History of Science Department
University of Aarhus

TERESE M. O. NIELSEN

Matematisk realisme, "indispensability" og objekt- og vidensbegreber

Hosta, No. 6, 2000
Work-in-Progress

Hosta (**H**istory **O**f **S**cience and **T**echnology, **A**arhus) is a series of publications initiated in 2000 at the History of Science Department at the University of Aarhus in order to provide opportunity for historians of science and technology outside the Department to get a glimpse of some of the ongoing or recent works at the Department by reseracher and advanced students. As most issues contain work in progress, comments to the authors are greatly valued.

Publication is only made electronically on the web site of the Department (www.ifa.au.dk/ivh/hosta/home.dk.htm). The issues can freely be printed as pdf-documents. The web site also contains a full list of issues.

ISSN: 1600-7433

History of Science Department
University of Aarhus
Ny Munkegade, building 521
DK-8000 Aarhus C
Denmark

Matematisk realisme, "indispensability" og objekt- og vidensbegreber

Terese M. O. Nielsen

§0 Nedenstående essay er et forarbejde til dele af min Ph.D.-afhandling ved Institut for Videnskabshistorie, Aarhus Universitet. Selve afhandlingen forventes at foreligge (på engelsk) julen 2001. Som det formentlig fremgår af teksten er mine pointer angående objekt- og vidensbegreberne (i paragrafferne 8 og 9) således stadig under udarbejdelse, mens gennemgangen af indispensability-argumentet og af Gödels tænkning repræsenterer mere gennemarbejdet materiale.

Jeg vil gerne på dette sted takke tilhørerne til mit foredrag ved Dansk Netværk for Matematikhistorie og Matematikfilosofis møde den 11.-12. november 2000 samt mine mange diskussionspartnere og korrekturlæsere: Bob Hale, Nina Bonderup Dohn, Stig Andur Pedersen, Kurt Møller Pedersen, Henrik Kragh Sørensen og Claus Festersen.

§1 *Matematisk realisme*, også kaldet platonisme, er den tese, at matematikken har et genstandsområde bestående af abstrakte entiteter, som er uafhængige af menneskelig bevidsthed. Denne tese har, som navnet antyder, rødder i Platons filosofi og går således 2400 år tilbage i historien, hvorfor der da også er mange forskellige versioner af den. Når den er udbredt blandt matematik-filosoffer den dag i dag, skyldes det i særlig grad det såkaldte "indispensability"-argument.[1,2] Dette argument for eksistensen af abstrakte, matematiske entiteter er baseret på matematikkens succes som hjælperedskab for de empiriske videnskaber, specielt fysik. Det er bygget op af en række teser om, hvad teorier er, hvordan videnskab foregår, og hvilken rolle matematik spiller i den sammenhæng, og er altså temmelig kompliceret. Ydermere har disse vidtrækkende konsekvenser for vores opfattelse af videnskab og af matematik. Blandt andet derfor har argumentet også tiltrukket sig nogen kritik.

Jeg vil i denne artikel gennemgå argumentets opbygning og de enkelte teser, der indgår i det, samt motivationen for disse. Derefter vil jeg fremdrage nogle typiske former for kritik af argumentet og søge at give et overblik over de sidste 10 års diskussion af det.

Det er min overbevisning, at denne diskussion hviler på nogle utilstrækkelige begreber om, hvad viden er, og hvad et objekt er, som deles af både modstandere og tilhængere af argumentet, hvilket jeg efterfølgende vil argumentere for. Til sidst vil jeg inddrage Gödels syn på matematikkens filosofi, idet det illustrerer spændingerne i vidensbegrebet.

§2 *Indispensability-argumentet*s forhistorie går tilbage til Freges kritik af formalismen, om ikke før.[3] En version af det findes i Gödels upublicerede, efterladte papirer,[4] og han angiver selv Russell som sin inspirationskilde.[5] Men den version, der er blevet genstand for diskussion de sidste få årtier, skyldes i høj grad Quine[6] og Putnam[7], og er altså empiristisk inspireret, i modsætning til Gödels version, som er en del af en overvejende rationalistisk tilgang til verden.

---

[1] Det såkaldte "indispensability"-argument findes i så mange forskellige udgaver, at det muligvis er misvisende at tale om ét argument. Her vil jeg dog behandle de forskellige udformninger under et.

[2] En prominent undtagelse til påstanden om, at indispensability-argumentet er hovedmotivationen bag vore dages matematiske realisme, er Crispin Wrights og Bob Hales neo-fregeanske program, jf. Wright og Hale [2001].

[3] Jf. Maddy [1989], Resnik [1980], Nielsen [1997], kapitel 2 og 4.

[4] Se f.eks. Gödel [*1953/59].

[5] I Gödel [1944].

[6] Quine har aldrig selv præsenteret en utvetydig fremstilling af argumentet, men det anses normalt for at være implicit til stede i Quine [1948] og [1951].

[7] Putnam [1971].

Men alene det faktum, at filosoffer af så grundlæggende forskellig observans som Gödel og Quine er blevet ledt frem til versioner af argumentet, viser dets gennemslagskraft.

Selve argumentet forløber som følger[8]:

1) Matematiske teorier er uundværlige dele af videnskabelig praksis ("Indispensability").
2) Matematiske teorier kan ikke formuleres, uden at de refererer til matematiske objekter (anti-reduktionisme).
3) Evidens for en videnskabelig teori er evidens for alt, hvad der indgår i dens formulering. Der kan ikke drages nogen ikke-arbitrær skillelinie mellem forskellige dele af en videnskabelig teori (holisme).
4) Det er i sidste ende videnskaben, der afgør, hvad der er sandt, og hvilke typer entiteter der findes i verden (naturalisme).

