambda}_{\odot} - \lambda_A \quad (5.4.2)$$

$\bar{\alpha}$: $\angle y C P = \bar{\alpha}(t_0) + \omega_{\bar{\alpha}}(t - t_0) =$ middel parallaktisk anomali.

Korrektioner:

p : $\angle C O \bar{S} =$ excentrisk korrektion.

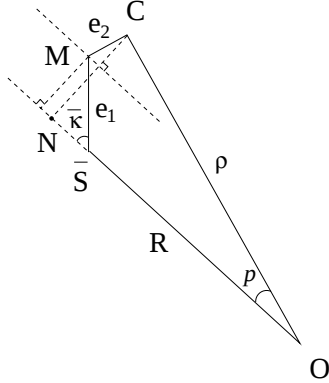
Denne findes fra Fig. 5.11:

$$\sin p(\bar{\kappa}) = -\frac{NC}{\rho}$$

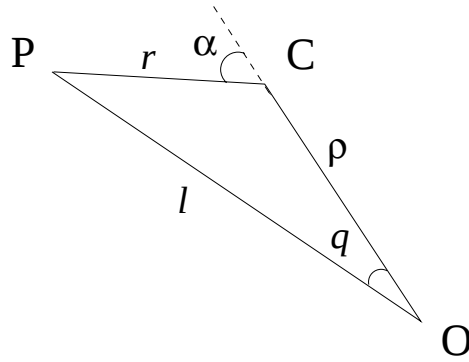
hvor $NC = (e_1 + e_2) \sin \bar{\kappa}$, $\rho(\bar{\kappa}) = [(NC)^2 + (ON)^2]^{\frac{1}{2}}$ og $ON = R + (e_1 - e_2) \cos \bar{\kappa}$
 $\Downarrow$

$$\sin p(\bar{\kappa}) = - \frac{(e_1 + e_2) \sin \bar{\kappa}}{[(R + (e_1 - e_2) \cos \bar{\kappa})^2 + (e_1 + e_2)^2 \sin^2 \bar{\kappa}]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.4.3)$$

Fortegnet er givet i overensstemmelse med 5.4.8.



FIGUR 5.11.



FIGUR 5.12.

q : $\angle COP$ = bane korrektion.

Fra Fig. 5.12 fås:

$$\sin q(\alpha, \bar{\kappa}) = \frac{r \sin \alpha}{l(\alpha, \bar{\kappa})} \quad (5.4.4)$$

hvor $l(\alpha, \bar{\kappa}) = (r^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos \alpha)^{\frac{1}{2}}$.

p, q er givet fra tabellerne i bog 5,XXXIII.

η : $\angle SOP$ = elongation fra middelsolen.

$$\eta = p + q \quad (5.4.5)$$

Korrekte længdegrader:

λ : $\angle GOP$ = korrekt længdegrad.

$$\lambda = \bar{\lambda}_{\odot} + \eta \quad (5.4.6)$$

κ : $\angle A_h C v$ = korrekt excentrisk anomali.

$$\kappa = \bar{\kappa} + p \quad (5.4.7)$$

α : $\angle vCP$ = korrekt parallaktisk anomali.

$$\alpha = \bar{\alpha} - p \quad (5.4.8)$$

p 's fortegn er givet fra 5.4.8

$$p = \begin{cases} \leq 0 & \text{for } 0^\circ \leq \bar{\kappa} \leq 180^\circ \\ \geq 0 & \text{for } 180^\circ \leq \bar{\kappa} \leq 360^\circ \end{cases} \quad (5.4.9)$$

Fortegnet for q er givet ved 5.4.5

$$q = \begin{cases} \geq 0 & \text{for } 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \\ \leq 0 & \text{for } 180^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ \end{cases} \quad (5.4.10)$$

Med givne parametre $e_1, e_2, r, \lambda_A, \omega_{\bar{\alpha}}$ og $\bar{\alpha}(t_0)$ kan $\lambda(t)$ for Venus udregnes efter flg. formel:

$$\lambda(t) = \bar{\lambda}_{\odot}(t) + p(\bar{\kappa}) + q(\alpha, \bar{\kappa}) \quad (5.4.11)$$

5.4.2. Parametrene.

$\omega_{\bar{\alpha}}$
$^{\circ}/\text{eg.}\ddot{\text{a}}\text{r}$
225;1,45,3,40

TABEL 5.11. Kinematiske parametre.

Epoke nr.	$\bar{\alpha}(t_0)$
1	321;26
2	81;52
3	73;2
4	126;45

TABEL 5.12. Epokeværdier.

Betragt Fig. 5.10. Da bevægelsen af C kun afhænger af $\bar{\kappa}$, vil positioner af O symmetriske om apsidelinien også have symmetriske positioner af C. Dette bevirke at den af Ptolemaios anvendte symmetriegenskab for maksimale elongationer stadig er gældende, hvorfor Copernicus udleder de geometriske parametre efter præcist samme metode som Ptolemaios.⁹ Ligeledes anvendes Ptolemaios' Venus observationer (se tabel 1.5 og tabel 1.6) dog korrigeret for præcessionen således at de regnes fra γ -Aries. Nedenstående tabeller viser Copernicus' egne beregnede værdier af middelsolens position med de tilhørende elongationer beregnet fra de korrigerede Venus positioner.

V_i for i	t_i dato	$\bar{\lambda}_{\odot}(t_i)$	$\eta(t_i)$	V_i for i	t_i dato	$\bar{\lambda}_{\odot}(t_i)$	$\eta(t_i)$
1	8/3. 132	337;41	47;15 øst	5	18/2. 134	318;50	43;35 vest
2	30/7. 140	119	47;15 vest	6	18/2. 140	318;50	48;20 øst
3	20/5. 129	48;50	44;48 vest				
4	18/11. 136	228;54	47;16 øst				

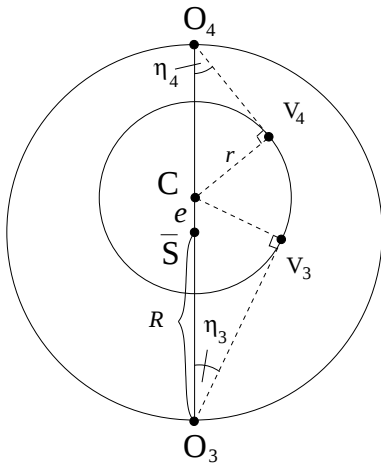
TABEL 5.13. Venus observationer.

TABEL 5.14. Venus observationer.

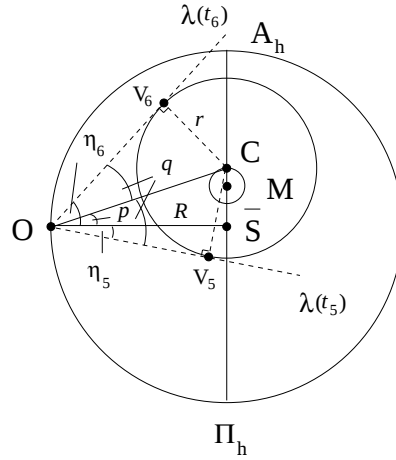
Fra tabel 5.13 fås $\lambda_A = 48;20^{\circ}$, som med $\pi = 6;40^{\circ}$ giver $\lambda_A^{\text{r}} = 55;0^{\circ}$. Da C i observation nr. 3 og 4 (se Fig. 5.13, hvor O_3 og O_4 er de tilhørende positioner af Jorden) befinder sig hvor $\bar{\kappa}$ hhv. er lig 0° og 180° er dens afstand til $\bar{S}$ minimal. Denne mindste afstand defineres ved $e = e_1 - e_2$. Fra 1.3.14 med $R = 10000^p$ fås at $e = 208^p$ og $r = 7193^p$.

I V_5 og V_6 er middelsolen observeret næsten vinkelret på apsidelinien, hvilket betyder at C er i dens fjerneste position fra $\bar{S}$. Situationen er afbildet i Fig. 5.14.

⁹Se side 15.



FIGUR 5.13.



FIGUR 5.14.

Da $\angle \Pi_h \bar{S} O \approx 90^\circ$ er

$$e_1 + e_2 = \bar{S}C = R \tan p = R \tan(q - \eta_5) = R \tan \frac{1}{2}(\eta_6 - \eta_5)$$

Med $R = 10000^p$ giver dette

$$e_1 + e_2 = 416^p = 2e$$

dvs.

$$e_1 = \frac{3}{2}e = 312^p \text{ og } e_2 = e/2 = 104^p$$

De udledte værdier af λ_A og e hidrører fra Ptolemaios' observationer og er derfor ikke overraskende sammenfaldende med hans resultater. Copernicus påstår herefter, at alt hvad han har vist for Venus, ligeledes holder på sin egen tid med undtagelse af værdien for den dobbelte excentricitet, som på grundlag af mange observationer er blevet reduceret til 350^p . Copernicus angiver dog ikke hvilke observationer der tales om. Reduktionen tildeles ligeledes uden forklaring til e_1 alene, som således reduceres til $e_1 = 246^p$ mens e_2 forbliver uændret på 104^p .¹⁰ Sammenholdt med bevægelsen af middelsolen får dette Copernicus til at overføre den sekundære epicykel fra *Commentariolus* til en excentricitet, således at reduktionen kan tolkes som en bevægelse af middelsolen mod M, se Fig. 5.10. Epicykletten er sandsynligvis flyttet for at opnå en konfiguration hvor p og q måles fra Jorden uden brug af fiktive punkter — E og N i Fig. 4.2.

De geometriske parametre er afbildet i nedenstående tabel, for $R = 10000^p$. Værdien af e_1 er naturligvis kun gyldig for Copernicus' tid.

e_1 p	e_2 p	r p	λ_A $^\circ$
246	104	7193	48; 20

TABEL 5.15. Geometriske parametre for Venus.

¹⁰I teorien for Mars bliver afstanden fra middelsolen til centrum for marsdeferenten ligeledes reduceret (se s. 84), dog på basis af bekræftende observationer.

Udtryk for p og q findes ved samme teknik som 1.3.3 og 1.3.5:

$$\sin p(\bar{\kappa}) = -\frac{(e_1 + e_2) \sin(\bar{\kappa})}{\bar{S}P} \quad (5.5.4)$$

$$\sin q(\alpha, \bar{\kappa}) = -\frac{R \sin \alpha}{OP} = -\frac{R \sin \alpha}{[(\bar{S}P + R \cos \alpha)^2 + (R \sin \alpha)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.5.5)$$

hvor $\bar{S}P = [(r + (e_1 - e_2) \cos \bar{\kappa})^2 + ((e_1 + e_2) \sin \bar{\kappa})^2]^{\frac{1}{2}}$

$\eta : \angle \bar{S}OP$ = elongation fra middelsolen.

Korrekte længdegrader:

$\lambda : \angle \Gamma OP$ = korrekt længdegrad.

$$\lambda = \bar{\lambda} + p - q \quad (5.5.6)$$

$\kappa : \angle A_h \bar{S}P$ = korrekt excentrisk anomali.

$$\kappa = \bar{\kappa} + p \quad (5.5.7)$$

$\alpha : \angle v \bar{S}O$ = korrekt parallaktisk anomali.

$$\alpha = \bar{\alpha} - p \quad (5.5.8)$$

$$360^\circ - \eta = \alpha + q \quad (5.5.9)$$

Fortegnsreglen for p og q findes fra Fig. 5.15 samstemmende med 5.5.8 og 5.5.9

$$p = \begin{cases} \leq 0 & \text{for } 0^\circ \leq \bar{\kappa} \leq 180^\circ \\ \geq 0 & \text{for } 180^\circ \leq \bar{\kappa} \leq 360^\circ \end{cases} \quad (5.5.10)$$

og

$$q = \begin{cases} \leq 0 & \text{for } 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \\ \geq 0 & \text{for } 180^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ \end{cases} \quad (5.5.11)$$

Den korrekte længdegrad for en ydre planet udregnes efter 5.5.12, som kræver en bestemmelse af parametrene: $e_1, e_2, r, \lambda_A(t_0), \omega_A, \bar{\alpha}(t_0)$ og $\omega_{\bar{\alpha}}$

$$\boxed{\lambda(t) = \bar{\lambda}_{\odot}(t) - (\bar{\alpha}(t_0) + \omega_{\bar{\alpha}}(t - t_0)) + p(\bar{\kappa}) - q(\alpha, \bar{\kappa})} \quad (5.5.12)$$

5.6. Copernicus' jupitermodel

Copernicus behandler planeterne i bog 5 med det formål at konstruere geometriske modeller overholdende PUC¹¹, som på tilfredsstillende vis (dvs. at modellerne som et minimum skal være lige så effektive som Ptolemaios' geocentriske modeller) kan forklare bevægelsen af planeterne, i samhörighed med det heliocentriske system.

5.6.1. Middelbevægelserne. I det heliocentriske system kredser alle planeterne inklusiv Jorden omkring Solen, hvormed planeterne får en dobbelt bevægelse i længdegrad, nemlig:

- Egenbevægelsen, dvs. planeters selvstændige bevægelse om Solen.
- Den parallaktiske bevægelse, skyldet Jordens egenbevægelse.

Copernicus kalder den sidste for parallaktisk bevægelse, da denne er skyld i planeternes tilsyneladende retrogradation. Kort og godt er bevægelsen i parallakse intet andet end det Jordens egenbevægelse, har overskredet en ydre planets bevægelse, eller er overskredet af en indre planet. Dette afspejles i relation 5.1.1 s. 58. Numeriske værdier til denne relation fremskaffer Copernicus ved at korrigere Ptolemaios' værdier (s. 19). For Jupiter angives:

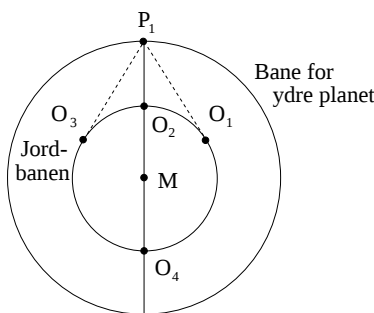
Jupiter overhales 65 gange af Jorden i løbet af 71 sideriske år $-5; 54, 13dg$. I dette tidsrum har den selv foretaget 6 sideriske omløb $-5; 42, 32^\circ$. Heraf udregnes den årlige parallaktiske middelbevægelse:

$$\omega_{\bar{\alpha}} = 365^{dg} / \text{eg.år} \frac{65 \cdot 360^\circ}{(71 \cdot T_{\odot} - 5; 42, 32) dg} = 329; 25, 8, 15, 6^\circ / \text{eg.år} \quad (5.6.1)$$

Med denne værdi tabellægges den parallaktiske middelbevægelse i to tabeller med indgangene hhv. eg.år fra 1-60 og dg fra 1-60. Middelbevægelsen i længdegrad tabellægges ikke, da denne for de ydre planeter kan udregnes fra 5.5.3. Copernicus angiver dog alligevel den årlige middelbevægelse. For Jupiter fås:

$$\omega_{\bar{\lambda}} = \omega_{\odot} - \omega_{\bar{\alpha}} = \boxed{30; 19, 40, 51, 58^\circ / \text{eg.år.}} \quad (5.6.2)$$

5.6.2. Den geometriske model. I afsnit III demonstreres kvalitativt hvorledes den retrograde bevægelse naturligt opstår i det nye system. Betragt Fig. 5.16.



FIGUR 5.16

Lad M beliggende i nærheden af Solen være de to cirklers centrum, og lad P_1 være en vilkårlig position af en ydre planet. Det er klart at planetens sande position

¹¹I bog 5,II nævnes at de ptolemæiske modellers brud med PUC gav anledning til at spekulere over Jordens bevægelighed, disse er dog ganske uafhængige af hinanden og Copernicus mener sikkert bare at det fik ham til at tænke over andre modeller, som til sidst endte med det heliocentriske system, se s. 84-88.

kun kan iagttages når Jorden er i O_2 , dvs. når planeten er i opposition og nærmest Jorden (perigæum). Da Jordens hastighed er højere end planetens, vil den ved passage af buen $O_3O_4O_1$ addere vinklen $\angle O_1P_1O_3$ til planetens tilsyneladende bevægelse og subtrahere samme vinkel på det resterende buestykke som dog tilbagelægges på kortere tid. Der hvor Jordens subtraherende bevægelse overgår planetens egen bevægelse (især nær O_2), vil planetens bevægelse være retrograd.

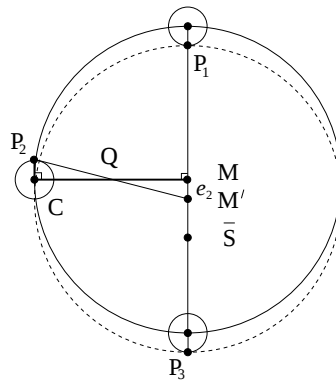
Tilbage mangler nu blot behandlingen af egenbevægelsen som foretages i afsnit IIII. Uregelmæssigheden i planeterne egenbevægelse skyldes at denne er sammensat af to uniforme cirkulære bevægelser, givet enten ved en biepicyklisk eller en excentroepicyklisk eller også ved en biexcentrisk model, se Fig. 3.1 side 37. Ækvivalensen af disse tre modeller behandles under solteorien i bog 3,XX.

Copernicus vælger den excentroepicykliske model, da det har vist sig at selvom afstanden fra deferentcentret til Solen altid er konstant¹², så har middelsolen bevæget sig i forhold til deferentcentret (se s. 84), hvilket jo skyldes som set i solteorien at middelsolens position ikke er fast relativt til Solen.¹³ Copernicus har altså i forhold til modellen i *Commentariolus* valgt at transformere epicyklen til en excentricitet. Epicykletten lader han dog blive på deferenten, på trods af at en flytning ville være i harmoni med venusmodellen. Den excentroepicykliske model, Fig. 3.1 (som nu beskriver 1.anomali via Urdis model, se s. 42), gives med flg. ligheder:

- $|\mathbf{C}| = \frac{1}{3}|\mathbf{B}|$ eller $e_2 = \frac{1}{3}e_1$ i henhold til Fig. 5.15.
- $\alpha = \beta$ ($= \bar{\kappa}$ i Fig. 5.15).