Konklusion: Videnskaben forudsætter eksistensen af matematiske objekter, og da det er videnskaben, der fortæller os, hvad der er i verden, må matematiske objekter findes.

Den første tese, nemlig selve indispensability-tesen, kunne umiddelbart minde om det berømte Galilei-citat om, at "naturens bog er skrevet på matematikkens sprog", men der menes mere med det end det. Hvilket sprog en teori er skrevet i, anses jo normalt ikke for væsentligt, eftersom sprog i det store hele lader sig oversætte. Tesen går ud på, at matematik netop er *mere* end et blot og bart udtryksmiddel eller redskab til fremstilling af teorier. Det er ikke bare umuligt at *udtrykke* videnskabelige teorier uden brug af matematik; der ville slet ikke *være* noget at udtrykke, hvis man ikke havde matematikken. Det er umuligt at drage konklusioner, teste empiriske teorier, opstille modeller og udføre beregninger uden matematik, og alle disse foreteelser er uundværlige dele af den videnskabelige praksis.

Anti-reduktonisme er selvklart formuleret som modreaktion mod reduktionisme i matematikken. Denne reduktionisme udspringer af den historiske udvikling mod større stringens i matematikken, der også ledte frem til Grundlagskrisen i 1920'erne. De tre traditionelle positioner i Grundlagskrisen – logicisme, intuitionisme, formalisme – kan alle tre anskues som forsøg på at reducere matematik til noget ikke-matematisk.[9]

I løbet af 1800-tallet havde man ellers haft stor succes med at foretage reduktioner af forskellige kategorier af matematiske entiteter til andre kategorier af matematiske entiteter.[10] At reducere en matematisk kategori $\boldsymbol{A}$ til en anden matematisk kategori $\boldsymbol{B}$ betyder i alt væsentligt i denne forbindelse at konstruere en model, der opfylder de definitioner og aksiomer og lignende, der karakteriserer kategori $\boldsymbol{A}$, inden for kategori $\boldsymbol{B}$. I løbet af 1800-tallet lykkedes det for f.eks. Cantor og Dedekind at reducere de reelle tal til de rationale i denne forstand. Eftersom en konstruktion af de komplekse tal ud fra de reelle allerede var kendt, lige så vel som de rationale tal lod sig konstruere ud fra de naturlige tal, havde man således en hel kæde af konstruktioner af de forskellige taltyper ud fra de naturlige tal. Det var derfor naturligt at prøve at reducere de naturlige tal til en kategori, der *ikke* bestod af tal, for således at få en samlet reduktion af talbegrebet.

---

8 Denne fremstilling trækker på Resnik [1995].

9 Denne fortolkning er selvfølgelig influeret af kendskab til den videre udvikling af Grundlagskrisens tre store skoler og er som sådan historisk upræcis. Både logicisten Frege og intuitionisten Brouwer mente selv, at deres respektive teorier var afklaringer af matematikkens væsen, mens Hilberts formalisme snarere var tænkt som en garanti af matematikkens *resultater* end som en reduktion af dens ontologi, så hverken Frege, Brouwer eller Hilbert ville kunne genkende sig selv i en beskrivelse af deres programmer som reduktionistiske. Men dette er ikke stedet for en mere detaljeret behandling af Grundlagskrisen.

10 Mit hovedeksempel her er reduktionen af tal til mængder, men der fandt også andre typer reduktion sted, f.eks. af geometri til aritmetik, og af ikke-Euklidisk geometri til Euklidisk. Det vil dog føre for vidt at komme ind på alle disse forskellige versioner af reduktion her.

Logicismens målsætning var netop at reducere alle kategorier af matematiske entiteter til ikke-matematiske, logiske entiteter. Freges bud på en grundlæggende ontologisk kategori, som alle tilsyneladende rent matematiske typer af entiteter kunne reduceres til, var *begreber*, mens Russell og Whitehead benyttede *propositioner*. Begge disse kategorier regnes dog i dag for at svare til *mængder* i forskellige iklædninger. Men hvor mængdebegrebet i slutningen af 1800-tallet *ikke* blev anset for at være et matematisk begreb, regner man i dag mængder for at være matematiske objekter. Således var det faktisk succesen med at reducere forskellige kategorier til andre, forhåbentlig mere grundlæggende kategorier, der ledte til, at det viste sig, at forsøg på at reducere matematiske kategorier til ikke-matematiske kategorier i reglen mislykkedes, ligesom man også kan betragte paradokserne i mængdelæren som et resultat af reduktionsprocessen, der således ledte op til Grundlagskrisen. Denne krise, de omtalte paradokser og også Freges ødelæggende kritik[11] af forsøg på at reducere talbegrebet til enten noget fysisk, noget mentalt eller blotte og bare symboler har været med til at skabe mistillid til reduktion som middel til at forklare og garantere matematikken. Resultatet af denne mistillid er selvfølgelig anti-reduktionisme: enhver matematisk teori må handle om matematiske entiteter og kan altså hverken være sand alene i kraft af sin udformning, som formalismen hævder, eller være sand i kraft af noget ikke-matematisk, som f.eks. i kraft af mentale konstruktioner, som intuitionismen hævder.