Copernicus nævner ligesom i *Commentariolus*, ikke direkte hvorfra han har udledt disse identifikationer, men det fremgår af senere udregninger at $e_1 + e_2 = 2e$, hvor $2e$ er afstanden fra O til E i Fig. 1.12, dvs Ptolemaios' dobbelte excentricitet. Hermed bliver bevægelsen af P uniform om E i Fig. 5.15¹⁴, men ikke cirkulær. Kun det sidste nævnes og bevises efter samme metode som Tusi (se s. 41):

Betragt Fig. 5.17.



FIGUR 5.17

¹²I [NeSw84, s. 358–359] vises det at excentriciteten MS for marsbanen relativt til Solen er ens på tidspunkterne for Ptolemaios og Copernicus. En tilsvarende udregning for Venus giver dog ikke samme resultat.

¹³Så selvom modellerne for Venus og de ydre planeter giver indtryk af en fast middelsol, er dette ikke tilfældet.

¹⁴Dette udnytter Copernicus til bestemmelsen af de geometriske parametre.

Eftersom planeten i aphelion og perihelion hhv. P_1 og P_3 befinder sig på en cirkel med centrum M' (stiplet cirkel), skal den for at have cirkulær bevægelse befinde sig på denne cirkel altid. Betragt dog position P_2 , hvor retningen fra M til C står vinkelret på apsidelinien. Her haves at (de to cirkler er jo lige store)

$$P_2Q > CQ \text{ og } QM' > QM \Rightarrow P_2M' > CM$$

Hvilket vil sige at P_2 befinder sig udenfor cirklen gennem P_1 og P_3 . Det er hermed vist at banen for P ikke beskriver en perfekt cirkel. Copernicus tager herefter fat på udledelsen af de geometriske parametre for de ydre planeter. Hertil benyttes observationer af planeten i opposition til middelsolen, da planetens position her er upåvirket af Jordens bevægelse. Sådanne observationer foretages med en armillar sfære.

5.6.3. Udledning af geometriske parametre for Jupiter. Udledelsen af de geometriske parametre går efter samme metode som Ptolemaios.¹⁵ Denne bruges først på Ptolemaios' observationer (tabel 1.8) der dog korrigeres for præcessionen samt tidsforskellen mellem tidszonerne for Alexandria og Frauenburg. Da Copernicus for simpelhedens skyld sætter præcessionen konstant lig $\pi = 6;38^\circ$ for de tre oppositioner, er det ikke overraskende at Ptolemaios' resultater reproduceres:¹⁶ $\lambda_A = 154;22^\circ \Rightarrow \lambda_A^\Upsilon = 161;1^\circ$ og $e_1 + e_2 = 2e = 917^p$, hvor $e_1 = 687^p$ og $e_2 = 229^p$ for deferentens radius $r = 10000^p$. Copernicus' egne observationer er givet i tabel 5.16

Obs. J_i for i	Dato t_i	Længdegrad $\lambda_i = \bar{\lambda}_\odot + 180^\circ$
1	30/4. 1520, + 11h	200;28°
2	28/11. 1526, + 3h	48;34°
3	1/2. 1529, + 19h	113;44°

TABEL 5.16. Oppositioner med middelsolen.

Heraf udregnes bevægelsen i længdegrad mellem oppositionerne:

$$\delta_1 = \lambda_2 - \lambda_1 = 208;6^\circ, \delta_2 = \lambda_3 - \lambda_2 = 65;10^\circ, \delta_3 = \lambda_1 - \lambda_3 = 86;44^\circ.$$

Tidsintervallet mellem de successive observationer:

$$\Delta t_1 = 6\text{eg.år } 212;40dg, \Delta t_2 = 2\text{eg.år } 66;39dg.$$

Fra Δt findes middelbevægelsen af Solen $\Delta \bar{\lambda}_\odot$ samt den middelparallaktiske bevægelse $\Delta \bar{\alpha}^\Upsilon$ i det pågældende tidsinterval.¹⁷ Middelbevægelsen i længdegrad $\bar{\delta}$ findes nu fra

$$\Delta \bar{\lambda} \stackrel{5.5.3}{=} \Delta \bar{\lambda}_\odot - \Delta \bar{\alpha}$$

$\Downarrow$

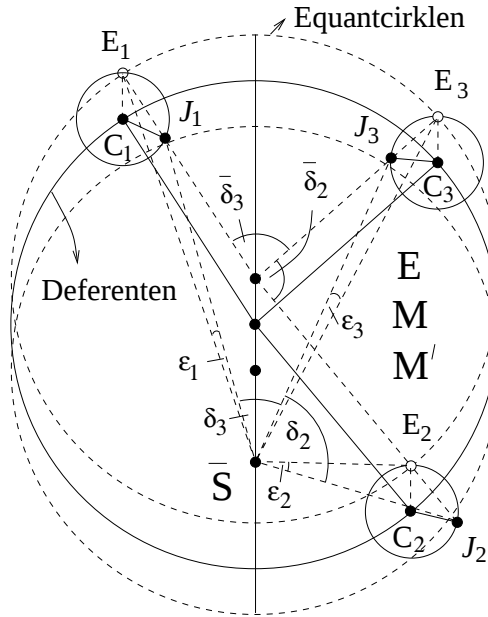
$$\bar{\delta}_1 = \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1 = 199;40^\circ, \bar{\delta}_2 = \bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_2 = 66;10^\circ \text{ og } \bar{\delta}_3 = \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 = 360^\circ - (\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2) = 94;10^\circ.$$

¹⁵Se underafsnit 1.5.2.

¹⁶For Saturn forsøger Copernicus sig med den korrekte præcession. Denne er ikke ens for de tre observationer, hvorfor δ_i og $\bar{\delta}_i$ bliver forskellige fra Ptolemaios'. *Almagestens* resultater lader sig, til stor gene for Copernicus, således ikke umiddelbart overføre.

¹⁷ $\Delta \bar{\lambda}_\odot$ findes fra solteorien. $\Delta \bar{\alpha}^\Upsilon$ er mærket som tropisk da Copernicus finder disse værdier fra tabellerne i *Almagesten* ([NeSw84, s. 312]), men da $\bar{\alpha} \stackrel{5.5.3}{=} \bar{\lambda}_\odot - \bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_\odot + \pi) - (\bar{\lambda} + \pi) = \bar{\alpha}^\Upsilon$ er $\Delta \bar{\alpha}^\Upsilon = \Delta \bar{\alpha}$.

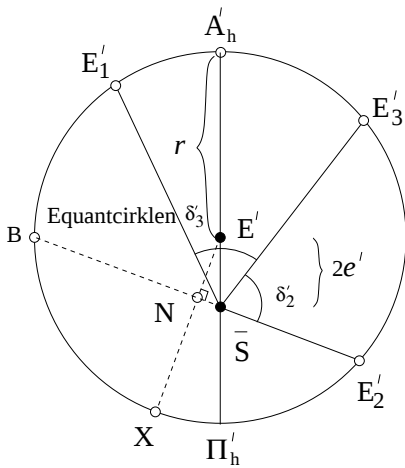
Lad J_i i Fig. 5.18 være positionen af Jupiter ved de tabellagte oppositioner afbildet sammen med deres projektioner E_i fra equantpunktet E til equantcirklen. Fra Ptolemaios vides at afstanden $\bar{SE} = 2e$ kan bestemmes såfremt man kender E_i 'ernes indbyrdes position set fra E og $\bar{S}$ (idet Jupiter er i opposition til $\bar{S}$ ses den fra Jorden og middelsolen under samme vinkel). Problemet er at E_i 'ernes position kun kendes fra E . Dette løses ved at approksimere E_i 'ernes position med J_i 'erne, betragtet fra $\bar{S}$. Herefter er fremgangsmåden som hos Ptolemaios.



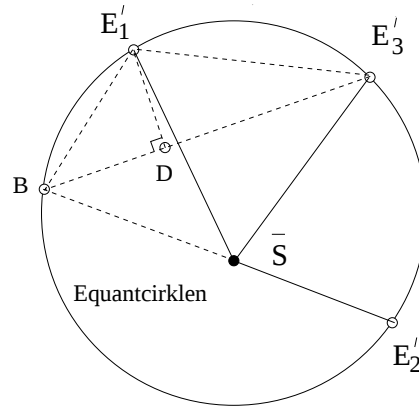
FIGUR 5.18

Den approksimerede situation er afbildet i Fig. 5.19.
Copernicus sætter $r = 10000^p$ og finder $2e'$ fra:

$$\bar{BS} \cdot \bar{SE}'_2 = (r + 2e') \cdot (r - 2e') \quad (5.6.3)$$



FIGUR 5.19.



FIGUR 5.20.

I nedenstående betegner r_O radius i den pågældende trekants omskrevne cirkel.

$$\begin{aligned} \mathbf{BE}'_3, r = 10000^p: \triangle B\bar{S}E'_3, r_O = 10000^p: \text{Da} \\ \left. \begin{aligned} \angle B\bar{S}E'_3 &= 180^\circ - \delta'_2 = 114; 50^\circ \\ \angle \bar{S}BE'_3 &= \frac{1}{2}\bar{\delta}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \sphericalangle BE'_3 &= 229; 40^\circ \\ \sphericalangle \bar{S}E'_3 &= 66; 10^\circ \end{aligned} \right. \Rightarrow \sphericalangle B\bar{S} = 64; 10^\circ. \\ \Downarrow_{1.1.1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BE'_3 &= 18150^p \text{ og} \\ B\bar{S} &= 10918^p. \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

Det skal her bemærkes at Copernicus ved udregningen af $B\bar{S}$ kommer til at bruge $66; 10^\circ$ istedet for $64; 10^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{I } \triangle B\bar{S}E'_1, r_O = 10000^p: \text{Da} \\ \left. \begin{aligned} \angle B\bar{S}E'_1 &= 180^\circ - \delta'_2 - \delta'_3 = 28; 6^\circ \\ \angle BE'_1\bar{S} &= 180^\circ - 28; 6^\circ - \frac{1}{2}(\bar{\delta}_3 + \bar{\delta}_2) = 71; 44^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \sphericalangle BE'_1 &= 56; 12^\circ \\ \sphericalangle B\bar{S} &= 143; 28^\circ. \end{aligned} \right. \\ \Downarrow_{1.1.1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BE'_1 &= 9420^p \text{ og} \\ B\bar{S} &= 18992^p. \end{aligned} \quad (5.6.5)$$

I enheden hvor $B\bar{S} = 10918^p$ fås nu fra 5.6.5:

$$BE'_1 = 5415^p. \quad (5.6.6)$$

$\triangle BE'_1E'_3$ I denne trekant kendes de to sider BE'_1 og BE'_3 samt:

$$\angle E'_1BE'_3 = \frac{1}{2}\bar{\delta}_3 \Rightarrow \sphericalangle E'_1E'_3 = 94; 10^\circ$$

Heraf kan Copernicus finde $\sphericalangle BE'_1E'_3$ og dermed BE'_3 via kordetabellen. Hvorledes dette udregnes fremgår af bog 1, XIII (omhandlende trigonometriske udregninger på en trekant) pkt. IIII: Betragt Fig. 5.20.

$$\begin{aligned} E'_1D &= BE'_1 \frac{1}{2} \text{crd} \bar{\delta}_3 = 3966^p, BD = BE'_1 \frac{1}{2} \text{crd}(180^\circ - \bar{\delta}_3) = 3687^p \text{ og} \\ E'_3D &= BE'_3 - BD = 14463^p \end{aligned}$$

$\Downarrow$ Pythagoras.

$$E'_1E'_3 = [(E'_1D)^2 + (E'_3D)^2]^{\frac{1}{2}} = 14997^p.$$

I $\triangle BE'_1E'_3, r = r_O = 10000^p$:

$$\frac{1}{2} \text{crd}(\sphericalangle BE'_1) = (E'_1D/E'_1E'_3) \Rightarrow \sphericalangle BE'_1 = 30; 40^\circ$$

$\Downarrow$

$$\sphericalangle BE'_1E'_3 = \bar{\delta}_3 + 30; 40^\circ = 124; 50^\circ \stackrel{1.1.1}{\Rightarrow} BE'_3 = 17727^p. \quad (5.6.7)$$

$B\bar{S}$ og $\bar{S}E'_2$: I samme enhed $r = 10000^p$ fås fra 5.6.4 og 5.6.7 at

$$B\bar{S} = 10665^p.$$

Da

$$\sphericalangle BE'_1E'_3E'_2 = \bar{\delta}_2 + \sphericalangle BE'_1E'_3 = 191^\circ \Rightarrow \sphericalangle BE'_2 = 360^\circ - 191^\circ = 169^\circ.$$

Så

$$BE'_2 \stackrel{1.1.1}{=} 19908^p \text{ og } \bar{S}E'_2 = BE'_2 - B\bar{S} = 9243^p.$$

Excentriciteten: Fra 5.6.3 følger nu

$$\bar{S}E' = 2e' = \begin{cases} 1193^p & \text{hvor } r = 10000^p \\ 7; 9^p & \text{hvor } r = 60^p. \end{cases}$$

Approksimationer til de middel excentriske anomalier: Betragt Fig. 5.19.

I enheden $r = 10000^p$ er

$$\bar{S}N = \frac{1}{2}BE'_2 - \bar{S}E'_2 = 711^p.$$

I $\triangle \bar{S}E'N$:

$$\frac{1}{2} \text{crd} 2(\angle \bar{S}E'N) = (\bar{S}N/\bar{S}E') \Rightarrow \angle \bar{S}E'N = \angle \Pi'_h = 36;35^\circ.$$

Da

$$\angle XE'_2 = \frac{1}{2} \angle BE'_2 = 84;30^\circ$$

fås

$$\angle \Pi'_h E'_2 = \angle XE'_2 - \angle \Pi'_h = 47;55^\circ.$$

Approximationerne $\bar{\kappa}'_i$ findes nu

$$\bar{\kappa}'_2 = \angle A'_h E' E'_2 = 180^\circ + 47;55^\circ = 227;55^\circ$$

og

$$\bar{\kappa}'_3 = \angle A'_h E' E'_3 = \bar{\kappa}'_2 + \bar{\delta}_2 = 294;5^\circ$$

og

$$\bar{\kappa}'_1 = \angle A'_h E' E'_1 = \bar{\delta}_3 + \bar{\kappa}'_3 = 28;15^\circ.$$

Copernicus vælger her at stoppe processen under påstand af, at de fremkommende resultater er alt for dårlige. Der skal her huskes på, at iterationsprocessen hele tiden frembringer mere præcise resultater, så de fundne resultater kan ikke forventes at være i overensstemmelse med det observerede. Det er derfor en smule underligt at Copernicus allerede giver op efter et skridt. Han synes dog at tro, at størrelsen af den approksimerede excentricitet enten er større eller mindre end den sande excentricitet, afhængig af hvilken planet det drejer sig om, for eftersom Ptolemaios for Jupiter producerede en mindre værdi i første skridt, er dette for Copernicus et indicium på at noget er galt. Istedet omregner han Ptolemaios' værdi $2e = 5;30^p$ hvor $r = 60^p$ til enheden hvor $r = 10000^p$ og tager denne som det endelige resultat, dvs. Copernicus får:

$$2e = 917^p \Rightarrow e_1 = \frac{3}{4} \cdot 2e = 687^p \text{ og } e_2 = \frac{1}{4} \cdot 2e = 229^p \quad (5.6.8)$$

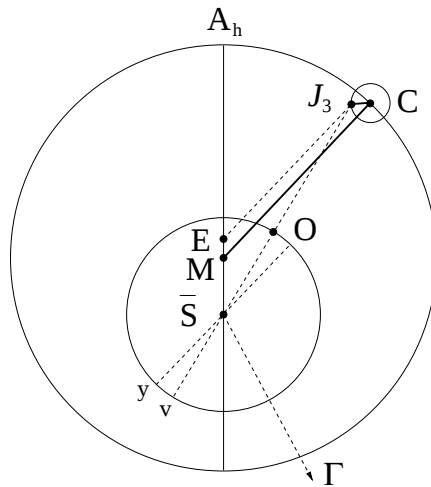
Endvidere sætter han:

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_1 &= 45;2^\circ \\ \bar{\kappa}_2 &= 244;42^\circ \\ \bar{\kappa}_3 &= 310;52^\circ. \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

Sandsynligvis har han udregnet dette på basis af den fundne $2e$ -værdi.¹⁸

Apogæets længdegrad: Situationen ved opposition J_3 er vist i Fig. 5.21.

¹⁸Copernicus' udledning af $2e$ behandles i [NeSw84, s. 341–346].



FIGUR 5.21

Med $\bar{\kappa}_3 = 310;52^\circ$ findes fra 5.5.4 at $p = 3;51^\circ$. Endvidere er $\alpha_3 = 180^\circ$ og $q = 0^\circ$ ved opposition (fremgår af Fig. 5.15).

Heraf fås nu:

$$\bar{\alpha}_3 \stackrel{5.5.8}{=} \alpha_3 + p = 183;51^\circ$$

og

$$\bar{\lambda}_3 \stackrel{5.5.6}{=} \lambda_3 - p = 109;52^\circ.$$

Endelig haves

$$\boxed{\lambda_A \stackrel{5.5.2}{=} \bar{\lambda}_3 - \bar{\kappa}_3 = 159^\circ} \quad (5.6.10)$$

Dette er apogæets længdegrad på tidspunktet for den 3. opposition. På tidspunktet for Ptolemaios' 3. opposition findes $\lambda_A = \lambda_A^{\text{r}} - \pi = 161^\circ - 6;38^\circ = 154;22^\circ$. Heraf slutter Copernicus at apsidelinien har roteret ca. $4;30^\circ$ mod øst i løbet af ca. 1392 eg.år, hvilket giver:

$$\boxed{\omega_A = 4;30^\circ / 1392 \text{ eg.år} = 0;0,12^\circ / \text{eg.år}} \quad (5.6.11)$$

For alle planeterne finder Copernicus at deres apsidelinier har en selvstændig østlig rotation, i modsætning til de siderisk faste apsidelinier i *Commentariolus*.