Anti-reduktionisme er, som jeg har formuleret ideen ovenfor, en meget vag tese. Hvad vil det sige, at en teori refererer til noget? Hvornår indgår en term på en sådan måde i et udsagn, at man ikke kan hævde, at udsagnet er sandt, uden samtidig at tilslutte sig den påstand, at den givne term er navnet på en faktisk eksisterende entitet? Der gives forskellige svar på denne type spørgsmål, og det er f.eks. meningsforskelle angående tolkningen af anti-reduktionisme, der gør det vanskeligt at vurdere, hvor mange versioner af indispensability-argumentet der findes.

Tesen om videnskabelig viden som en helhed, holisme, kan ved første øjekast virke kontraintuitiv. Tag som eksempel et forsøg med at lade en klods glide ned ad en slidske; hvis resultaterne af et sådant ikke stemmer overens med det forventede, kunne man i princippet overveje at revidere Newtons mekanik, men næppe hans differentialregning. Holisme-tesen er et grundsynspunkt i Quines tænkning og er en reaktion imod en form for skelnen mellem form og indhold, teorier og genstande, sprog og virkelighed, som er et gennemgående træk i filosofihistorien. Traditionelt[12] er matematik blevet betragtet som uafhængig af den fysiske verdens faktiske udformning, mens de empiriske videnskaber tværtimod er blevet anset for at handle om denne. Denne udvikling førte til, at de logiske positivister, først og fremmest Carnap, inspireret af Wittgensteins *Tractatus Logico-Philosophicus*, karakteriserede alle matematikkens udsagn som *analytiske*. Dermed menes sande i kraft af de indgående ords betydning, i modsætning til *syntetiske* udsagn, der er sande i kraft af, hvordan verden er.

Et matematisk udsagns sandhed er altså ifølge Carnap uafhængig af, hvordan den materielle verden ser ud. Men det betyder ikke, at et sådant udsagn handler om ikke-materielle genstande, som Platon eller Frege ville mene, men derimod at det udtrykker nogle konventioner for, hvordan vi har valgt at bruge forskellige termer. Når først rammerne for vores sprog er fastlagt, er det også fastlagt, hvilke matematiske udsagn der er sande, men i sidste ende er matematisk sandhed konventionel. Man kan have flere forskellige sproglige rammer, som vil resultere i, at forskellige matematiske udsagn bliver sande, men et spørgsmål om valg af sproglig ramme, kan ikke være et spørgsmål om, hvad der er rigtigt eller forkert, men kun om hvad der er mere eller mindre praktisk eller tiltalende.

Quines holisme er et opgør med denne form for skelnen mellem analytiske og syntetiske udsagn. Han kritiserer ideen om, at man kan drage en skillelinie mellem udsagn, der er sande i kraft af de indgående ords betydning, og udsagn, der er sande, fordi de er i overensstemmelse

---

[11] I Frege [1884], §§1-40.

[12] Platon *Staten*, bog VI, 525-526, Descartes *Regler*, Regel II 5, Kant *Kritik af den rene fornuft*, B14-15.

med de empiriske fakta.[13] Hans kritik går ud på at vise, at ethvert kriterium for, at to termer har "samme mening", vil forudsætte, at man kan afgøre, om et givet udsagn er analytisk. Altså er alle forsøg på at forklare, hvad det vil sige, at et udsagn er analytisk, cirkulære, og der kan ikke gives et kriterium for, hvornår udsagn er analytiske, og hvornår de er syntetiske, der ikke er i en eller anden forstand arbitrært. Quine afslutter sin diskussion med at skrive

> It is obvious that truth in general depends on both language and extralinguistic fact. The statement 'Brutus killed Caesar' would be false if the world had been different in certain ways, but it would also be false if the word 'killed' happened rather to have the sense of 'begat'. Thus one is tempted to suppose in general that the truth of a statement is somehow analyzable into a linguistic component and a factual component. Given this supposition, it next seems reasonable that in some statements the factual component should be null; and these are the analytic statements. But, for all its a priori reasonableness, a boundary between analytic and synthetic statements simply has not been drawn. That there is such a distinction to be drawn at all is … [a] dogma…, a metaphysical article of faith. (Quine [1951], 36-37)

På baggrund af tilbagevisningen af positivisternes specifikke forsøg på at drage en principiel skillelinie mellem matematik og de empiriske videnskaber mener Quine, at enhver skillelinie vil være arbitrær. De forskellige videnskaber og den almindelige, sunde fornuft udgør en helhed, et netværk, hvor alt hænger sammen. Nogle udsagn er ganske vist mere udsatte for at blive falsificeret af forsøg end andre, men dette skyldes vores valg. Et forsøgsresultat, der ikke er i overensstemmelse med vores forventninger, afgør ikke entydigt, hvilken del af vores teori der er skyld i uoverensstemmelsen. Det er vores fortolkning, der afgør, præcis hvilket udsagn der bliver afvist. Vi ville altid kunne have valgt at fastholde det givne udsagn, mod at erklære andre for falske.[14] Når matematiske udsagn ikke normalt bliver anset for at være tvivlsomme, selv om de eventuelt indgår i teorier, der bliver tilbagevist eksperimentelt, er det, fordi vi har valgt at frede matematikken, ikke fordi matematikken er anderledes end fysik i sit væsen.