Jupiterbanens radius r : Til bestemmelse af jupiterbanens radius anvender Copernicus ligesom Ptolemaios en observation af Jupiter udenfor opposition:

Obs. J_4	Dato t_4	Længdegrad $\lambda(t_4)$
4	18/2. 1520, + 6h	205;9°

TABEL 5.17. Observation af Jupiter udenfor opposition.

Tidsforskellen mellem J_4 og epoke nr. 4 er: $\Delta t_3 = 1520 \text{ eg.år } 62;15 \text{ dg}$.
Fra solteorien og middelbevægelsen i parallaktisk anomali findes hhv.

$$\bar{\lambda}_\odot = 309;16^\circ \text{ og } \bar{\alpha} = 111;15^\circ$$

Fra 5.5.3 og 5.4.2 findes hhv.

findes

$$\angle \bar{S}CM = 2; 21^\circ \Rightarrow \angle \bar{S}CJ_4 = 39; 1^\circ + 2; 21^\circ = 41; 22^\circ.$$

$\triangle \bar{S}CJ_4$: I denne trekant kendes atter to sider $\bar{S}C$ og $CJ_4 = \frac{1}{3}e_1 = 229^p$ i enheden hvor $r = 10000^p$, samt vinklen $\angle \bar{S}CJ_4$. $J_4\bar{S}$ udregnes heraf fra metoden i bog 1, XIII pkt. IIII. Betragt Fig. 5.24.

$J_4D = CJ_4 \frac{1}{2} \text{crd} 2(\angle \bar{S}CJ_4) = 151^p$ og $DC = CJ_4 \frac{1}{2} \text{crd} 2(90^\circ - \angle \bar{S}CJ_4) = 172^p$ og

$$\bar{S}D = \bar{S}C - DC = 10371^p.$$

Pythagoras giver nu

$$J_4\bar{S} = [(J_4D)^2 + (\bar{S}D)^2]^{\frac{1}{2}} = 10373^p.$$

Da

$$J_4\bar{S} = \frac{J_4D}{\frac{1}{2} \text{crd} 2(\angle \bar{C}S J_4)} \Rightarrow \angle \bar{C}S J_4 = 0; 50^\circ$$

fås i Fig. 5.22

$$\angle MZ\bar{S} = -p = 2; 21^\circ + 0; 50^\circ$$

og heraf

$$\angle J_4\bar{S}M = \bar{\kappa} + p = \kappa = 35; 50^\circ.$$

Som ved addition til λ_A (5.6.10) giver

$$\angle \Gamma\bar{S}J_4 = 194; 50^\circ.$$

$\triangle \bar{S}OJ_4, r_O = 10000^p$: Fra 5.5.2 og 5.5.6 fås nu

$$\angle OJ_4\bar{S} = -q = 205; 9^\circ - 194; 50^\circ = 10; 19^\circ$$

$\Downarrow_{5.5.8}$

$$\angle v\bar{S}O = \alpha = 114; 26^\circ \Rightarrow \angle O\bar{S}J_4 = 65; 34^\circ.$$

Fra 5.5.9 have

$$\angle J_4O\bar{S} = 360^\circ - \eta = 104; 7^\circ.$$

Alle vinklerne i $\triangle \bar{S}OJ_4$ er nu kendte. Ved brug af kordetabellen findes:

$$J_4\bar{S}/\bar{S}O = \frac{1}{2} \text{crd}(208; 14) / \frac{1}{2} \text{crd}(20; 38) = 9698/1791.$$

I enheden hvor $r = MC = 10000^p$ var $J_4\bar{S} = 10373^p$. I samme enhed fås nu

$$R = 1916^p.$$

I enheden $r = 60^p$ er $R \approx 11; 30^p =$ radius af den ptolemæiske epicykel.

Sættes $R = 1^p$ findes r i enheder af jordbanens radius til

$$\boxed{r = 5; 13, 9j.r} \text{ hvor } j.r \text{ står for jordbane radier.} \quad (5.6.12)$$

Dette vigtige resultat udspringer let og elegant fra Copernicus' system, i modsætning til Ptolemaios' geocentriske system, som er ude af stand til at give nogen form for vurdering af planeterne indbyrdes afstande, med mindre selvfølgelig man som Copernicus kender de ptolemæiske epicyklers virkelige årsag. I bog 4, XIX bestemmer Copernicus, ved samme metode som Ptolemaios, afstanden til Solen når Jorden er i aphelion. Denne findes til $1179r_{jord}$ ($1r_{jord}$ er Jordens radius), altså ca. samme værdi som Ptolemaios'. Copernicus benytter dog ikke denne værdi til at finde planetbanernes radier i enheden r_{jord} .

Kendes jupitermodellens konfiguration til et bestemt tidspunkt, kan man ved hjælp af middelbevægelsestabellerne regne tilbage og finde konfigurationen ved epokerne. Copernicus opgiver kun epokeværdien for $\bar{\alpha}$ som via 5.5.3 giver værdien af

$\bar{\lambda}(t_0)$. Epokeværdierne for Jupiter og de andre ydre planeter er givet i tabel. 5.18. De andre parametre findes i tabel 5.19.

	$\bar{\alpha}(t_0)$		
Epoke	Mars	Jupiter	Saturn
1	344;21°	27;18	134;54°
2	120;39°	138;10	148;1°
3	111;25°	-	35;21°
4	238;22°	98;16	205;49°

TABEL 5.18

Planet	Geometriske parametre				Kinematiske parametre		
	$2e_p$	e_1_p	e_2_p	$r_{j.r}$	λ_A°	$\omega_{\bar{\alpha}}^\circ/\text{eg.år}$	$\omega_A^\circ/\text{eg.år}$
Mars	1960	1460	500	1;31,11	119;40	168;28,30,36,4	-
Jupiter	917	687	229	5;13,9	159	329;25,8,15,6	0;0,12
Saturn	1139	854	285	9;10	240;21	347;32,3,9,40	0;0,36

TABEL 5.19

$$\text{I enheden hvor } r = 60^p, \text{ er } 2e = \begin{cases} 11;46^p & \text{for Mars} \\ 5;30^p & \text{for Jupiter} \\ 6;50^p & \text{for Saturn} \end{cases}$$

For Jupiter og Saturn er $2e$ næsten identiske med Ptolemaios' værdier. Den dobbelte excentricitet for marsbanen er derimod aftaget fra 2000^p til 1960^p . Denne reduktion overfører Copernicus udelukkende til e_1 , idet $\frac{3}{4} \cdot 2000^p = 1500^p$, $\frac{1}{4} \cdot 2000^p = 500^p$, men Copernicus sætter $e_2 = 500^p$ og $e_1 = 1460^p$.

Som tidligere nævnt tolker Copernicus denne reduktion som værende forårsaget af middelsolens bevægelse i forhold til Solens faste position.¹⁹ Det er klart fra Fig. 5.7 og 5.15 at bevægelsen af $\bar{S}$ bevirker en ændring i både e_1 og λ_A . Effekterne er dog kun synlige for Mars og Venus, hvilket kan forklares ved, at centrene for Saturns og Jupiters baner ligger for langt fra middelsolen, til at dennes bevægelse kan have nogen målelig effekt. Idet apsidelinien tilsyneladende bevægelse er en sammensætning af to bevægelser, undlader Copernicus i tabel 5.19 at give værdien af ω_A for Mars. For Venus er det dog kun excentriciteten som ændres, selvom apsidelinien såvel som for Mars burde variere. Årsagen til dette kan være, at Copernicus kun havde Ptolemaios' observationer at arbejde med og således vælger at holde apsidelinien fast, da ingen modstridende observationer var til rådighed. Men hvis dette er sandt, gør det blot problemet med reduceringen af venusbanens excentricitet mere interessant, da Copernicus jo i så fald måtte have en eller anden form for bekræftende data.

5.7. Udledelsen af det heliocentriske system

Hvad fik Copernicus til at udskifte det geocentriske system til fordel for et heliocentrisk? Dette spørgsmål gives der intet svar på, hverken i *Commentariolus* eller *De Revolutionibus*, hvilket naturligvis har givet grobund for mange forskellige teorier. Den måske bedste teori går lidt forsimplet ud på, at Copernicus satte sig for

¹⁹Copernicus har derfor sat Solen og ikke middelsolen i universets centrum.

at løse problemet med det variable tropiske år.²⁰ Løsningen af dette problem (ej færdiggjort i *Commentariolus*, men har dog givet visse antydninger) krævede en meget kompleks bevægelse af fiksstjernesfæren, hvilket igen krævede indførelsen af yderligere mekanismer. At hele den himmelske opstilling skulle have så mangfoldige bevægelser blot for at holde forårspunktet (som ikke engang giver et konstant år) fast, blev efterhånden en grotesk tanke for Copernicus. Da det sideriske år ikke havde vist sig variabel, blev det mere hensigtsmæssigt at sætte forårspunktet i bevægelse og lade fiksstjernesfæren være fast (bortset fra daglig bevægelse). Bevægelsen af forårspunktet kunne så tolkes som en bevægelse af polerne for den daglige bevægelse (hvormed skæringspunktet for ekliptikaplanet og ækvatorplanet ændres). Denne bevægelse skulle dog ikke, ligesom den daglige bevægelse, overføres til de underliggende sfærer. En simplere fortolkning er at overføre ækvatorplanets komplicerede bevægelsesmønstre til Jorden. Hermed var kimen til Jordens bevægelse blevet lagt.²¹

Om ovenstående beskriver sandheden, får vi nok aldrig svar på og så længe denne ikke er kendt, kan vi kun tilslutte os andres meninger eller selv konstruere nye teorier, der som de andre, naturligvis er rent spekulative.

I nedenstående vil jeg give en mulig sammenhæng mellem Copernicus' modeller og datidens kosmologi (dvs. den ptolemæiske/aristoteliske kosmologi). Jeg vil vise, hvordan kosmologien kan have og har haft en indflydelse på Copernicus' valg af "egnede" modeller og således har kunnet lede ham i retning af et heliocentrisk system. Jeg vil ligeledes argumentere i forsvar for denne teori og se på hvilke indicier der taler herfor.²²

Fra *Commentariolus* vides at Copernicus' oprindelige indgangsvinkel var den samme som Maragha astronomernes, nemlig at løse equantproblemet. For kort at resumere, er equantproblemet den uoverensstemmelse der opstår mellem Ptolemaios' brug af equantpunktet og modellernes repræsentation som sammensat af fysisk virkelige sfærer. Eftersom materielle sfærer styrer planeternes bevægelse, skal den resulterende bevægelse være en sammensætning af uniformt cirkulære bevægelser, PUC. Der er i *Commentariolus* ingen grund til at tvivle på, at Copernicus virkelig troede på eksistensen af disse sfærer, selvom materialiteten aldrig nævnes direkte. Det må således antages at samhörighed med sfærenes fysiske tilstedeværelse og ikke blot med PUC, har været et kriterium for Copernicus, når han skulle vurdere om en given model var mulig eller ej.

I nedenstående betragter jeg de ydre planeter.

Da Copernicus' oprindelige mål var at eliminere equantproblemet, som udelukkende er tilknyttet 1.anomali, er det højst sandsynligt at han ligesom Shatir kom frem til model 1 i Fig. 5.25, som helt og holdent består af uniformt roterende, konstant længde, vektorer.²³ I denne model er det ikke svært at bytte rundt på vektorenes summationsorden og herved undersøge andre, men ækvivalente modeller. Eftersom han lige havde undersøgt den 1.anomali, er det muligt at han satte sig for at se nærmere på den 2.anomali og derfor flyttede rundt på den ptolemæiske epicykel, til

²⁰I forordet til *De Revolutionibus* nævnes uenigheden om årets længde, som en af årsagerne til Copernicus' søgen efter et alternativt arrangement af de himmelske legemer.

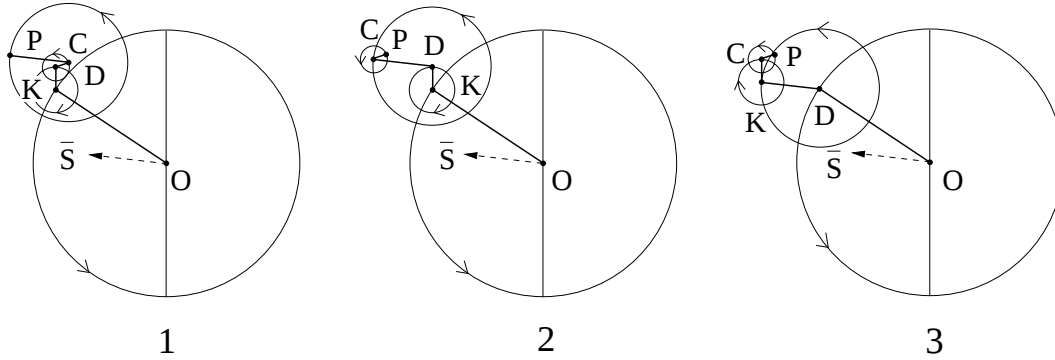
²¹Om denne teori se [Rv65].

²²Jeg vedkender at jeg med mit manglende kendskab til teorierne for Merkur, Månen og breddegraden, kan have overset vigtige detaljer af betydning for udledelsen af modellerne.

²³Om hvorvidt Copernicus havde kendskab til Maragha astronomernes opdagelser, vides ikke.

han opdagede det heliocentriske system. En anden mulighed, som endda har en logisk årsag, er som tidligere nævnt (s. 47) at Shatirs model for Saturn, giver en skæring mellem den sekundære og primære epicykel, som er uforenlig med opfattelsen af sfærene som værende materielle.

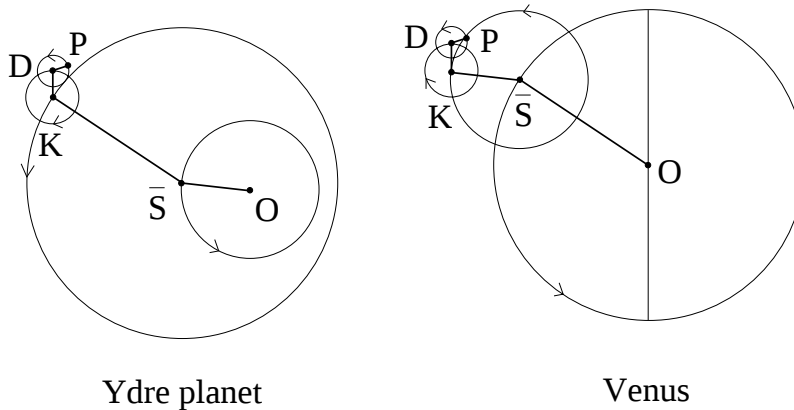
Med Copernicus' værdier fra *Commentariolus* giver dette sig udtryk ved: $R = 25^p < 26; 15^p = e_1 + e_2$. Placeringen af den ptolemæiske (den primære) epicykel som vist i model 1, Fig. 5.25, er derfor forkert.



FIGUR 5.25

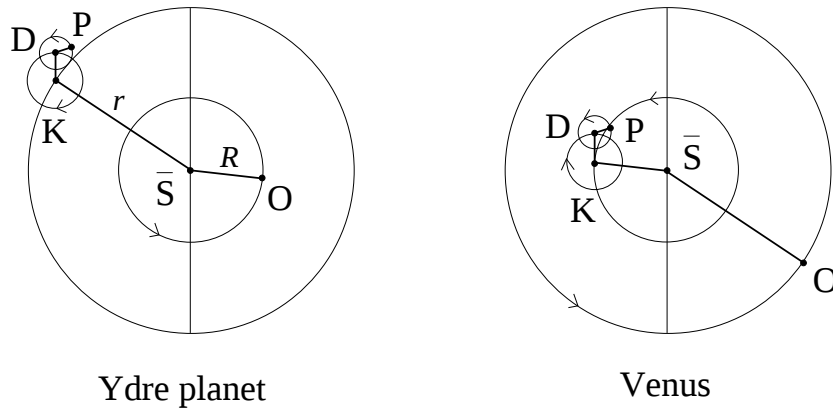
Copernicus er herefter gået igang med at finde en anden placering. Dette leder ham gennem model 2 og 3 i Fig. 5.25, som dog giver ligeså uheldige gennemskæringer af sfærer som model 1. For model 2 vil epicykletten få problemer med den sekundære epicykel. I model 3 skærer epicykletten igennem centeret af den primære epicykel, hvilket betyder at repræsentationen af de små epicykler, som båret af den primære epicykel i rummet defineret ved dens tykkelse, ikke holder stik. Da de tre modeller ikke kan bevare sfærene intakte, må de forkastes som repræsentationer for de virkelige mekanismer (for alle tre modeller kan disse problemer løses ved at flytte den sekundære epicykel ind omkring Jorden).

Copernicus mangler nu blot at afprøve en enkelt placering af epicyklen, nemlig omkring Jorden. Herefter opnås et geo-heliocentrisk system ved identificeringen af epicyklens roterende vektor, som beskrivende bevægelsen af middelsolen, se Fig. 5.26. For Venus er det vektoren i deferenten som peger mod middelsolen, hvorfor den geo-heliocentriske model for Venus får udseendet som vist i Fig. 5.26.



FIGUR 5.26. Geo-heliocentrisk.

Ved nu at holde middelsolen fast, fås det heliocentriske system som vist i Fig. 5.27. Begge disse systemer muliggør en absolut bestemmelse af planeternes afstand til middelsolen i enheder af jordbanens radius. Fra tabel 4.2 ses dog at marsbanen i det geo-heliocentriske system ikke når ud over jordbanen ($25^p = r_{\text{jordbane}} < r_{\text{marsbane}} = 38^p < 50^p = 2r_{\text{jordbane}}$), hvorved en uheldig gennemskæring atter opstår. Copernicus løser dette problem ved at sætte Jorden i bevægelse, se Fig. 5.27. Det heliocentriske system er hermed opstået.



FIGUR 5.27. Heliocentrisk.