Den sidste komponent i argumentet er *naturalismen*, som igen er en tese, der udspringer af Quines filosofi. Ligesom holismen er den også et opgør imod en generel tendens i filosofihistorien. Denne gang er det ideen om filosofien som en første eller øverste videnskab, der er forud for de øvrige og kan vurdere disse udefra, som der gøres op med.[15] Naturalisme går ud på, at alle vidensfelter anses for at være på samme niveau. Altså må filosofien ikke kritisere enkeltvidenskaberne ud fra ekstra-videnskabelige kriterier, men kun ud fra kriterier, der er umiddelbart forståelige for videnskabsmænd, uden inddragelse af nye typer begreber, genstande eller argumenter. Der er ingen særlig filosofisk metode, og filosofien indgår i netværket af menneskelig viden på samme måde som enkeltvidenskaberne. Naturalismen er således det filosofiske resultat af videnskabernes store succes, og selv om det ganske vist er Quine, der har givet strømningen et navn,[16] betyder det ikke, at naturalismen er et helt særligt træk ved hans filosofi. Synspunktet deles af et flertal af matematik-filosoffer, dog med undtagelse af repræsentanterne for den sprogfilosofisk inspirerede tradition som f.eks. intuitionisten Michael Dummett og neo-logicisterne Crispin Wright og Bob Hale.

Til sammen leder de fire teser om matematikkens indispensability, antireduktionisme, holisme og naturalisme altså til den konklusion, at der må findes abstrakte entiteter, som er matematikkens genstandsområde i kraft af hvilket matematiske udsagn har den sandhedsværdi, de nu engang har. Dette er en forholdsvis vag konklusion. De forskellige teser skal udbygges en del,

---

[13] Quine [1951].
[14] Quine [1951], 41-45.
[15] Denne ide forbindes især med Descartes' begreb om en "første filosofi", nemlig epistemologien, som skulle garantere al videns sikkerhed.
[16] Quine [1968b].

hvis de skal kunne besvare spørgsmål om, *hvilke* typer entiteter matematikken handler om, *hvordan* videnskaben bekræfter deres eksistens, og *hvilken* rolle matematik spiller i den videnskabelige praksis. Der er med andre ord lang vej igen fra at tilslutte sig indispensability-argumentet og til at have en fuldt udviklet matematik-filosofisk position.

En anden ting, man kan bemærke i forbindelse med argumentet, er det paradoksale i, at et argument, der i alt væsentligt er affødt af en empiristisk grundindstilling, fører til den konklusion, at abstrakte entiteter lige så fuldt er en del af verden som borde og stole. Dette er i høj grad et resultat af det 20. århundredes arbejde med at præcisere og karakterisere matematikkens formelle grundlag, og først og fremmest af Gödels sætning og dens ødelæggende konsekvenser for Hilberts program. Det er ikke længere troværdigt, at det skulle være muligt at retfærdiggøre matematikken uden reference til abstrakte entiteter.

§3 Den igangværende filosofiske diskussion af indispensability-argumentet blev indledt, da Hartry H. Field i 1980 udgav bogen *Science without Numbers*. Denne bog satte fokus på argumentet, idet Field udnævnte det til det eneste overbevisende argument for platonisme.[17] Da Field er modstander af platonismen, var hans ærinde med bogen - som titlen antyder - at vise, at indispensability-argumentet ikke er holdbart; anvendelsen af matematik i de empiriske videnskaber viser *ikke*, at der findes matematiske objekter. Metoden var at undergrave påstanden om, at når matematik er *nyttig* for videnskaberne, er det, fordi den er *sand*. Field er nominalist, hvilket betyder, at han afviser eksistensen af matematiske objekter.[18] Derfor er matematikken falsk ifølge Field, idet den refererer til abstrakte objekter, der ikke findes. Fields mål med bogen var at konstruere et alternativt middel til at drage nominalistiske, fysiske konklusioner fra nominalistiske, fysiske præmisser, uden at referere til abstrakte objekter. Field mener (eller mente) med andre ord *ikke*, at matematik er uundværlig for de empiriske videnskaber. Når matematik alligevel er nyttig, skyldes det ifølge Field, at matematik er *konservativ*:

> En teori *S* er *konservativ over en (nominalistisk) teori N*, hvis det gælder for ethvert (nominalistisk) udsagn **A**, der kan udledes fra *N*+*S*, at det også kan udledes fra *N* alene.

At matematik er konservativ betyder med andre ord, at den ikke tilfører empiriske teorier noget, der ikke i forvejen var implicit i dem.

Man kan bemærke følgende angående definitionen af, hvad det vil sige for en teori at være konservativ. For det første er en nødvendig betingelse, at teorien *S* er konsistent, eftersom man ellers vil kunne udlede hvad som helst fra *S*, og dermed også udsagn, der ikke kan udledes fra *N* alene, givet at *N* er konsistent. For det andet er definitionen relativ til teorien *N*. Jo mere omfattende *N* er, jo flere teorier vil der være, der er konservative over *N*.

Selv om Fields overordnede mål således er at vise, at de empiriske videnskaber kan bedrives uden brug af matematik, giver han sig kun i kast med et delmål i *Science without Numbers*. Projektet er at vise, at den newtonske mekanik kan formuleres og dens forskellige love eftervises alene v.h.a. logik og uden reference til tal, mængder og funktioner. I stedet refererer Field til rum-tidsregioner af vilkårlig størrelse, som han anser for at være nominalistisk tilladelige størrelser.

Field er blevet kritiseret fra flere forskellige sider. Michael Dummett[19] påpeger, at selv hvis man accepterer, at han har vist, at Newtons mekanik kan formuleres uden brug af matematik, har han stadig ikke vist, at al matematik kan undværes i enhver videnskabelig sammenhæng.

[17] Field [1980].
[18] Ifølge Fields egen udlægning af nominalisme, Field [1980]. Denne –isme findes, som så mange andre filosofiske positioner, i forskellige versioner.
[19] Dummett [1991], 298.

Bob Hale og Crispin Wright[20] har kritiseret Fields brug af begrebet "udledbarhed", som det indgår i definitionen af, hvad det vil sige, at en teori er konservativ. Hvad mener Field med, at et udsagn **A** er en konsekvens af en teori *S*? Han kan dårligt mene det i en bevisteoretisk forstand, eftersom det at tolke "A er en konsekvens af S" som "Der findes en udledning af **A** fra *S*" indebærer, at man refererer til en ide om *udledninger* som abstrakte objekter af vilkårlig længde. Han kan ligeledes næppe mene det i den modelteoretiske forstand, at **A** er sand i enhver model af *S*, eftersom en model af *S* normalt anses for at være et mængdeteoretisk objekt, som Field altså ikke ville acceptere som nominalistisk tilladelig. Field har svaret, at han bekender sig til en modal forståelse af konsekvens-begrebet: **A** følger fra *S*, såfremt det er *umuligt* at *S* er sand, uden at **A** samtidig er sand. Men dette rejser spørgsmålet om, hvordan man retfærdiggør modalitet? Det synspunkt kan udmærket forsvares, at modale begreber må begrundes v.h.a. mængdelæren, og hvis det er tilfældet, er Field lige vidt.

Derudover kan Field kritiseres for sin brug af rum-tidsregioner. Er en region af rum-tiden mindre abstrakt og mere nominalistisk tilladelig end gængse matematiske genstande?[21]

Alle disse kritikpunkter illustrerer, at selve indispensability-tesen er uklar. Hvad vil det sige, at der indgår eller ikke indgår matematik i en videnskabelig teori? Det meste af kritikken mod Field går netop ud på at hævde, at han faktisk *har* anvendt matematik i en eller anden forklædning i sit program på trods af, at Field selv vil hævde, at han udelukkende har brugt logik og nominalistisk tilladelige begreber. Debatten går med andre ord på, hvad der menes med ordet matematik, som det indgår i påstande om, at matematik vitterligt er en uundværlig bestanddel af videnskaben.

Endelig er det uklart, præcis hvor meget og hvilken slags matematik indispensability-tesen hævder, at videnskaben har behov for, og dermed hvor mange og hvilken slags matematiske entiteter indispensability-argumentet kan godtgøre eksistensen af, såfremt argumentet i øvrigt er holdbart. Det er et bevisteoretisk forskningsprogram at søge at afgrænse de matematiske antagelser, der faktisk er nødvendige for at kunne udlede de resultater f.eks. fysikken har brug for.[22] På den måde kan indispensability-tesen også læses som en tese med et *matematisk* indhold, eftersom spørgsmålet om matematiske teoriers udtrykskraft kan gøres til genstand for formel undersøgelse.

Der er udbredt enighed om, at Fields program er slået fejl. Men det afgør stadig ikke spørgsmålet om, hvorvidt tesen om matematikkens "indispensability" er holdbar. Det er et faktum, at videnskab som det praktiseres i dag gør udstrakt brug af matematik. Men et egentligt argument for, at det nødvendigvis må være sådan, ville formentlig kræve en noget grundigere afklaring af, hvad der menes med både videnskab og matematik. Jeg mener selv, at det er stærkt tvivlsomt, at begreber som videnskab og matematik i det hele taget lader sig afgrænse så skarpt, som et sådant argument ville fordre.

§4 Som nævnt består Fields nominalisme i, at han afviser eksistensen af matematiske objekter. Han ville med andre ord med glæde anerkende matematikken som sand, hvis den ikke refererede til abstrakte objekter, som er uden for rum-tiden, og som ikke virker kausalt, og når hans kritik af indispensability-argumentet har taget form af et forsøg på at undgå matematik i det hele taget, afspejler det, at han *ikke* mener, matematik kan formuleres uden reference til abstrakte objekter. Field accepterer med andre ord implicit den anti-redutionistiske tese.

---

[20] Hale [1987],108-112, og Hale & Wright [1992].

[21] Se S. C. Hale [1988] for en interessant diskussion af distinktionen mellem abstrakte og konkrete genstande.

[22] Feferman [1993] præsenterer resultater, der indikerer, at hans prædikative system W er tilstrækkeligt til at formalisere den del af matematisk analyse, der finder anvendelse i fysik.

Den er til gengæld blevet kritiseret fra anden side. Først og fremmest er den, som jeg allerede har været inde på, temmelig uklar. Hvordan afgør man, hvorvidt en given teori T refererer til en kategori af genstande **K**?

Det mest præcist formulerede, og samtidig mest omdiskuterede, forsøg på at besvare dette spørgsmål er Quines "Criterion of Ontological Commitment" (COC).[23] Dette kriterium går ud på følgende:

> En (person der tilslutter sig en) teori T forudsætter eksistensen af en kategori af genstande **K**, hvis og kun hvis der i en formulering af teorien i første-ordens logik indgår et udsagn på formen "$\exists x$: x er **K**".