Bemærk at denne forklaring også giver svaret på hvorfor Copernicus, i *De Revolutionibus* for de ydre planeter, ikke overfører epicykletten, sammen med den sekundære epicykel. Hvis disse to cirkler (betragt Fig. 5.27 for ydre planet) flyttes ind til $\bar{S}$, således at K ligger i $\bar{S}$, da vil der for Saturn, med værdierne fra *De Revolutionibus*, gælde at:

$$KD + DP = e_1 + e_2 = 854^p + 285^p = 1139^p \text{ i enheden hvor } r = 10000^p.$$

I denne enhed er $R = 10000^p / 9; 10 \approx 1091^p$, hvilket betyder da

$$854^p - 285^p = 569^p < 1091^p < 1139^p,$$

at jordsfæren gennemskærer den mindre sfære, repræsenteret ved epicykletten, i modstrid med sfærenes materialitet.²⁴

Bemærk endvidere at teorien medfører, at Jordens omløb om Solen var den første jordbevægelse Copernicus opdagede. Dette stemmer med *Commentariolus*, hvori han omtaler Jordens årlige omløb som dens første bevægelse. Eftersom Jordens egenrotation er en naturlig konsekvens af den første bevægelse, er egenrotationen Jordens anden bevægelse, ligeledes som omtalt i *Commentariolus*. Heraf sluttes at fiksstjernesfæren er fast, hvorfor det er Jorden, som er skyld i præcessionsbevægelsen. Følgelig er et referenceskift påkrævet og Copernicus afskriver forårspunktet til fordel for fiksstjernerne. Det følger heraf at overvejelser vedrørende præcessionen, først er opstået efter det heliocentriske systems tilblivelse. Dette er årsagen til, at præcessionsteorien i *Commentariolus* endnu ikke er helt færdig udviklet.

At Copernicus satte Jorden i bevægelse om Solen som følge af, at han først indså at den roterede om egen akse, som nævnt i *De Revolutionibus* bog 1, IX, finder jeg

²⁴På trods af at Copernicus i *De Revolutionibus* ikke er en så tydelig tilhænger af de planetbærende sfærer som i *Commentariolus* og ej heller nævner noget om sfærenes fysiske natur, finder jeg det plausibelt at Copernicus, i overensstemmelse med sin tids kosmologi, udarbejdede sine modeller med de materielle sfærer i baghovedet.

mindre attraktivt. Man skal også huske på at *De Revolutionibus* jo er værket, hvori Copernicus skal overbevise verden om det nye systems sandhedsværdi. Ses bort fra de tekniske dele, gøres dette ved flere forskellige metoder, dels trækker han på gamle autoriteter, som har haft samme mening, dels beskriver han det nye system og især Solens position i meget poetiske vendinger²⁵ og dels starter han med den bevægelse af Jorden, som er lettest at fordøje nemlig egenrotationen. For selvfølgelig virker det da meget fornuftigt, at det er Jorden og ikke hele himlen som roterer.

Da Copernicus i bog V,II ligesom i *Commentariolus* angiver overensstemmelsen med PUC som grunden til, at han i det hele taget begyndte at overveje Jordens bevægelse, ser jeg det rimeligt at antage, at Copernicus ikke havde et heliocentrisk system i tankerne fra begyndelsen. Systemet er derimod opstået som et forsøg på at opfylde PUC og samtidens opfattelse af de materielle sfærer, som omtalt.²⁶

Hvad overbeviser så Copernicus om at dette arrangement af sfærer, på trods af afvisningen af Jorden som universets centrum, er den skinbarlige sandhed? Svaret er højst sandsynlig mere af æstetisk natur end filosofisk og ihvert fald ikke empirisk, eftersom de viste modeller alle giver samme numeriske resultater af planeterne bevægelse. Som understøttelse for denne påstand behøver man bare at læse flg. passager fra *De Revolutionibus*:

1. *For hvem i dette smukkeste af templer kan placere denne lampe på et andet eller bedre sted end dette, hvorfra den kan oplyse alt på samme tid.*²⁷
2. *I dette arrangement opdager vi derfor en fantastisk symmetri af universet samt en fastslået harmonisk sammenhæng mellem bevægelsen af sfærene og deres størrelse, som ikke kan findes på nogen anden måde.*²⁸

Fra Copernicus' forord i *De Revolutionibus* til pave Paul III:

3. *...deres (tidligere astronomer) erfaring var som en der fra forskellige steder tog hænder, fødder, et hoved og andre dele, ganske godt afbildet, men ikke for repræsentationen af en enkelt person, idet delene overhovedet ikke passede sammen, så at man snarere sammensatte et monster end et menneske.*²⁹
4. *...hvis planeterne bevægelser korreleres med den kredsende Jord og beregnes for hver enkelt planets kredsløb, da følger ikke blot deres tilsyneladende bevægelser, men også rækkefølgen og størrelsen af planetsfærene og himlen selv er så sammenhængende at på intet sted kan noget flyttes uden at forstyrre de resterende dele og universet som et hele.*³⁰

Copernicus har altså simpelthen set den æstetiske skønhed og harmoni som medfølger et heliocentrisk univers, hvorfor det ikke kan være andet end sandheden. Se blot

²⁵Jeg er dog ikke i tvivl om, at Copernicus virkelig så skønheden i sit nye system og at hans poetiske vendinger er et forsøg på at dele sin indsigt med læserne.

²⁶Uanset hvor sandfærdig denne teori er, er det i hvert fald interessant, at det var muligt for Copernicus at udlede heliocentrismen, udelukkende ved brug af den kosmologiske hypotese om himlens bevægelser som sammensatte af jævnt roterende sfærer.

²⁷Citat fra [Ro78, s. 22].

²⁸Fra [Ro78, s. 22].

²⁹Fra [Ro78, s. 4].

³⁰Fra [Ro78, s. 5].

hvorledes nedenstående fænomener udspringer som naturlige konsekvenser af det heliocentriske system.

- 2. anomal og nogle fænomener forbundet hermed:
 - a: Den retrograde bevægelse følger for de ydre planeter fra Jordens bevægelse og for Venus fra dens egenbevægelse om Solen.
 - b: Størrelsesforskellene af de retrograde loops planeterne imellem, skyldes deres afstand til Solen.
 - c: Oppositioner af ydre planeter opstår naturligt i midten af de retrograde buer da Solen, Jorden og den ydre planet står på samme linie i den givne rækkefølge.
- Relationen til middelsolen:
 - a: For de ydre planeter skyldes sammenhængen mellem planetens bevægelse på den ptolemæiske epicykel og middelsolens bevægelse, at bevægelsen på epicyklen blot er en afspejling af Jordens egenbevægelse om Solen.
 - b: Bevægelsen af centret for den ptolemæiske epicykel i venusmodellen er relateret til middelsolen, da centret faktisk er nær Solen.
 - c: Relationen til middelsolen er skyld i planeterne opdeling i ydre og indre planeter, hvor de ydre kan have enhver elongation, mens de indre har en maksimal elongation. Dette følger ved at de ydre planets bane omslutter Jordens, mens jordbanen omslutter de indre planets baner.

Udover at forklare ovenstående fænomener ved blot at sætte Jorden i bevægelse, muliggør det heliocentriske system en absolut afstandsbestemmelse i enheder af jordbanens radius.³¹ Dette giver endvidere en sammenhæng mellem planeterne afstand til middelsolen og deres omløbstider, som ikke kan opnås på nogen anden måde. Copernicus nævner alle disse forhold i enten *Commentariolus* eller *De Revolutionibus*.

Om hvorvidt Copernicus var bekendt med nogle af Maragha astronomernes modeller, vides som sagt ikke.³² Uanset om Copernicus selv konstruerede disse modeller eller ej, vil det ikke svække hans position i astronomiens historie, idet opdagelsen af præcise modeller allerede var blevet gjort af Ptolemaios. Copernicus' store opdagelse var at give solsystemet dets rette overordnede konfiguration, dvs. han satte planeterne i den rigtige rækkefølge.

³¹I modsætning til Ptolemaios' afstandsbestemmelse i *Hypoteserne*, kræver dette ingen yderligere antagelser, men er en naturlig konsekvens af systemet.

³²Se bl.a. [Sa94.a, s. 245–304] og [NeSw84, s. 47–48] om Copernicus' relation til Maragha skolen.

KAPITEL 6

Kepler bevægelsen

6.1. Introduktion

I begyndelsen af 1600 tallet fandt Johannes Kepler (1571–1630), på basis af observationer foretaget af Tycho Brahe (1546–1601), flg. tre love for planeternes bevægelse:

- 1: En planets bane er en ellipse med Solen S i det ene brændpunkt.
- 2: Radiusvektoren $\mathbf{r}$ fra Solen til en planet overstryger lige store arealer i lige store tidsrum.
- 3: Planetbanernes perioder T i anden potens er proportionale med deres storakser a i tredje potens, dvs. $T^2 = ka^3$, hvor proportionalitetskonstanten k er ens for alle planeterne.

Disse love er korrekte i det idealiserede tilfælde, hvor kun planeten og Solen har en indbyrdes gravitationel vekselvirkning.

Planet	a $j.r$	a r_{jord}	T sid. år
Venus	0.72	16900	0.62
Jorden	1	23500	1
Mars	1.52	35700	1.88
Jupiter	5.20	122000	11.86
Saturn	9.54	224000	29.46

TABEL 6.1.

Planet	År 130		
	e	v_{Π} °	$\Delta\Pi$ °
Venus	0.008	105; 14	34; 27
Jorden	0.0175	70; 47	0
Mars	0.091	301; 41	129; 6
Jupiter	0.045	344; 35	86; 12
Saturn	0.062	56; 27	14; 20

TABEL 6.2.

Tabel 6.1 viser afrundede moderne værdier af a i enheder af jordbanens middelfradius $\approx 150 \cdot 10^6 km = 1j.r$ og Jordens radius $\approx 6370 km = 1r_{jord}$, samt T i enheden sideriske år. Da værdierne ikke ændrer sig betydeligt med tiden holdes de konstante. Det fremgår tydeligt, at det ptolemæiske systems dimensioner (se tabel 2.2, s. 33) slet ikke kommer i nærheden af de virkelige værdier. Mht. radius af fiksstjernesfæren skal det nævnes at afstanden til den nærmeste fiksstjerne ca. er $6.4 \cdot 10^9 r_{jord}$.

Tabel 6.2 viser for år 130¹ ca. værdier af excentriciteten e , positionen v_{Π} af perihelion

¹Da Ptolemaios' værdier for Solen (Jorden) er udregnet fra observationer identiske med Hipparchos, skal disse sammenlignes med teoretiske parameterværdier for omkring år 150 fvt: fra [Ne75, s. 1096] fås $e = 2;7^p$ og $\lambda_A = 65;58^\circ$.

regnet fra forårspunktet og endelig $\Delta\Pi$ defineret ved:

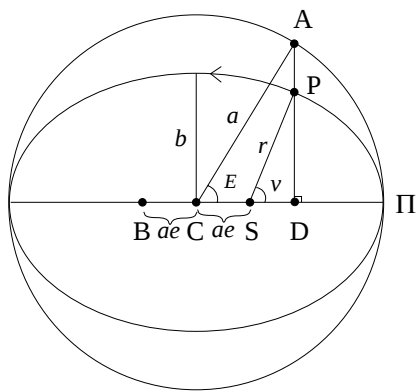
$$\Delta\Pi = \begin{cases} v_{\Pi}(\text{Venus}) - v_{\Pi}(\text{Jord}) & \text{for Venus} \\ v_{\Pi}(\text{Jord}) - v_{\Pi}(\text{ydre}) & \text{for ydre planet.} \end{cases} \quad (6.1.1)$$

Værdierne er udregnet på baggrund af oplysningerne i [Ne75, s. 1096] og skal udelukkende tages som vejledende værdier repræsenterende de virkelige parametre gældende for Ptolemaios' tidsperiode. I aktuelle udregninger vil parameterværdierne i denne tabel blive anvendt.

I nedenstående vil jeg se på hvilken relation planetmodellerne i dette speciale har til ellipsebevægelsen. Maragha astronomernes samt modellerne i *Commentariolus* behandles under et ved de ækvivalente modeller i *De Revolutionibus*, dog vil Shatirs overdrevne solmodel (s. 43) ikke tages i betragtning. Jeg vil endvidere begrænse behandlingen til kun at omhandle det idealiserede tilfælde (dvs. der ses bort fra langtidseffekter) samt reducere modellerne til 2.ordens approksimationer i excentriciteten. Da usikkerheden på observationer foretaget før Tycho Brahe er fastsat til ca. $0;10^\circ$, er det forsvarligt at se bort fra bidrag til vinkelafvigelsen af størrelsesordenen e^3 (maksimalværdi $\approx 8 \cdot 10^{-4} \text{ rad.} \approx 0;0,3^\circ$ for Mars). Det fremgår heraf, at der vil blive regnet i radianer.

6.2. Approksimeret Kepler bevægelse

Bemærk at såfremt $2e \leq \frac{1}{5}$ (dette er blot en tilstrækkelig vurdering) er de angivne grænsebetingelser for rækkernes konvergens opfyldte.² De anvendte rækkeudviklinger kan findes i standard formelsamlinger såsom "*Schaum's Mathematical handbook of formulas and tables*".



C: Ellipsens centrum.

B: Det andet brændpunkt.

E : $\angle PCA$ = excentrisk anomali.

v : $\angle P\pi S$ = korrekt anomali.

e : $BS/(2a) = (1 - \frac{b^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}$
= excentriciteten.

FIGUR 6.1.

Betragt Fig. 6.1.

Ligningen for ellipsen i polære koordinater med Solen S i origo er givet ved radiusvektoren $\mathbf{r} = (r;v)$.

Fra Keplers anden lov vides at ellipsearealet $\mathcal{A}(\Pi SP) = Kt$, hvor K er konstant og $t = 0$ i perihelion Π .

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Pi SP) &= \frac{b}{a} \mathcal{A}(\Pi SA) = \frac{b}{a} (\mathcal{A}(\Pi CA) - \mathcal{A}(\triangle SCA)) \\ &= \frac{b}{a} \left(\frac{E}{2\pi} \pi a^2 - \frac{1}{2} a^2 e \sin E \right) = \frac{ba}{2} (E - e \sin E) = Kt \Leftrightarrow \frac{2Kt}{ba} = E - e \sin E \end{aligned}$$

I løbet af en periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ har $\mathbf{r}$ overstrøget hele ellipsens areal, dvs:

²Dette er tilfældet for alle planeterne på nær Merkur.

$$\mathcal{A}(\text{ellipse}) = KT = \pi ab \Rightarrow \frac{2KT}{ba} = 2\pi = \omega T \Leftrightarrow \frac{2K}{ba} = \omega.$$

Sættes nu $M = \omega t =$ middelanomalien, fås Keplers ligning:

$$\boxed{M = E - e \sin E} \quad (6.2.1)$$

Da

$$\begin{aligned} r^2 &= (\text{SD})^2 + (\text{DP})^2 = (\text{CD} - ae)^2 + ((\text{AD})_a^b)^2 = (a \cos E - ae)^2 + \left(\frac{b}{a} a \sin E\right)^2 \\ &= a^2(\cos^2 E + e^2 - 2e \cos E + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 E) = a^2(1 + e^2(1 - \sin^2 E) - 2e \cos E) \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (6.2.2)$$

og da

$$\cos E = \frac{r}{a} \cos v + e \quad (6.2.3)$$

fås

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e(\frac{r}{a} \cos v + e)) = a - er \cos v - ae^2 \Leftrightarrow r = a(1 - e^2)(1 + \underbrace{\frac{e \cos v}{X}})^{-1} \\ &= a(1 - e^2)(1 - X + X^2 - \dots), \quad |X| < 1 \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Led med potenser af e større end 2 fjernes:

$$r = a(1 - X + X^2) - ae^2 \Leftrightarrow \boxed{r = a(1 - e \cos v - e^2 \sin^2 v)} \quad (6.2.5)$$

Fra 6.2.3 og 6.2.2 ses at:

$$\begin{aligned} r(1 + \cos v) &= (1 - e)(1 + \cos E) \quad \text{og} \\ r(1 - \cos v) &= (1 + e)(1 - \cos E) \end{aligned}$$

Ved division fås:

$$\frac{(1 - \cos v)}{(1 + \cos v)} = \frac{1+e}{1-e} \cdot \frac{(1 - \cos E)}{(1 + \cos E)}, \quad v/2 \text{ og } E/2 \text{ befinder sig i samme kvadrant}$$

$\Updownarrow$ Kvadratroden tages på begge sider.

$$\boxed{\tan \frac{v}{2} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} \tan \frac{E}{2}} \quad (6.2.6)$$

Fra 6.2.1 og 6.2.6 kan v nu udvikles til en række i e og M .³

Resultatet til 2.orden i e er:

$$\boxed{v = \omega t + 2e \sin \omega t + \frac{5}{4}e^2 \sin 2\omega t} \quad (6.2.7)$$

Endelig skal det bemærkes at planeten P, set fra Solen S, bevæger sig uniformt om et punkt forskudt $2ae +$ (led af orden større end 2) fra Solen mod aphelion.⁴ Dvs. at til 2.orden vil planeten bevæge sig uniformt om punktet B, som således fungerer som et equantpunkt. I tilfældet hvor P er Jorden, betyder dette at B er middelsolen.

³Se [Sm31, s. 118–120].

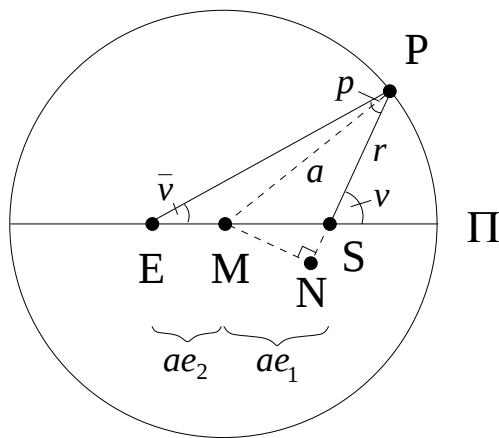
⁴Dette er vist i [Ma88, s. 375–378].

6.3. Approksimationer til Kepler bevægelsen, vha. cirkelbevægelser

I nedenstående indgår kun led indeholdende $(e_1^n e_2^m)$ for $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ordnen af et led defineres som summen $n + m$. I udregningerne udvikles udelukkende til potensrækker, hvorfor et led af orden f.eks. n ved rækkeudviklingen genererer andre led af orden mindst n . Det er derfor tilladt at kassere led af orden større end 2 så snart de opstår.