De færreste filosoffer ville være parat til at tilslutte sig dette kriterium i dag.[24] For det første er det, på trods af sin eksakte formulering, i det store hele ubrugeligt i praksis. Videnskabelige teorier er simpelthen ikke formuleret i førsteordens logik, og der er ingen interesse for at få dem bragt på en sådan form, at kriteriet kan anvendes. Og selv hvis man skulle have en sådan formulering, vil der formentlig stadig være tvivl om, hvorvidt den givne formulering er den "rigtige", eller den bedst tænkelige eller mest simple og frugtbare. Den eneste teori, der kan siges at have en formulering i førsteordens logik, nemlig (en version af) aritmetikken, kan med lige stor ret siges at kvanticere over mængder, funktioner og propositioner, og hvis man mener, at der er et reelt spørgsmål om, hvilken af disse kategorier der er mest grundlæggende – hvilket f.eks. Quine ikke gør – giver kriteriet ikke noget svar. Selv hvis man opgiver håbet om at finde ud af, hvilken formulering der er korrekt, og i stedet vil udpege sin foretrukne formulering ud fra pragmatiske eller æstetiske kriterier, vil dette næppe give anledning til noget entydigt valg, eftersom vurderingen af, hvilken formulering der er mest tiltalende, formentlig vil afhænge stærkt af den konkrete situation, man måtte befinde sig i, og hvilket formål man måtte have med teorien.

Ovenstående kritik af Quines kriterium er rent praktisk. Men der er også mere principielle indvendinger. F.eks. har Charles Chihara og Stewart Shapiro rettet kritik mod den priviligerede rolle, som førsteordens logikken får i og med, den bliver udnævnt til det logiske system, der anvendes i forbindelse med spørgsmål om ontologisk forpligtelse. Ganske vist er førsteordens logik, i modsætning til f.eks. andenordens logik, fuldstændig og kompakt, men til gengæld er aritmetik som formuleret i andenordens logik kategorisk. Dette betyder, at valget af førsteordens logik som logisk system er en prioritering af fuldstændighed og kompakthed som ønskværdige egenskaber for en logik, og dette valg, mener kritikerne, kræver en filosofisk begrundelse eller forklaring, som Quine ikke har givet. Altså giver diskussionen anledning til en debat om, hvorvidt der er et logisk system, der har mere krav på at være "den rigtige" logik, end de øvrige.[25]

Endelig er der stadig forsøg på faktisk at give en fortolkning af matematiske teorier, der undgår reference til abstrakte objekter. Det mest fremtrædende er Chiharas bud.[26] Han mener, at de gængse matematiske teorier og sætninger er sande, men at de *ikke* refererer til abstrakte entiteter på nogen essentiel måde. Al matematik vil kunne omfortolkes uden brug af den gængse eksistens-kvantor. I stedet foreslår han, at eksistensudsagn tolkes som udsagn om, hvad der er *muligt* at konstruere. Med andre ord har Chiharas påstand om, at matematik kan formuleres uden

---

[23] Quine [1948].
[24] Diskussionen i dette og det næste afsnit trækker delvist på Chihara [1990], 9-11.
[25] I Resnik [1997] forsvarer Michael D. Resnik det synspunkt, at der ikke *er* noget logisk system, der er "det rigtige". Han er med andre ord logisk anti-realist, i øvrigt samtidig med at han er matematisk realist.
[26] Chihara [1990].

reference til abstrakte objekter, den lighed med Fields position, at den hviler på en hypotese gående ud på, at modale termer kan forklares uden henvisning til abstrakte objekter.[27]

Kritikken af Quines specifikke kriterium for ontologisk forpligtelse, som jeg har refereret den ovenfor, tager dog stadig udgangspunkt i, at man må kunne aflæse af videnskabelige teorier, hvad der findes i verden. Men selv dette er blevet kritiseret. Jody Azzouni[28] har argumenteret imod brugen af kriterier a la Quines i det hele taget, ud fra den tanke, at hele projektet er vendt på hovedet. Vi danner teorier ud fra forestillinger om, hvilke typer kategorier der er i verden, snarere end at vi aflæser kategorierne af teorierne.[29] Helt specifikt mener Azzouni, at vi på forhånd skelner mellem f.eks. fysiske (f.eks. navne på genstande), fysisk meningsfulde (f.eks. massemidtpunkter) og rent matematiske entiteter i fysiske teorier, og at disse, i modsætning til hvad Quine hævder i sit kriterium, *ikke* kan siges at eksistere på samme måde alle sammen. I Quines kriterium kan "der findes" kun have een mening, men sådan behandler videnskaben faktisk ikke de forskellige eksistensudsagn, som den selv fremsætter. Jeg vil vende tilbage til denne type kritik af Quines kriterium for ontologisk forpligtelse senere.

Den anti-reduktionistiske tese er nok en af de *mindst* kritiserede dele af indispensability-argumentet. Matematikfilosoffer er i dag tilbøjelige til at mene, at hvis matematiske udsagn i det store hele er sande, så må det skyldes en eller anden form for forbindelse til nogle særlige matematiske objekter. Men dette skyldes ifølge min vurdering snarere tesens vaghed end en udbredt enighed om, hvad der i grunden forstås ved, at en (matematisk) teori refererer til et (matematisk) objekt, blandt filosoffer.

§5 Tesen om, at videnskaben er holistisk, og at matematik følgelig bliver testet empirisk, når som helst man tester en teori, hvori der indgår matematik, er straks mere omdiskuteret. Det er også hovedsaglig denne tese, der er emnet for den bølge af artikler, der er kommet om indispensability tesen inden for de sidste godt 10 år.[30] Grunden til, at tesen er blevet genstand for så megen opmærksomhed er selvfølgelig dels, at påstanden om, at matematik bliver empirisk eftervist, er i stærk modstrid med de fleste menneskers intuition, og dels, at problemfeltet om forholdet mellem matematik og naturvidenskab, teori og eksperiment er så kompliceret og samtidig så centralt for traditionel videnskabsteori. Således har en diskussion om matematikkens rolle i eksperimenter en rig baggrund af videnskabsteoretisk analyse af forholdet mellem teori og eksperiment at trække på, samtidig med, at videnskabsteori i vid udstrækning ikke har problematiseret matematik, men derimod implicit anset matematik for at være præcis lige så ubetvivlelig, som Platon og Descartes tog den for at være.

Jeg vil her kun skitsere tre indvendinger imod holisme-tesen. Som antydet ovenfor er litteraturen på området ganske omfattende og stadigt voksende, så dette er næppe stedet for en udtømmende gennemgang af den. Jeg har valgt at diskutere indvendingerne fra henholdsvis Maddy [1992] og Sober [1993] af flere grunde. For det første har disse to artikler, så vidt jeg kan dømme, været med til at starte den nuværende debat; de er i hvert fald blandt de ældste og mest omdiskuterede af de artikler om emnet, som jeg har kendskab til. For det andet fremsætter Maddy nogle overvejende praktiske, historisk inspirerede indvendinger, mens Sobers indvendinger er af mere principiel karakter og er inspireret af den videnskabsteoretiske debat om, hvordan teorier bekræftes eksperimentelt, således at gennemgangen af deres indvendinger giver et overblik over

---

[27] Chihara har med Chihara [1998] søgt at godtgøre dette, men det vil føre for vidt at prøve at vurdere, hvorvidt det er lykkedes, her.

[28] Azzouni [1997] og [1998]. Han tager dog et vist forbehold for sine synspunkter, idet han karakteriserer sin argumentation som foreløbig og forsøgsmæssig.

[29] Dette er et firkantet udsagn, idet vi selvfølgelig løbende reviderer både vores teorier og vores forudsætninger, men det er ikke mit ærinde her at diskutere den præcise måde, hvorpå teorier opstår. Alligevel mener jeg, at påstanden nogenlunde formidler kernen i Azzounis kritik.

[30] F.eks. Azzouni [1997], Colyvan [1998] og [1999], Maddy [1992], Peressini [1997] og [1999], Resnik [1995], Sober [1993], Steiner [1989] og [1995].

forskellige synsvinkler på holisme-tesen. For det tredie er disse to artiklers kritik af en sådan karakter, at den dels er forholdsvis umiddelbart forståelig – Maddys kritikpunkter er mere eller mindre det første, der falder folk ind, første gang de hører om holisme-tesen – dels går direkte til problemets kerne: hvad foregår der egentlig, når matematik anvendes af de øvrige naturvidenksaber?

Maddy har to indvendinger imod holisme-tesen, som begge kan sammenfattes under overskriften "Det passer jo ikke". Kritikken går med andre ord på, at det billede af videnskabelig praksis, som indispensability-argumentet giver, ikke stemmer overens med, hvordan videnskab faktisk foregår. Men da det er en del af indispensability-argumentet – der jo har naturalismen indkorporeret som sit syn på forholdet mellem filosofi og videnskab – at det bør respektere videnskabens egen praksis og dens normer, må det være argumentet, der er noget galt med, snarere end den videnskabelige praksis.

Maddys indvendinger går dels på, at den *videnskabelige* praksis er at skelne mellem *sande* og *nyttige* teorier, og at videnskabsmænd altid rubricerer matematiske teorier blandt de sande. Et eksempel er Newtons mekanik, som strengt taget ikke er sand, men som ofte indgår i forskellige beregninger, f.eks. når det forventede resultat af et givet eksperiment skal beregnes, fordi teorien er tilstrækkelig god til at være nyttig og er langt nemmere at regne på end kvantemekanik og relativitetsteori, som ellers betragtes som korrekte teorier. Denne indvending har en vis lighed med Azzounis kritik af Quines "criterion of ontological commitment", jf. tidligere.[31] Den går i alt væsentligt på, at det er en fejlrepræsentation af videnskaben at påstå, at alle termer og alle teorier indgår på samme måde. I praksis skelnes der mellem typer af teorier og objekter.

En yderligere indvending angående den videnskabelige praksis er, at hvis matematik bekræftes på samme måde som empiriske teorier, må matematik også *af*kræftes på samme måde. Derfor burde forsøgsresultater, der ikke stemmer med forventningerne, også så tvivl om den indgående matematiske teori. Men masser af matematik har været brugt i fejlslagne eksperimenter, uden at man af den grund nogensinde har taget den for at være eksperimentelt modbevist, endsige mistet tillid til den af den grund. Eller for at formulere den samme indvending som set fra matematikernes synspunkt, snarere end fra de eksperimentelle videnskabsfolks synspunkt: nye matematiske teorier afventer ikke forsøgsresultater, før matematiker-samfundet begynder at behandle dem som accepterede på samme måde som velbekræftede teorier. Matematikere bekymrer sig i det store hele ikke om, hvordan deres teorier klarer sig i laboratoriet.

Begge disse indvendinger går på, at selv om der måske ikke er blevet formuleret noget filosofisk holdbart kriterium, der tjener til at adskille matematikken fra naturvidenskaben, så foretager videnskabsmænd *i praksis* denne form for skelnen hele tiden, og det betyder blandt andet, at matematik bliver fredet i forsøg. Kritikken kan med andre ord ses som et forsøg på at skubbe bevisbyrden over på den anden part i debatten. Hvor Quine oprindeligt argumenterede for, at hvis der skulle kunne drages en skillelinie mellem matematik og eksperimentalvidenskaberne, ville han se et eksplicit, ikke-cirkulært og ikke-arbitrært kriterium, går Maddys og Azzounis kritik på, at videnskabsmænd faktisk dagligt drager sådan en skillelinie; altså er denne skelnen en del af videnskabelig praksis, som bør forklares, således at det er holismen, der skylder anti-holismen en forklaring, snarere end omvendt.