Da planeten i Fig. 6.1 bevæger sig uniformt om punktet B sættes equantpunktet E i nedenstående modeller lig B, dvs. $2e = e_1 + e_2$ og a sættes lig deferentens radius. Vurderingen $e_1 + e_2 \leq \frac{1}{5}$ sikrer atter rækkernes konvergens.

6.3.1. Equantmodellen. Fig. 6.2 viser en planets bane approksimeret ved en equantmodel. Planeten bevæger sig på en deferent, med radius a og centrum i M, uniformt om equantpunktet E.



FIGUR 6.2. Equantmodel.

Bevægelsesligningen for P i polære koordinater er givet ved $\mathbf{r} = (r; v)$, hvor r udregnes fra figuren:

Pythagoras på $\triangle MPN$ og efterfølgende rækkeudvikling giver:

$$\begin{aligned} r &= a[(1 - e_1^2 \sin^2 v)^{\frac{1}{2}} - e_1 \cos v], \quad -1 < -e_1^2 \sin^2 v \leq 1 \\ &= a[(1 - \frac{1}{2}e_1^2 \sin^2 v - \frac{1}{8}e_1^4 \sin^4 v - \dots) - e_1 \cos v] \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{r = a(1 - e_1 \cos v - \frac{1}{2}e_1^2 \sin^2 v)} \quad \text{til 2.orden i } e_i\text{'erne.} \quad (6.3.1)$$

Ønsker nu den korrekte anomali v udtrykt som funktion af middelanomalien $\bar{v}$ dvs. som funktion af tiden. Betragt Fig. 6.2:

Sinusrelationen på $\triangle PSE$ giver:

$$\sin p = \frac{a(e_1 + e_2)}{r} \sin \bar{v} \Leftrightarrow p = v - \bar{v} = \sin^{-1}[a(e_1 + e_2)(r^{-1}) \sin \bar{v}] \quad (6.3.2)$$

Hvor

$$\begin{aligned}
 r^{-1} &= \frac{1}{a} \left[1 - \underbrace{\left(e_1 \cos v + \frac{1}{2} e_1^2 \sin^2 v \right)}_X \right]^{-1}, \quad |X| < 1 \\
 &= \frac{1}{a} (1 + X + X^2 + \dots) \\
 &= \frac{1}{a} \left(1 + e_1 \cos v + \frac{1}{2} e_1^2 \sin^2 v + e_1^2 \cos^2 v \right)
 \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

⇓ Da der i 6.3.2 multipliceres med et led af orden 1, kan led af orden 2 i 6.3.3 fjernes.

$$\begin{aligned}
 p &= v - \bar{v} = \sin^{-1} \left[\underbrace{(e_1 + e_2)(1 + e_1 \cos v)}_Y \sin \bar{v} \right], \quad |Y| < 1 \\
 &= Y + \frac{1}{6} Y^3 + \dots \\
 \Downarrow \\
 v &= \bar{v} + (e_1 + e_2)(1 + e_1 \cos v) \sin \bar{v}
 \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

På højre side substitueres v med $\bar{v} + p$:

$$\begin{aligned}
 v &= \bar{v} + (e_1 + e_2) \left\{ 1 + e_1 \cos \left[\bar{v} + \underbrace{(e_1 + e_2)(1 + e_1 \cos v)}_Z \sin \bar{v} \right] \right\} \sin \bar{v}, \quad |Z| < \infty \\
 &= \bar{v} + (e_1 + e_2) \sin \bar{v} \left\{ 1 + e_1 [(\cos \bar{v}) \cos Z - (\sin \bar{v}) \sin Z] \right\} \\
 &= \bar{v} + (e_1 + e_2) \sin \bar{v} \left\{ 1 + e_1 \left[(\cos \bar{v}) \left(1 - \frac{Z^2}{2!} + \dots \right) - (\sin \bar{v}) \left(Z - \frac{Z^3}{3!} + \dots \right) \right] \right\} \\
 \Downarrow \text{ Da leddene med } Z &\text{ har orden mindst 1 og disse multipliceres med et led af orden 2, kan led med } Z \text{ fjernes.} \\
 v &= \bar{v} + (e_1 + e_2) \sin \bar{v} (1 + e_1 \cos \bar{v}) = \bar{v} + (e_1 + e_2) \sin \bar{v} + e_1(e_1 + e_2) \sin \bar{v} \cos \bar{v} \\
 &= \bar{v} + (e_1 + e_2) \sin \bar{v} + \frac{1}{2} e_1(e_1 + e_2) \sin 2\bar{v}
 \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

⇕

$$\boxed{v = \omega t + (e_1 + e_2) \sin \omega t + \frac{1}{2} e_1(e_1 + e_2) \sin 2\omega t} \quad \text{til 2.orden i } e_i \text{'erne.} \tag{6.3.6}$$

6.3.2. Den excentroepicykliske model. Fig. 6.3 viser en excentroepicyklisk approksimation til Kepler bevægelsen. Planeten bevæger sig uniformt på en epicyklet med radius e_2 , hvis centrum C bevæger sig uniformt på deferenten med centrum M og radius a . Den samlede effekt af planetens bevægelse bliver en uniform bevægelse om equantpunktet E.

⇕

$$\boxed{v = \omega t + (e_1 + e_2) \sin \omega t + \frac{1}{2}(e_1^2 - e_2^2) \sin 2\omega t} \quad \text{til 2.orden i } e_i\text{'erne.} \quad (6.3.11)$$

Ønsker nu r udtrykt ved v :

I 6.3.7 substitueres $\bar{v}$ med $v - p$.

$$r = a[1 + (e_2 - e_1) \cos(v - p) + \frac{1}{2}(e_1 + e_2)^2 \sin^2(v - p)] = \\ a[1 + (e_2 - e_1)(\cos v \cos p + \sin v \sin p) + \frac{1}{2}(e_1 + e_2)^2 (\sin v \cos p - \sin p \cos v)^2]$$

Fra 6.3.10 ses at $\sin p = p$ har led af orden mindst 1, samt at leddene i rækkeudviklingen af $\cos p = 1 - \frac{p^2}{2!} + \dots$, $|p| < \infty$ alle på nær 1 har orden mindst 2, hvorfor man i ovenstående ligning kan se bort fra $\sin p \cos v$ i $(e_1 + e_2)^2$ -leddet og erstatte $\cos p$ med 1:

$$\begin{aligned} r &= a[1 + (e_2 - e_1)(\cos v + p \sin v) + \frac{1}{2}(e_1 + e_2)^2 (\sin v)^2] \\ &\stackrel{6.3.10}{=} a[1 + (e_2 - e_1)(\cos v + \sin \bar{v}(e_1 + e_2) \sin v) + \frac{1}{2}(e_1 + e_2)^2 (\sin v)^2] \\ &= a[1 + (e_2 - e_1)(\cos v + (\sin v \cos p - \sin p \cos v)(e_1 + e_2) \sin v) + \frac{1}{2}(e_1 + e_2)^2 (\sin v)^2] \\ &= a[1 + (e_2 - e_1)(\cos v + (e_1 + e_2) \sin^2 v) + \frac{1}{2}(e_1 + e_2)^2 (\sin v)^2] \\ &= a[1 - (e_1 - e_2) \cos v - (e_1^2 - e_2^2) \sin^2 v + \frac{1}{2}(e_1 + e_2)^2 (\sin v)^2] \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

⇕

$$\boxed{r = a[1 - (e_1 - e_2) \cos v + (e_2^2 - e_1^2 + \frac{1}{2}(e_1 + e_2)^2) \sin^2 v]} \quad (6.3.13)$$

Sandt til 2.orden i e_i 'erne.

6.3.3. 2.ordens sammenligninger af den heliocentriske længdegrad. Da den korrekte anomali er vinklen mellem perihelion og planeten, set fra Solen, er det den heliocentriske længdegrad modellerne beskriver og dermed er det kun den 1.anomali, som her undersøges.

Tillægges e_1 og e_2 særlige værdier i equantmodellen og i den excentroepicykliske model, udspringer syv interessante tilfælde, hvis tilhørende 2.ordens udtryk for v og r samt deres afvigelse fra Kepler bevægelsen, er afbildet i tabel 6.3 (i tabellen er a sat lig 1). Endvidere er Kepler bevægelsens udtryk for v og r taget med for overskuelighedens skyld. Model nr. 1,2,3,4 og 6 genkendes som værende approksimationer (der ses indtil videre bort fra de forskellige astronomers valg af "brændpunkter") til hhv. Ptolemaios' equantmodel, Ptolemaios' og Copernicus' dobbelt excentriske model (Hipparchs), en enkelt excentrisk model, den uniforme cirkulære bevægelse (ej approksimation) og Copernicus' (Urdis) excentroepicykliske model. Model nr. 5 og 7 er hhv. en tidligere model af Kepler og Brahes model. Model nr. 3 er interessant med henblik på en sammenligning med model 2, idet den første beskriver afstanden bedre end den anden, som så til gengæld er mere præcis i længdegraden.

Der ses af 5. kolonne at model 5 og 7 er mest præcise i deres forudsigelse af længdegraden (disse to modeller behandles ikke yderligere), mens 1 og 6 er lige gode, dårligst er naturligvis model 4. Af 7. kolonne fremgår dog at kun Ptolemaios', den

enkelt excentriske og Copernicus' model er fri for 1.ordens led i afvigelsen på afstanden og ydermere, at fejlen er halvt så stor hos de to første som hos Copernicus.⁵

Nr. i	e_1	e_2	v_i	Δv	r_i	Δr
Keplerbevægelsen						
0	e	e	$\omega t + 2e \sin \omega t + \frac{5}{4}e^2 \sin 2\omega t$	0	$1 - e \cos v - e^2 \sin^2 v$	0
Equantmodeller						
1	e	e	$\omega t + 2e \sin \omega t + e^2 \sin 2\omega t$	$\frac{1}{4}e^2 \sin 2\omega t$	$1 - e \cos v - \frac{1}{2}e^2 \sin^2 v$	$\frac{1}{2}e^2 \sin^2 v$
2	$2e$	0	$\omega t + 2e \sin \omega t + 2e^2 \sin 2\omega t$	$\frac{3}{4}e^2 \sin 2\omega t$	$1 - 2e \cos v - 2e^2 \sin^2 v$	$e \cos v + e^2 \sin^2 v$
3	e	0	$\omega t + e \sin \omega t + \frac{1}{2}e^2 \sin 2\omega t$	$e \sin \omega t + \frac{3}{4}e^2 \sin 2\omega t$	$1 - e \cos v - \frac{1}{2}e^2 \sin^2 v$	$\frac{1}{2}e^2 \sin^2 v$
4	0	0	ωt	$2e \sin \omega t + \frac{5}{4}e^2 \sin 2\omega t$	1	$e \cos v + e^2 \sin^2 v$
5	$\frac{5}{4}e$	$\frac{3}{4}e$	$\omega t + 2e \sin \omega t + \frac{5}{4}e^2 \sin 2\omega t$	0	$1 - \frac{5}{4}e \cos v - \frac{25}{32}e^2 \sin^2 v$	$\frac{1}{4}e \cos v - \frac{7}{32}e^2 \sin^2 v$
Excentroepicykliske modeller						
6	$\frac{3}{2}e$	$\frac{1}{2}e$	$\omega t + 2e \sin \omega t + e^2 \sin 2\omega t$	$\frac{1}{4}e^2 \sin 2\omega t$	$1 - e \cos v$	$e^2 \sin^2 v$
7	$\frac{13}{8}e$	$\frac{3}{8}e$	$\omega t + 2e \sin \omega t + \frac{5}{4}e^2 \sin 2\omega t$	0	$1 - \frac{5}{4}e \cos v - \frac{1}{2}e^2 \sin^2 v$	$\frac{1}{4}e \cos v - \frac{1}{2}e^2 \sin^2 v$

TABEL 6.3

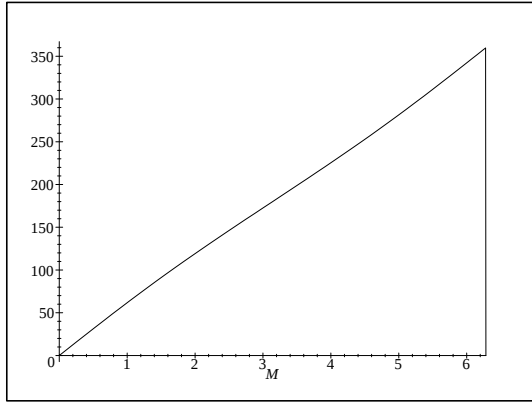
Model nr.	Δv_{max} <i>rad</i>	ωt <i>rad</i>	Δr_{max} <i>p</i>	v <i>rad</i>
1	$\frac{1}{4}e^2$	$\pi/4 + n\pi/2$	$\frac{1}{2}e^2$	$\pi/2 + n\pi$
2	$\frac{3}{4}e^2$	$\pi/4 + n\pi/2$	e	$n\pi$
3	$\approx e$	$n\pi/2$	$\frac{1}{2}e^2$	$\pi/2 + n\pi$
4	$\approx 2e$	$n\pi/2$	e	$n\pi$
6	$\frac{1}{4}e^2$	$\pi/4 + n\pi/2$	e^2	$\pi/2 + n\pi$

TABEL 6.4. $1^p = a$ og $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

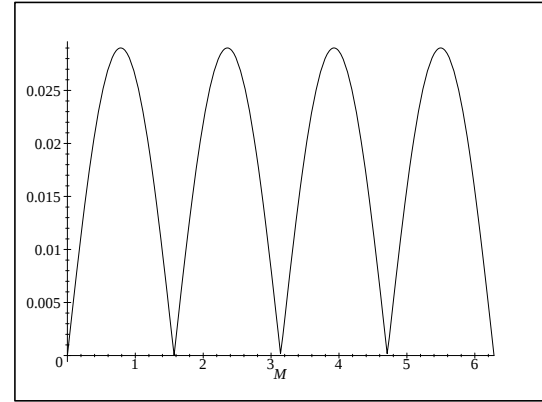
I tabel 6.4 er de maksimale afvigelser, samt deres position, afbildet for de fem relevante modeller. Det fremgår heraf, at den ptolemæiske equantmodel, med sin mere præcise vurdering af afstanden, giver en bedre beskrivelse af planeternes virkelige bevægelse. Angående planeternes bevægelse i heliocentrisk længdegrad er den copernicanske model dog ligeværdig og derfor et gyldigt alternativ til equantmodellen.

⁵Som det allerede er vist (se s. 76) buler den copernicanske model ud ved kvadraturene.

Dette siger dog ikke nødvendigvis noget om præcisionen af de egentlige modeller af Ptolemaios og Copernicus (som behandles senere), hvilket skyldes at de dels angiver geocentriske længdegrader og dels har middelsolen i det ene brændpunkt (dette har selvfølgelig ingen betydning i solmodellen).



FIGUR 6.4. Heliocentrisk længdegrad.



FIGUR 6.5. Afvigelse i heliocentrisk længdegrad.

Fig. 6.4 og 6.5 viser for Jupiter i et enkelt omløb hhv. den heliocentriske længdegrad og afvigelsen i heliocentrisk længdegrad, for model 1 og 6, som funktion af middelanomalien $M = \omega t$ (planeten antages at være i perihelion til tiden $t = 0$). Enheden på y og x-aksen er hhv. grader og radianer i begge figurer. I Tabel 6.5 kan den maksimale fejl, afrundet til nærmeste bueminut (1 bueminut = $0;1^\circ$), i heliocentrisk længdegrad aflæses for alle planeterne. Model 3 ses, ikke at være en konkurrent til model 2, hvilket er klart da den heliocentriske længdegrad ikke afhænger af afstanden.

Model nr.	Δv_{max} °				
	Venus	Jorden	Mars	Jupiter	Saturn
1 & 6	0;0	0;0	0;7	0;2	0;3
2	0;0	0;1	0;21	0;5	0;10
3	0;28	1;0	5;24	2;36	3;36
4	0;55	2;3	10;48	5;18	7;18

TABEL 6.5. Maksimal afvigelse i heliocentrisk længdegrad.

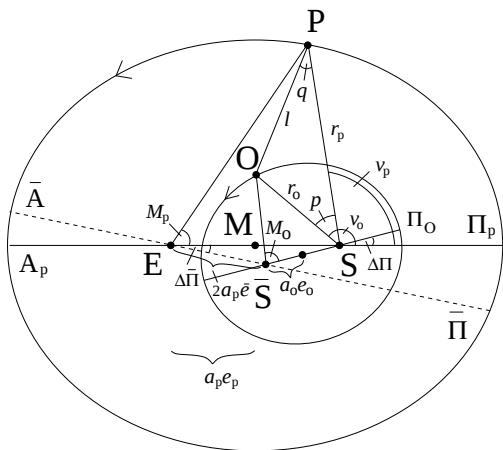
Kun de tre første modeller (undtagen model 2, for Mars og Saturn) viser afvigelser under måleusikkerheden på $0;10^\circ$, hvorfor de i praksis er uadskillelige fra Kepler bevægelsen. Ptolemaios havde derfor ingen grund til at udvikle solmodellen yderligere, men af hensyn til modellernes harmonisering kunne man ønske, at han også her havde indført et equantpunkt. Man skal dog huske på at Ptolemaios' primære mål var at finde matematiske modeller for planeterne bevægelse, så selvfølgelig indfører

han ikke et for ham unødvendigt equantpunkt. Observationer der ville kræve ændringer i solmodellen, er Solens tilsyneladende diameter, som i Ptolemaios' model er hhv. for stor og for lille i perigæet og apogæet, naturligvis uden Ptolemaios' vidende. Hvis han kunne lave præcise observationer (vanskeliggøres af den atmosfæriske aberration) af diameteren, havde han helt sikkert foretrukket equantmodellen.

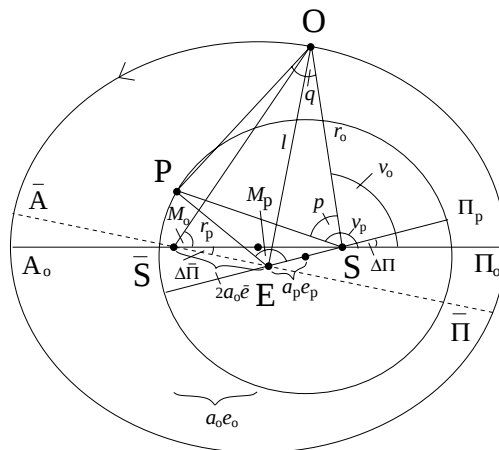
6.3.4. 2.ordens sammenligninger af den geocentriske længdegrad. Flg. notation benyttes:

1. Indexene o og p refererer til hhv. Jorden og den betragtede planet, hvorfor parametrene for disse (se tabel 6.1 og 6.2) bruges i det index markerede udtryk.
2. Indexene $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$ refererer til tabel 6.3.
3. Ved en (i, j) -model forstås en planet-Jord model af typen Fig. 6.6, hvor blot ellipsen for planeten og Jorden er erstattet med hhv. den approksimerede model i og j .

Problemet med beskrivelsen af den geocentriske længdegrad ligger i, at man skal sammensætte to approksimerede modeller; en for Jordens bane og en for planetens bane. Fig. 6.6 og Fig. 6.7 viser den elliptiske model, for hhv. en ydre planet og Venus, med Jordens bane indtegnet. Forskellen mellem de to figurer er at Jorden i venusmodellen bevæger sig i den store ellipse.



FIGUR 6.6. Elliptisk model for ydre planet.



FIGUR 6.7. Elliptisk model for Venus.

Ønsker nu at finde den geocentriske længdegrad af en ydre planet. Planeten og Jorden antages at være i hhv. Π_p og Π_o til tiden $t = 0$. Den geocentriske længdegrad v_g af en planet er dens længdegrad set fra Jorden regnet fra et bestemt punkt på himlen (f.eks. en fiksstjerne). I dette tilfælde defineres begyndelsespunktet ved retningen $E\Pi_p$, dvs. den geocentriske længdegrad er 0° , når retningen fra O til P er parallel og ensrettet med retningen $E\Pi_p$. Udtrykket for v_g findes af figuren:

Betragt Fig. 6.6.

v_o : $v_{0,o} + \Delta\Pi$ = heliocentrisk længdegrad af Jorden.

v_p : $v_{0,p}$ = heliocentrisk længdegrad af planeten P.

$$p = v_o - v_p$$

⇓

$$r_o = a_o r_{0,o}(v_{0,o})$$

$$r_p = a_p r_{0,p}(v_p)$$

⇓ Cosinusrelationen på $\triangle SOP$.

$$l = [r_o^2 + r_p^2 - 2r_o r_p \cos(p)]^{\frac{1}{2}}$$

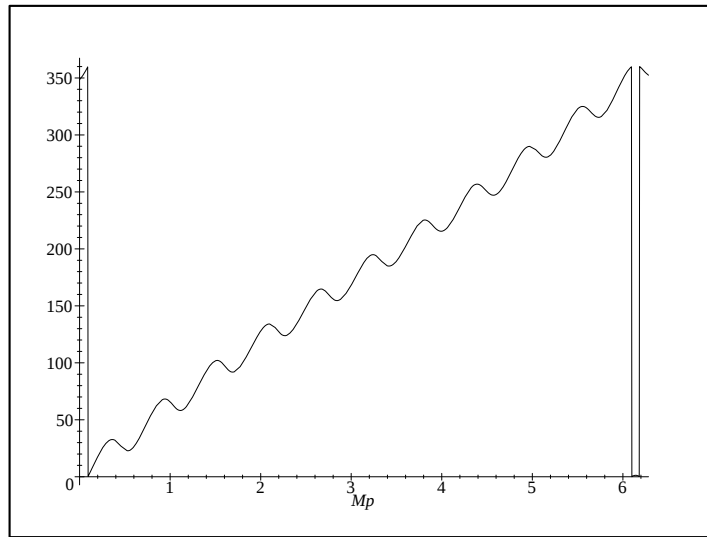
⇓ Sinusrelationen på $\triangle SOP$.

$$q = \sin^{-1}\left[\frac{r_o}{l} \sin p\right]$$

Den geocentriske længdegrad findes nu ved:

$$\boxed{v_g = v_p - q} \quad (6.3.14)$$

I Fig. 6.8 er denne afbildet for Jupiter i et enkelt omløb, og man bemærker straks de karakteristiske “savgakker” repræsenterende planetens tilsyneladende retrograde bevægelser.



FIGUR 6.8. Enheden på y og x-aksen er hhv. grader og radianer.

I tilfældet med Venus, beregnes den “venuscentriske” længdegrad af Jorden fra Fig. 6.7 ved den beskrevne metode. Adderes hertil 180° fås den geocentriske længdegrad af Venus.

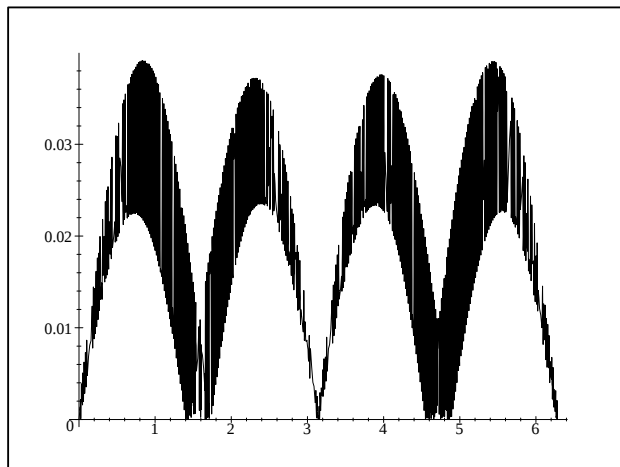
Ved at erstatte parrene $(v_{0,o}; r_{0,o})$ og $(v_{0,p}; r_{0,p})$ med hhv. $(v_{i,o}; r_{i,o})$ og $(v_{j,p}; r_{j,p})$, for $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, i ovenstående udregninger, kan den geocentriske længdegrad frembragt af forskellige (i, j) -modeller undersøges. Her tilføjes dog en begrænsning ved at den approksimerede model for den lille ellipse, ikke må være mere kompliceret end approksimationen for den store. Endvidere vil tilfældet hvor den lille ellipse er excentroepicyklisk undlades helt, da dette ikke har nogen reel historisk betydning.

Model	Planet			
	Venus	Mars	Jupiter	Saturn
	$\Delta v_{g,max}/^\circ$			
(1, 1)	0;1	0;32	0;2	0;4
(1, 2)	0;43	1;41	0;14	0;10
(1, 3)	1;14	2;54	0;16	0;10
(1, 4)	2;30	5;24	0;31	0;16
(2, 2)	1;22	14	0;50	0;31
(2, 3)	2;6	13;12	0;42	0;31
(2, 4)	3;12	13;36	0;55	0;37
(3, 2)	3;48	16;48	3;18	4;12
(3, 3)	2;48	17;36	3;18	4
(3, 4)	2;12	19;12	3;18	3;54
(4, 4)	5;30	34	6;36	7;54
(6, 1)	0;2	0;48	0;3	0;4
(6, 2)	0;43	1;37	0;14	0;11
(6, 3)	1;14	2;54	0;16	0;10
(6, 4)	2;30	5;24	0;31	0;16

TABEL 6.6. For Venus skal indexene for planet og Jord byttes om.

Tabel 6.6 giver estimerede værdier af den maksimale afvigelse fra Kepler bevægelsen, afrundet til nærmeste bueminut, for forskellige modelkombinationer. Estimeringen er foretaget ved aflæsning som flg. eksempel viser:

Fig. 6.9 viser for en (1,1)-model, afvigelsen i geocentrisk længdegrad, af Jupiter i et enkelt omløb. For at opnå flere forskellige Jord-Jupiter konfigurationer har jeg i Jordens equantmodel sat $M_o = 360M_p$, hvorved Jorden udfører et helt baneomløb for hver grad Jupiter bevæger sig.



FIGUR 6.9. Δv_g som funktion af M_p . Enheden på y og x-aksen er hhv. grader og radianer.

Af figuren aflæses direkte at $\Delta v_{g,max} \approx 0.04^\circ \approx 0;2^\circ$.

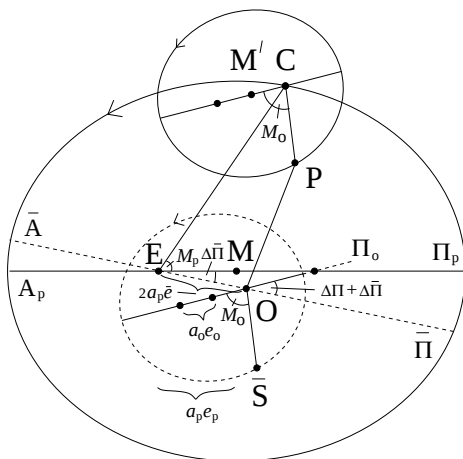
Af de givne estimeringer kan man gøre sig nogle generelle betragtninger. For de planeter som ligger langt fra Solen (Jupiter og Saturn), vinder man ikke ret meget ved at øge præcisionen af j -modellen. Afvigelserne ligger stort set i hvilken i -model der anvendes. For de planeter (Mars og Venus) beliggende noget nærmere Solen spiller både i og j -modellen en stor rolle, dog med vægten lagt på i -modellen. Jo mere præcis en i -model, jo mere følsom er den samlede effekt, af valget af j -model. Man kan klart konkludere, at modeller som ikke anvender en $i \in \{1, 6\}$ -model, giver alt for store afvigelser for Mars, til at de er brugbare. Groft betragtet er det kun $(1, 1)$ og $(6, 1)$ -modeller, som giver pæne resultater (afvigelsen for Mars er over måleusikkerheden, men alligevel stadig ganske pæn). På trods af model 2's gode heliocentriske resultater, kan den som set ikke påstås at lede til en tilfredsstillende model. I modsætning til det heliocentriske tilfælde spiller afvigelsen i afstanden nemlig en stor rolle, idet størrelsen af de retrograde buer afhænger af afstanden mellem Jorden og planeten. Som det ligeledes ses udgør fejlen i afstanden mellem Solen og planeten en større del (da deferenten dels er større og dels har en større excentricitet) af den samlede afvigelse end fejlen i afstanden mellem Solen og Jorden, hvorfor det især er vigtigt at afstanden er nogenlunde korrekt repræsenteret for deferentens vedkommende.

Hvilken af ovenstående modeller, ligger så egentlig nærmest den model som Ptolemaios faktisk benyttede? Umiddelbart kunne man fristes til at sige model $(1, 4)$, men sådan forholder det sig ikke, hvilket jeg vil se nærmere på i den resterende del af dette kapitel.

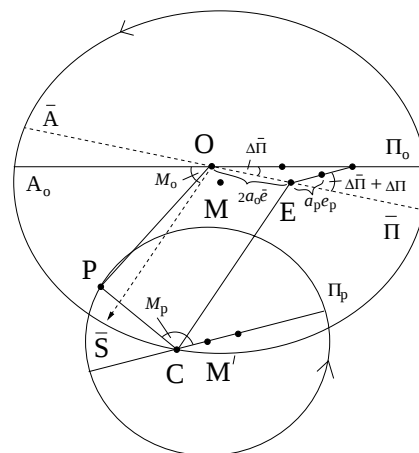
6.4. Ptolemaios' modeller i relation til Kepler bevægelsen

Jeg laver hovedsagelig denne behandling for Ptolemaios' modeller da de copernicanske er lavet i korrespondance hermed og således bygger på de samme metoder og observationer.

6.4.1. Excentriciteten og apsidelinien. For de ydre planeter er Ptolemaios' beskrivelse af den 1.anomali baseret på observationer af planeten i opposition med middelsolen. Reelt er det altså planetens bane relativt til middelsolen som bestemmes. Dette leder, ved flytning af Jorden til middelsolens plads, til den elliptisk epicykliske model afbildet i Fig. 6.10. Denne er ækvivalent med Fig. 6.6.



FIGUR 6.10. Elliptisk epicykelmodel for ydre planet.



FIGUR 6.11. Elliptisk epicykelmodel for Venus.

Bruges samme transformation i Fig. 6.7, for venusmodellen, og defineres den elliptiske deferent ved equantpunktet for bevægelsen på epicyklen, fås modellen i Fig. 6.11 som er ækvivalent med Fig. 6.7. Bemærk hvorledes den ydre planet og Venus ved bevægelsen på epicyklen, repræsenterer hhv. middelsolens tilsyneladende bane om Jorden og Venus' egen bane om Solen.

Ved formlen 6.3.14 beregnes den geocentriske længdegrad af en ydre planet fra retningen $E\Pi_p$. Beregnes istedet fra retningen $E\bar{\Pi}$ fås:

$$\boxed{v_g = v_p - q + \Delta\bar{\Pi}} \quad (6.4.1)$$

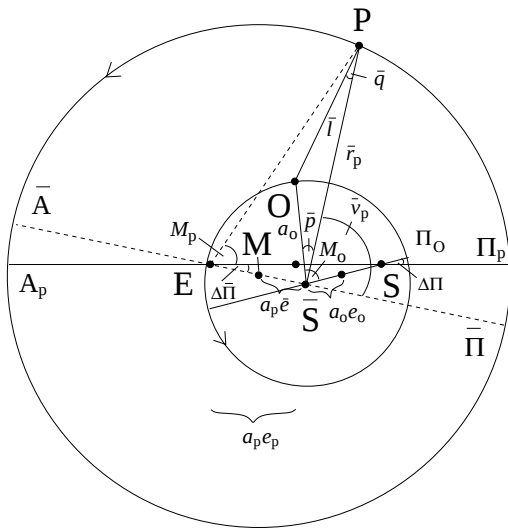
hvor $\Delta\bar{\Pi}$ findes ved brug af sinusrelationen på $\triangle SE\bar{S}$ i Fig. 6.6:

$$\Delta\bar{\Pi} = \sin^{-1}\left(\frac{2a_o e_o}{E\bar{S}} \sin \Delta\Pi\right), \text{ (for Venus erstattes } a_o e_o \text{ med } a_p e_p). \quad (6.4.2)$$

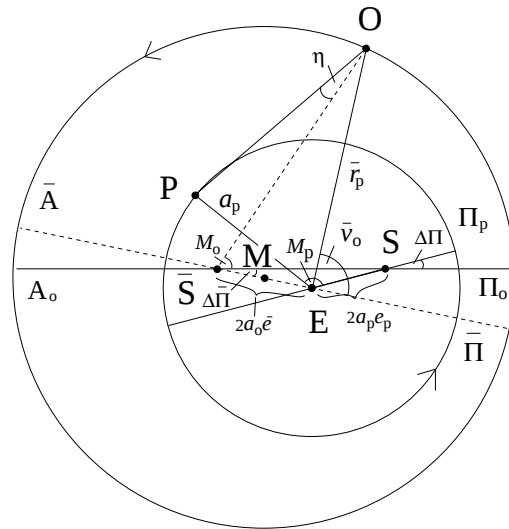
og $E\bar{S}$ findes af cosinusrelationen på samme trekant:

$$E\bar{S} = [(2a_o e_o)^2 + (2a_p e_p)^2 - 8a_o e_o a_p e_p \cos \Delta\Pi]^{\frac{1}{2}} \quad (6.4.3)$$

Betragt nu Fig. 6.6: Den geocentriske bevægelse af den ydre planet kan approksimeres ved at erstatte Jordens bane med en dobbelt excentrisk model og planetens bane med en equantmodel. Da det er bevægelsen relativt til middelsolen som bestemmes, er det afstanden $E\bar{S}$, Ptolemaios finder som den dobbelte excentricitet, herefter postuleres at deferentens centrum M befinder sig midt mellem E og $\bar{S}$ (EO i Fig. 6.10), hvilket ikke er rigtigt iflg. Fig. 6.10. Ptolemaios' model i heliocentrisk form er vist i Fig. 6.12. Ptolemaios' model for Venus viser sig ikke at være den samme, som den model der opstår i Fig. 6.7 ved at approksimere Jordens bane med en equantmodel og Venus' med en dobbelt excentrisk model, se Fig. 6.13. I Fig. 6.13 er deferentens centrum atter placeret midt mellem E og $\bar{S}$.

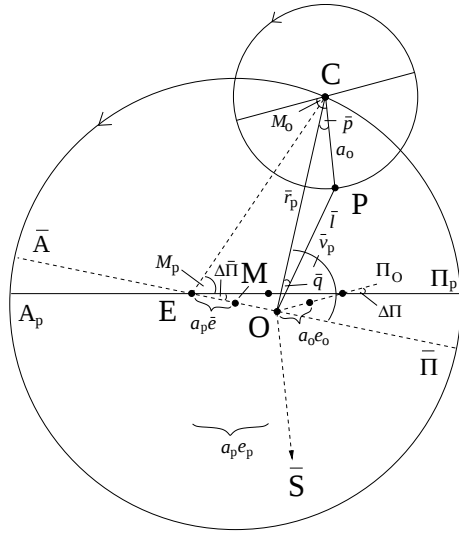


FIGUR 6.12.

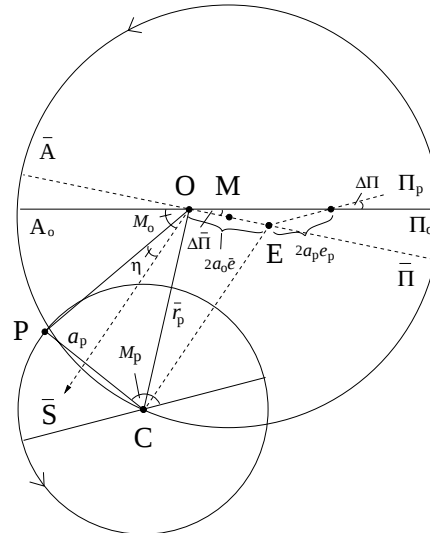


FIGUR 6.13.

Ovenstående figurer transformeres til ækvivalente epicykliske modeller, Fig. 6.14 og Fig. 6.15, som betragtes:



FIGUR 6.14.



FIGUR 6.15.

De virkelige parametre som skal sammenlignes med Ptolemaios' $2e$ og λ_{Π} er altså $2a_p\bar{e} = EO$ (EO udregnes fra formel 6.4.3) og $v_{\Pi} = v_{\Pi} - \Delta\bar{\Pi}$. Her er anvendt $(\bar{A}\bar{\Pi}) \approx A_p\Pi_p = 2a_p$, i Fig. 6.10. Til 2. orden i excentriciteten gælder nemlig at:
 $(\bar{A}\bar{\Pi}) = r_{0,p}(\Delta\bar{\Pi}) + r_{0,p}(\pi - \Delta\bar{\Pi}) = 2a_p(1 - e_p^2 \sin^2 \Delta\bar{\Pi}) \overset{\text{Der regnes i radianer.}}{\approx} 2a_p$, for alle planeterne.

Tabel 6.7 indeholder $\bar{e}$, værdien af $2a_p\bar{e}$ for $a_p = 60^p$, $\Delta\bar{\Pi}$ og v_{Π} beregnet for år 130, samt Ptolemaios' værdier af e og λ_{Π} taget fra kapitel 1.

Planet	Teoretisk, År 130				<i>Almagestens</i> parametre	
	$\bar{e}$	$120^p\bar{e}_p$	$\Delta\bar{\Pi}_\circ$	$v_{\Pi}_\circ$	$2e_p$	$\lambda_{\Pi}, (\lambda_A \text{ for Venus})_\circ$
Venus	0.0132	1;35	14;20	56;27	2;30	55
Mars	0.099	11;53	5;12	296;29	12	295;30
Jupiter	0.045	5;24	4;17	340;18	5;30	341
Saturn	0.060	7;12	0;26	56;1	6;50	53

TABEL 6.7

Der ses at de teoretiske værdier for de ydre planeter passer rimelig godt med værdierne fundet af Ptolemaios, hvorfor det kan konkluderes at modellen i Fig. 6.14 repræsenterer den idealiserede ptolemæiske model. For venusmodellen er det kun parameteren v_{Π} som passer med Ptolemaios'. Den ptolemæiske excentricitet ville passe bedre med en (1,4)-model. En sådan gengiver præcist parametrene for Solen. Fra tabel 6.2 findes disse for $a_o = 60^p$:

$$120^p e_o = 120^p \cdot 0.0175 = 2;6^p \text{ og } \lambda_A = 70;47^\circ.$$

Solbanens excentricitet stemmer, betydeligt bedre, overens med den ptolemæiske excentricitet for venusbanen, som dog stort set er identisk med Ptolemaios' egen

udledte excentricitet for solbanen (2; 29, 30^p). Det viser sig dog at Ptolemaios' resultat stammer fra upræcise observationer (se [Wi72]). Dette kan testes med den approksimerede Kepler bevægelse anvendt med Fig. 6.7:

Med Jorden i $\bar{A}$ og $\bar{\Pi}$ ønskes værdier for hhv. den maksimale vestlige η_v og østlige η_e elongation. Disse svarer til Ptolemaios' værdier for hhv. η_3 og η_4 fra tabel 1.5, s. 15.

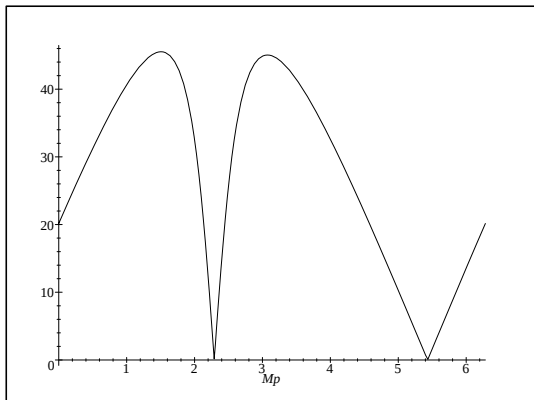
Betragt Fig. 6.7.

Med Jorden fast i $\bar{A}$ er $v_o = v_{0,o}(M_o = \pi - \Delta\bar{\Pi})$ og $r_o = a_o r_{0,o}(v_o)$. Venus antages at være i Π_p til $t = 0$. Fra 6.4.1 findes Jordens "venuscentriske" længdegrad regnet fra retningen $\bar{A}\bar{\Pi}$. Hertil adderes 180° for at opnå den geocentriske længdegrad af Venus, som samtidig er elongationen fra middelsolen. De negative værdier repræsenterer vestlige elongationer.

I Fig. 6.16 er numeriske værdier af elongationen afbildet for et enkelt omløb af Venus med Jorden fast i den givne position. Den første top er den maksimale østlige elongation. Den maksimale vestlige elongation er givet ved den anden top som bestemmes til $\eta_v = 45; 3^\circ$. Ved samme metode bestemmes $\eta_e = 46; 36^\circ$, med Jorden i $\bar{\Pi}$. Fra 1.3.14, s. 15 fås nu:

$$2e = 1; 35^p \text{ (og } a_p = 43; 1^p), \text{ hvor } a_o = 60^p.$$

Ptolemaios kunne altså, med mere præcise observationer, have opnået en værdi noget nærmere den teoretiske (se tabel 6.7). Formlen 1.3.14 er dog baseret på at epicyklen er en cirkel, hvilket i modsætning til det virkelige tilfælde (Fig. 6.11) betyder at radius vektoren $\mathbf{CP}$ ved de to elongationer er lige lange. Metoden giver dog alligevel den korrekte værdi, da excentriciteten af venusbanen netop er meget lille. Jeg vil derfor betragte modellen i Fig. 6.15 som det idealiserede tilfælde af Ptolemaios' egen model.



Planet	$\Delta v_{cop,ptol}$
Venus	0
Mars	0; 21
Jupiter	0; 1
Saturn	0; 1

TABEL 6.8.

FIGUR 6.16. Enheden på y og x-aksen er hhv. grader og radianer.

Da Copernicus reducerede excentriciteterne for Venus og Mars uden nogen form for observationsdata, har jeg i Tabel 6.9 afbildet teoretiske værdier af den ptolemæiske excentricitet samt værdierne fra *De Revolutionibus*, i enheden hvor radius af den ptolemæiske deferent er 60^p.

Planet	$120^p \bar{e}$, år 1530 p	$2e$, <i>Revolutionibus</i> p
Solen	2;2	1;56
Venus	2;8	2;6
Mars	12;1	11;46
Jupiter	5;38	5;30
Saturn	6;38	6;50

TABEL 6.9

Som det ses, kan Copernicus have haft et observationelt grundlag for reduktionen af venusbanens excentricitet, mens det må siges at være mere tvivlsomt i Mars' tilfælde, med mindre selvfølgelig der er tale om observationsfejl.

Geocentriske længdegrader fra de idealiserede modeller:

Betragt Fig. 6.12. Planeten og Jorden antages at befinde sig i hhv. Π_p og Π_o til tiden $t = 0$.

$$\bar{v}_o = M_o + (\Delta\bar{\Pi} + \Delta\Pi).$$

$$\bar{v}_p = (M_p + \Delta\bar{\Pi}) + 2\bar{e} \sin(M_p + \Delta\bar{\Pi}) + \bar{e}^2 \sin 2(M_p + \Delta\bar{\Pi}).$$

$$\bar{p} = \bar{v}_o - \bar{v}_p.$$

$$\bar{r}_p = a_p[1 - \bar{e} \cos \bar{v}_p - \frac{1}{2}\bar{e}^2 \sin^2 \bar{v}_p]$$

↓Cosinusrelationen på $\triangle O\bar{P}\bar{S}$

$$\bar{l} = [a_o^2 + \bar{r}_p^2 - 2a_o\bar{r}_p \cos \bar{p}]^{\frac{1}{2}}$$

↓Sinusrelationen på samme trekant

$$\bar{q} = \sin^{-1}\left(\frac{a_o}{\bar{l}} \sin \bar{p}\right)$$

Den geocentriske længdegrad v_g , regnet fra retningen $E\bar{\Pi}$, kan nu udregnes fra:

$$\boxed{\bar{v}_g = \bar{v}_p - \bar{q}} \quad (6.4.4)$$

For Venus, Fig. 6.13, bestemmes atter den venuscentriske længdegrad $\bar{v}_g$ af Jorden ved ovenstående metode. Hertil adderes 180° for at opnå den geocentriske længdegrad af Venus. For de idealiserede udgaver af Copernicus' modeller beregnes den geocentriske længdegrad $\bar{v}_{g,cop}$ ved brug af samme formel, dog erstattes det givne udtryk for $\bar{r}_p$ med:

$$\bar{r}_{p,cop} = a_p[1 - \bar{e} \cos \bar{v}_p]$$

I tabel 6.8 er $\Delta v_{cop,ptol} = |\bar{v}_{g,cop} - \bar{v}_g|_{max}$, afrundet til nærmeste bueminut, afbildet for hver enkelt planet. Som det fremgår er de idealiserede modeller af Ptolemaios og Copernicus uadskillelige undtagen for Mars. Tabel 6.10 og tabel 6.11 indeholder hhv. værdien $\Delta v_{g,max} = |v_g - \bar{v}_g|_{max}$, hvor v_g findes fra 6.4.1, og værdien $\Delta v_{g,cop,max} = |v_g - \bar{v}_{g,cop}|_{max}$.

Man ser noget overraskende (tabel 6.10) at de idealiserede modeller, på trods af den "forkerte" placering af deferentens centrum, giver en bedre overensstemmelse, med Kepler bevægelsen, end (1,2)-modellen (se tabel 6.6). Årsagen til dette synliggøres ved at betragte Fig. 6.10 og Fig. 6.11. Hvis M (ellipsens centrum) i figuren flyttes til positionen midt mellem O og E (endepunktet af vektoren $\mathbf{CM}'$ placeret i

M), fås ellipsebanen for centret M' af den elliptiske epicykel. Lader man C roterer på denne nye position af ellipsen, bibeholdende C langs den gamle retning EC og approksimeres den elliptiske epicykel med en cirkel, fås en mellemting af en $(0, 1)$ og en $(0, 2)$ -model. Approksimeret kun med cirkler giver dette en blanding af en $(1, 1)$ og en $(1, 2)$ -model, som tabellens resultater ligeledes antyder.

Af tabel 6.11 drages tilsvarende konklusioner blot i copernicansk regi. Sammenlignet med Kepler bevægelsen giver Ptolemaios' model, kun en lille målelig forskel og det for Mars.

Planet	$\Delta v_{g,max}$
Venus	0;21
Mars	1
Jupiter	0;13
Saturn	0;10

TABEL
6.10.

Planet	$\Delta v_{g,cop,max}$
Venus	0;21
Mars	1;12
Jupiter	0;14
Saturn	0.11

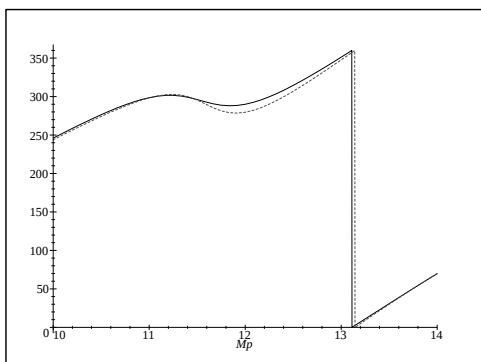
TABEL
6.11.

Planet	$\Delta v_{g,max}$
Venus	1;21
Mars	13;36
Jupiter	0;49
Saturn	0;53

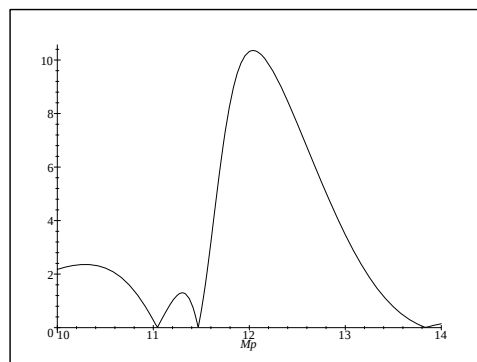
TABEL
6.12.

Med de gode resultater for Ptolemaios' model kan der ikke være nogen tvivl om, at indførelsen af equantpunktet har betydet en forbedring af modellerne. Jeg har nu alligevel bestemt afvigelsen $\Delta v_{g,max} = |v_g - \bar{v}_g|_{max}$, i tilfældet hvor $\bar{v}_g$ findes fra Fig. 6.12 og Fig. 6.13 med deferentens centrum M placeret i equantpunktet E . Afvigelsen fra Kepler bevægelsen er afbildet i tabel 6.12. Ikke overraskende ses en klar forskel fra tabel 6.10.

Man skal naturligvis huske på, at de fundne afvigelser i tabel 6.12 er de maksimale og ikke generelt et udtryk for modellernes fejl. De største afvigelser findes dog altid omkring den retrograde bevægelse, hvilket som tidligere nævnt skyldes epicyklens afhængighed af afstanden. I Fig. 6.17 har jeg omkring en retrograd bevægelse for Mars afbildet Kepler bevægelsen (ubrudt linie), sammen med bevægelsen fra Ptolemaios' marsmodel (stiplet linie) uden equantpunkt (dobbeltexcentrisk model).⁶ Den numeriske afvigelse mellem de to modeller, i det givne interval, er vist i Fig. 6.18.



FIGUR 6.17.



FIGUR 6.18.

⁶Jeg har her valgt Mars, da afvigelsen fra marsmodellen er noget nemmere at synliggøre.

I begge figurer er enheden på y og x-aksen hhv. grader og radianer.

Som det fremgår tydeligt af de to figurer, er afvigelsen størst nær den retrograde bevægelse. Pga. afvigelsens størrelse for Mars finder jeg det mest sandsynligt, at Ptolemaios udledte equantpunktet fra observationer af Mars og herefter generaliserede til de andre planeter. Den lille demonstration af equantpunktets gyldighed for Venus (se s. 16) er altså, mener jeg, ikke Ptolemaios' oprindelige udledning af equantpunktet. Da han har vidst, hvad han ledte efter, har Ptolemaios med sin tekniske snilde fundet en smart og overskuelig metode, kun gældende for Venus, som let og elegant viser equantpunktets eksistens. Ptolemaios vælger denne præsentation af pædagogiske årsager.

Angående bestemmelsen af apsidelinien nævnte jeg i kapitel 1, s. 15, at numerisk identiske elongationer af forskellig art ikke nødvendigvis lå symmetriske om apsidelinien i Ptolemaios' model. Dette vises fra den idealiserede venusmodel:

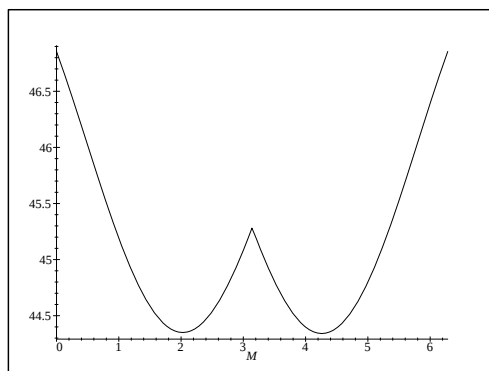
Elongationer fra middelsolen, når Venus befinder sig på tangentlinien fra O til epicyklen, udregnes fra Fig. 6.13 under den antagelse at P har den omtalte position og at Jorden befinder sig i $\bar{\Pi}$ til tiden $t = 0$. Længdegrader regnes fra retningen $\bar{A}\bar{\Pi}$.

$$\angle EOP = \bar{q} = \sin^{-1}(a_p/\bar{r}_p) \text{ og } \angle EO\bar{S} = \angle \bar{\Pi}EO - M = \bar{v}_o - M$$

⇓

$$\angle \bar{S}OP = \eta = \bar{q} - \angle EO\bar{S}$$

Det anvendte $M = M_o + \Delta\bar{\Pi}$, angiver her middelanomalien af Jorden. I Fig. 6.19 er η afbildet som funktion af M .



FIGUR 6.19. Enheden på y og x-aksen er hhv. grader og radianer.

Da kurven, som vist, ikke er monoton fra perihelion ($M = 0rad$) til aphelion ($M = \pi rad$) er værdien af η ikke entydig i dette interval, hvorfor en numerisk identisk værdi i intervallet fra aphelion til perihelion, ikke behøver at ligge symmetrisk om apsidelinien. Ptolemaios' observationer V_1 og V_2 fra tabel 1.5 ligger hhv. ca. $5rad$ og ca. $1.2rad$ fra $\bar{\Pi}$. Begge disse observationer ligger udenfor intervallet ca. $2rad$ – ca. $4.3rad$ og repræsenterer således et symmetrisk beliggende observationspar. I virkeligheden er symmetriegenskaben dog ikke eksakt, hvilket fremgår af Fig. 6.11. Da den idealiserede model passer nogenlunde med virkeligheden, må det forventes at de anvendte symmetriegenskaber er approksimativt tilstede i virkeligheden.

6.4.2. Epicyklens radius. Med modellerne følger at forholdet mellem epicyklens og deferentens radier i virkeligheden angiver forholdet mellem:

$$\begin{aligned} a_p/a_o & \text{ for Venus} \\ a_o/a_p & \text{ for ydre planet} \end{aligned}$$

I Ptolemaios' modeller er deferentens radius lig 60^p , hvorfor de teoretisk bestemte værdier af epicyklens radius findes ved at multiplicere 60^p med ovenstående forhold. Med værdierne i tabel 6.1 fås:

Planet	a_o/a_p	Teoretisk p	<i>Almagesten</i> p
Venus	1/0.72	43;12	43;10
Mars	1/1.52	39;28	39;30
Jupiter	1/5.20	11;32	11;30
Saturn	1/9.54	6;17	6;30

TABEL 6.13

Atter ses en pæn overensstemmelse mellem Ptolemaios' og virkelighedens værdier. De vigtigste parametre for en models præcision er dog middelbevægelserne, som har den ulempe, at selv den mindste afvigelse i værdien vil betyde en stadigt voksende afvigelse i længdegraden. Med tiden vil denne afvigelse blive for stor til at kunne ignoreres.

KAPITEL 7

Afslutning

I kosmologien fra oldtiden og op til Kepler var PUC den vigtigste egenskab, en planetmodel skulle være i besiddelse af. Ptolemaios, hvis mål var at konstruere geometriske modeller som først og fremmest kunne beskrive planeterne tilsyneladende bevægelser matematisk, afveg dog fra dette princip da fænomenerne krævede det og indførte det meget omdiskuterede equantpunkt. Endvidere anvendte han, ligeledes på baggrund af fænomenerne, epicykler og excentriske deferenter. Både epicyklen og den excentriske deferent var kendt før Ptolemaios, men ikke equantpunktet. Denne lille, men meget vigtige detalje er så vidt vides Ptolemaios' egen opfindelse og dens indførelse vidner om en stor teknisk indsigt hos opfinderen. Denne tekniske begavelse finder vi igen i Ptolemaios' metoder, hvormed han bestemmer de geometriske parametre hørende til modellerne. Selv de tidligere simple modeller, undtagen solmodellen, umiddelbart før Ptolemaios var ikke forsynet med geometriske parametre. Ptolemaios var således også den første til at udvikle et brugbart observationsprogram til bestemmelsen af numeriske værdier af de geometriske parametre. Helt op til og med Copernicus, blev Ptolemaios' observationsprogram anvendt og undergik kun mindre ændringer.

Selv om Ptolemaios' observationsprogram overlevede eftertiden (op til Copernicus), gjorde hans modeller det ikke. Dette skyldtes ikke manglende matematisk præcision, for selv om modellerne med tiden gav mere og mere upræcise resultater (som et ur der går for langsomt), kunne problemerne løses ved en justering af modellernes parametre. Årsagen lå derimod i Ptolemaios' brud med PUC, dvs. en filosofisk årsag, som ingen konkret betydning havde for den matematiske beskrivelse af planeterne. Til gengæld havde opfyldelsen af PUC en vigtig fysisk betydning, som dog også er af filosofisk karakter, nemlig at det muliggjorde opfattelsen af modellerne som repræsenterende fysisk virkelige sfærer, som styrer planeterne bevægelser. Da Ptolemaios' modeller var konstrueret i overensstemmelse med fænomenerne, var de nye alternative modeller blot en omformning af de gamle, for at få dem i overensstemmelse med PUC. Selve egenskaberne af de ptolemæiske modeller blev så vidt muligt bevaret.

Metoden med hvilken man kunne omgå equantproblemet blev opfundet af arabiske astronomer og blev ligeledes anvendt af Copernicus.

Hvad nyt tilførte Copernicus så astronomien? Han tilførte stort set intet nyt hvad modellerne angår, blot en omrokering af cirklerne i de arabiske modeller. Modellerne forblev således, på et teknisk niveau, ligeværdige med de ptolemæiske. Dette er næsten sandt, men kun næsten! Copernicus' modeller havde nemlig i modstrid med datidens verdensbillede Jorden i bevægelse om Solen og dette betød en afskaffelse af de ptolemæiske epicykler, som for de ydre planeters vedkommende blev erstattet med Jordens bane om Solen og for Venus' vedkommende med dens egen bane om Solen. Den tekniske fordel ved dette arrangement ligger i denne indsigt, hvormed systemets absolutte dimensioner kan bestemmes. I de ptolemæiske modeller, var kun

relative størrelsesforhold indenfor samme model, målelige. Copernicus havde nu fundet et fælles mål, som indgår i alle planetmodellerne, nemlig jordbanens radius. Rent matematisk har dette dog ingen effekt på de numeriske forudsigelser af planeternes bevægelse.

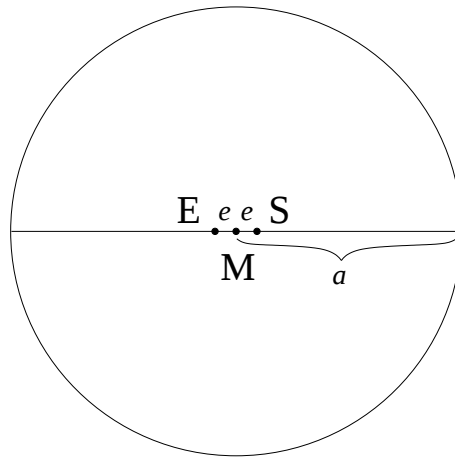
Som det fremgår var Ptolemaios altså den store tekniske innovator, som løste problemet med planeternes matematiske beskrivelse. Copernicus var derimod manden med det store overblik, som så modellerne virkelige betydning og dermed den overordnede virkelige konfiguration af planeternes placering i solsystemet.

Hvis man skulle klandre Copernicus og for den sags skyld også Ptolemaios for noget (altid nemt i bagklogskabens lys), er det deres manglende prioritering af modellerne harmoni. Således kunne Ptolemaios godt have indført et equantpunkt for solmodellen og Copernicus burde have fokuseret mere på harmoni end PUC, for dermed at indføre equantmodellen for Jorden og de andre planeter, hvorved det heliocentriske system i sandhed ville være harmonisk. Det er dog muligt at Copernicus, uden sine bestræbelser på at opfylde PUC, ikke ville være kommet frem til heliocentrismen. Så den slags diskussioner er sikkert aldeles nytteløse.

Lad nu alligevel det heliocentriske system være forsynet med ptolemæiske equantmodeller for alle planeterne. Den dobbelte excentricitet for alle modellerne, bortset fra Jordens, er da afstanden fra middelsolen til equantpunktet. For Jorden er middelsolen equantpunktet, så dennes dobbelte excentricitet er afstanden fra middelsolen til Solen. Idet Jordens bane nu ikke længere er en jævn cirkelbevægelse om middelsolen, bliver udregningen af de geocentriske længdegrader dog en mere kompliceret affære end før. Systemet mangler nu blot endnu en lille ændring for at være i perfekt harmoni, nemlig at excentriciteterne bliver målt fra Solen istedet for fra middelsolen (betyder intet i jordmodellen). Middelsolen er jo blot jordbevægelsens equantpunkt og således specielt tilknyttet denne. På samme måde som for Jorden burde planeternes excentriciteter således måles fra Solen. Hermed frigøres modellerne helt fra deres tilknytning til jordmodellen og den eneste fællesnævner for dem alle er Solen. Naturligt nok, da denne er det ubevægelige centrale legeme planeterne roterer omkring.

Ulempen ved disse nye modeller er dog, at bekvemmeligheden ved at kunne bruge Ptolemaios' observationsprogram ikke længere er tilstede. Så er det i det hele taget umagen værd at stile mod en højere grad af modelharmonie? I ovenstående tilfælde er svaret ja. For som vist i kapitel 6, tabel 6.5 beskriver en equantmodel, som i ovenstående, den heliocentriske længdegrad utrolig godt (naturligvis afhængig af hvor præcist modellens parametre er angivet). Lidt værre bliver det, når den geocentriske længdegrad skal gengives (se tabel 6.6), hvilket som omtalt i kapitel 6 skyldes dennes sammensætning af to modeller. Med to equantmodeller kommer afvigelsen, fra den virkelige bevægelse, højst op på ca. $\frac{1}{2}^\circ$ og det i Mars' tilfælde. Dette svarer omtrent til Månens tilsyneladende diameter og er derfor ikke helt ubetydelig. For de andre planeter holder afvigelsen sig under 5 bueminutter.

Hvordan kan det være at disse modeller passer så glimrende med virkeligheden? Dette har jeg set på i den første del af kapitel 6. I det idealiserede tilfælde bevæger planeten sig i en perfekt ellipseformet bane, med Solen i det ene brændpunkt. På linien gennem ellipsens og Solens centrum, diametralt modsat Solen og i næsten samme afstand fra ellipsens centrum ligger et punkt, hvor omkring bevægelsen af planeten forekommer uniform. I nedenstående figur er ellipsebanen for Mars gengivet med de virkelige størrelsesforhold.



FIGUR 7.1

På trods af at Mars, blandt de betragtede planeter, er den hvis ellipsebane er mest excentrisk, skal der et trænet øje til at adskille banen fra en cirkel (i en større målestok er afvigelsen klar). Ved således at approksimere ellipsebevægelsen med en cirkelbevægelse fås equantmodellen. Analogien mellem de to modeller er klar:

- S er Solen i begge modeller.
- Radius a af den halve storcirkel er radius i deferenten.
- Ellipsens centrum M er centrum for deferenten.
- Punktet E er equantpunktet.
- Excentriciteten e er lig afstanden fra equantpunktet/Solen til deferentcentret.

Equantmodellen ligger altså meget tæt op ad ellipsebevægelsen, både af udseende og numeriske resultater. Den excentroepicykliske model derimod, giver ganske vist også meget præcise numeriske resultater (se tabel 6.11), men den klare analogi til ellipsebevægelsen forsvinder ved opdelingen, af den dobbelte excentricitet, i en excentricitet og en epicyklet. Med denne viden i baghovedet kunne det have været interessant, hvis Ptolemaios havde forsøgt sig med et heliocentrisk system. Et så "absurd" arrangement har Ptolemaios dog næppe seriøst overvejet. Han holdte sig som bekendt til det geocentriske system.

Når nu Jorden virkelig er i bevægelse om Solen, er det klart, at hvis man antager Jordens ubevægelighed, så vil Jordens bevægelser nødvendigvis blive overført til planeterne, som vist i Fig. 6.10 og Fig. 6.11. Ptolemaios er derfor nødt til at indføre epicyklen, hvormed planetmodellen bliver en sammensætning af to cirkelbevægelser. Denne type modeller giver som sagt en lidt dårligere præcision, afhængig af hvilken type cirkelbevægelse der tillægges deferenten og epicyklen (se tabel 6.6). I Ptolemaios' tilfælde er idealsammensætningen to equantmodeller. Dette kræver dog, at man klart skelner mellem de to cirklers excentriciteter. For som vist i tabel 6.7 er den ptolemæiske excentricitet en kombination af Jordens og planetens excentricitet, hvilket skyldes definitionen (i heliocentrisk regi) af excentriciteten som afstanden fra middelsolen til equantpunktet. I Fig. 6.12 er den ptolemæiske excentricitet $2e$ således længden $|\mathbf{SE} - \mathbf{S\bar{S}}|$ og i Fig. 6.13 længden $|\mathbf{S\bar{S}} - \mathbf{SE}|$. Ptolemaios' modeller er således baseret på, at epicyklens dobbelte excentricitet overføres til planetens, hvorved epicyklen efterlades uden en excentricitet.

I den sidste del af kapitel 6 har jeg undersøgt præcisionen af Ptolemaios' modeller sammenlignet med Kepler bevægelsen, med den forsimpning at de ptolemæiske parametre er eksakt lig de teoretiske. Den givne undersøgelse angiver således potentialet af Ptolemaios' modeller. Resultatet er vist i tabel. 6.10, hvor der ses, at afvigelsen maksimalt kommer op på 1° for Mars og holder sig under $\frac{1}{2}^\circ$ for de andre planeter. Igen skal det bemærkes, at disse afvigelser blot er de maksimale og ikke generelt et udtryk for den typiske afvigelse i modellerne.

Med de gode resultater er det ikke underligt, at senere astronomer udarbejdede deres modeller med basis i de ptolemæiske. For som det jo fremgår, er det lykkeds Ptolemaios at finde frem til nogle meget tilfredsstillende modeller.

Det er i det hele taget meget beundringsværdigt, at Ptolemaios ved at iagttage bevægelsernes anomalier har været istand til, med relativt simple midler, at konstruere modeller som i den grad efterligner virkeligheden ikke blot numerisk, men også rent geometrisk. Samtlige af de egenskaber modellerne indeholder, har en pendant i virkeligheden, selv endda det gådefulde equantpunkt, som for araberne og Copernicus vækkede så megen furore.

Det har ikke her været min hensigt at favorisere hverken Ptolemaios eller Copernicus, idet ingen af dem har kunnet vide, hvordan bevægelserne virkelig var skruet sammen. De har blot søgt fyldestgørende numeriske modeller i overensstemmelse med kosmologien. Til gengæld vil jeg med min bagklogskab, som Copernicus af gode grunde ikke var i besiddelse af, tillade mig at foretrække Ptolemaios' modeller frem for Copernicus'.

Pudsigt er det, at det for begges vedkommende var et brud med den daværende kosmologi, som gav dem deres store opdagelser. Ptolemaios' equantpunkt var et brud med PUC. Bruddet med PUC ledte måske Copernicus på sporet af heliocentrismen, som er et brud med den grundlæggende geocentriske verdensopfattelse. Så selv om Ptolemaios, efter min mening, har stået for den største tekniske bedrift, har Copernicus stået for det mest dristige og revolutionerende brud med kosmologien. Og dette ikke blot efter en indsigt om modellernes ækvivalens, men efter en indsigt i heliocentrismens overlegne og æstetiske forklaringsmæssige egenskaber. Man kan således slet ikke sammenligne de to på deres bedrifter, som ligger i hver sit område af astronomien. Til gengæld kan man kun have stor beundring og respekt for dem begge.

Litteratur

- [Aa63] A. Aaboe, *On a Greek Qualitative Planetary Model of the Epicyclic Variety*, Centaurus **9** (1963), 1-10.
- [CaSa96] ed. J. Casulleras & J. Samsó, *From Baghdad to Barcelona*, Barcelona, 1996.
- [Ev84] J. Evans, *On the function and the probable origin of Ptolemy's equant.*, Amer.J.Phys. **52** (1984), no. 12, 1080-1089.
- [Ev88] J. Evans, *The division of the Martian eccentricity from Hipp. to Kepler*, Amer.J.Phys. **56** (1988), no. 11, 1009-1024.
- [Ge85] C. A. Gearhart, *The predictive capabilities of Copernican planetary models*, Arch.Hist.exact Sci. **32** (1985), no. 3-4, 207-222.
- [Go67] B. R. Goldstein, *The Arabic Version of Ptolemy's Planetary Hypotheses*, 1967.
- [Go85] B. R. Goldstein, *Theory and Observation in Ancient and Medieval Astronomy*, Variorum 1985.
- [KiSa87] ed. D. A. King & G. Saliba, *From Deferent to Equant*, New York Academy of Sciences, 1987.
- [Ku57] T. S. Kuhn, *The Copernican Revolution*, Cambridge, 1957.
- [Ma88] Y. Maeyama, *The Keplerian and mean motions*, Arch.Hist.Exact Sci. **38** (1988), no. 4, 365-383.
- [Mo67] K. P. Moesgaard, *Copernicus*, Speciale, Århus universitet (1967).
- [Mo68] K. P. Moesgaard, *The 1717 Egyptian years and the Copernican theory of precession*, Centaurus **13** (1968), 120-137.
- [Mo74] K. P. Moesgaard, *Success and failure in Copernicus' planetary theories*, Arch.Internat.Hist.Sci. **24** (1974), no. 94, 73-111, 243-315.
- [Mo87] K. P. Moesgaard, *In chase of an Origin for the Mean Planetary Motions in Ptolemy's Almagest*, Univ.Lib.Copenhagen (1987), 43-54.
- [Mu95] A. Murschel, *The Structure and Functions of Ptolemy's Physical Hypotheses of Planetary Motion*, J. Hist. Astronomy. **26** (1995), 33-61.
- [Ne68] O. Neugebauer, *On the planetary theory of Copernicus*, Vistas in astronomy **10** (1968), 89-103.

- [Ne75] O. Neugebauer, *A history of ancient mathematical astronomy. Part 1,2,3*, Springer-Verlag, 1975.
- [NeSw84] N. M. Swerdlow & O. Neugebauer, *Mathematical astronomy in Copernicus's De revolutionibus. Part 1,2*, Springer-Verlag, 1984.
- [Nw77] R. R. Newton, *The Crime of Claudius Ptolemy*, John Hopkins University Press, 1977.
- [Pe74] O. Pedersen, *A survey of the Almagest*, Odense University Press, 1974.
- [RaMo96] ed. R. Rashed & R. Morelon, *Encyclopedia of the History of Arabic Science. Vol. 1*, Routledge, 1996.
- [Rg93] F. J. Ragep, *Nasir al-Din al-Tusi's Memoir on Astronomy. Vol. 1,2*, Springer-Verlag, 1993.
- [Ri80] R. C. Riddell, *Parameter disposition in pre-Newtonian planetary theories*, Arch.Hist.Exact Sci. **23** (1980/81), no. 2, 87-157.
- [Ro78] E. Rosen, *On The Revolutions*, John Hopkins University Press, 1978.
- [Ro85] E. Rosen, *Copernicus's Minor Works*, John Hopkins University Press, 1985.
- [Rv65] J. R. Ravetz, *Astronomy and Cosmology in the Achievement of Nicolaus Copernicus*, Polskiej Akademii Nauk, 1965.
- [Sa87] G. Saliba, *The Role of the Almagest Commentaries in Medieval Arabic Astronomy*, Arch.Internat.Hist.Sci. **37** (1987), no 118, 3-20.
- [Sa94.a] G. Saliba, *A history of Arabic astronomy*, New York University Press, 1994.
- [Sa94.b] G. Saliba, *A Sixteenth-century Arabic Critique of Ptolemaic Astronomy*, J. Hist. Astronomy, 1994.
- [Sb94] A. I. Sabra, *Optics, Astronomy and Logic*, Variorum, 1994.
- [Sm31] W. N. Smart, *Spherical astronomy*, Cambridge University Press, 1931.
- [Sw73] N. M. Swerdlow, *A Translation of the Commentariolus with Commentary*, Proceedings Of The American Phil. Society. **117** (1973), no. 6.
- [Sw89] N. M. Swerdlow, *Ptolemy's Theory of the Inferior Planets*, J. Hist. Astronomy. **20** (1989), no. 1, 29-60.
- [Sy85] F. W. Sawyer, *On Ptolemy's Determination of The Apsidal line for Venus*, Appendix i Go85, 1985.
- [To84] G. J. Toomer, *Ptolemy's Almagest*, Springer Verlag, 1984.
- [We75] R. S. Westman, *The Copernican Achievement*, University of California Press, 1975.
- [Wi72] C. Wilson, *The inner planets and the keplerian revolution*, Centaurus **17** (1972), no. 3, 205-248.