Sobers[32] kritik af holisme-tesens rolle i indispensability-argumentet tager udgangspunkt i en videnskabsteoretisk synsvinkel på, hvad det vil sige, at en teori bekræftes eller afvises af et eksperiment. Hans pointe er, at teorier altid bekræftes eller afkræftes i forhold til alternative teorier.[33] Et eksperiment afgør ikke, om teorien T_1 er korrekt, men om den er bedre eller værre

---

[31] Azzouni [1997]

[32] Sober [1993].

[33] Dette er i alt væsentligt Kuhns kritik af Poppers falsifikationisme og er en accepteret del af videnskabsteori i dag.

end en konkurrerende teori T_2. Hvis der indgår ca. den samme matematik i de to teorier, og det gør der ofte, er matematikken faktisk ikke blevet testet overhovedet. Eller for at formulere den samme pointe på en anden måde: det, at en teori er blevet testet eksperimentelt, er ikke det samme, som at dens enkelte dele er blevet testet eksperimentelt. På den måde kan man sige, at Sober vender holisme-tesen på hovedet: netop *fordi* teorier kun bliver testet som helheder, bliver matematik *ikke* testet empirisk.

Både Maddys og Sobers kritik illustrerer, at det i høj grad er et åbent filosofisk spørgsmål, præcis hvordan matematik indgår i de empiriske videnskaber, og hvad forholdet er imellem disse og matematik. Når jeg afslutter diskussionen af holisme her, skal det således ikke tages som udtryk for, at Maddy og Sober har det sidste ord i den sag. Resnik har[34] f.eks. prøvet at fremstille en version af indispensability-argumentet, der tager højde for deres kritikpunkter og har indarbejdet en mere nuanceret analyse af forholdet i sin *Mathematics as a Science of Patterns* (Resnik [1997]). Men mit ærinde her har udelukkende været at illustrere, hvordan holisme-delen af indispensability-argumentet giver anledning til yderligere diskussion af forholdet mellem matematik og de øvrige videnskaber, og derfor vil jeg afslutte diskussionen her.

§6 Naturalismen er, ligesom anti-reduktionismen, måske snarere en strømning eller tilbøjelighed end en egentlig tese. Yderligere paralleller med anti-reduktionisme er, at den er temmelig vagt formuleret, at den nyder stor tilslutning blandt filosoffer, og at den hovedsaglig er en modreaktion imod en tendens i filosofihistorien, som forekommer utroværdig i dag p.g.a. den videnskabelige udvikling. Netop fordi tilliden til naturvidenskaben som kilde til viden er en del af næsten alle filosoffers tankegang, er der meget lidt eksplicit diskussion af naturalismen. Den bliver ofte taget for givet i en eller anden forstand, nok også fordi en diskussion af, hvad det betyder, at filosofi ikke benytter ekstra-videnskabelige metoder, forudsætter en afklaring af, hvad det vil sige, at noget er en videnskabelig metode, og det er i sig selv et større filosofisk spørgsmål.

Jeg er således ikke stødt på nogen eksplicit kritik af naturalismen, men det er ikke ensbetydende med, at den er uproblematisk. Der er ikke så megen tvivl om, at naturalismen er korrekt – der er næppe nogen, der vil hævde, at de er i besiddelse af en metode, der går ud over videnskaben, men er mere pålidelig end den – men der er til gengæld tvivl om, hvor langt naturalismen rækker, og hvor meget den kan bruges til. Et eksempel på dette er Penelope Maddys ændrede position. Hvor hun i sin *Realism in Mathematics* (Maddy [1990]), som titlen antyder, forsvarede matematisk realisme – mere specifikt den tese, at matematiske udsagn er sande, og at matematik derfor må have et særligt genstandsområde af matematiske objekter – på baggrund af netop indispensability-argumentet, er hun i sin *Naturalism in Mathematics* (Maddy [1997]) gået bort fra helt så håndfaste påstande. I *Naturalism* diskuterer hun ikke realisme-spørgsmålet overhovedet, men beskæftiger sig i stedet med en filosofisk motiveret analyse af et *historisk* spørgsmål, nemlig spørgsmålet om, hvilke kriterier matematikere tidligere er gået ud fra, når de har skullet vælge axiomer. Sigtet er selvfølgelig filosofisk i den forstand, at hun er interesseret i at afgøre, hvilke nye axiomer man bør indføre i mængdelæren. Men i *Naturalism* prøver hun at efterleve det krav, at man ikke bør besvare sådan et spørgsmål ud fra ekstra-matematiske kriterier, hvorfor der ligger en opgave i at afgøre, hvad der faktisk er af *matematiske* kriterier for valg af axiomer. På spørgsmål om, hvorfor hun er ophørt med at forsvare (sin version af) matematisk realisme, svarer hun, at det er, fordi hun ikke længere er overbevist om, at indispensability-argumenter viser, at matematikken er *sand*.[35] Dette må tages som et udtryk for, at Maddy ikke mener, at videnskaben behandler matematik, som om den er sand. Hvis det er tilfældet, har videnskaben ikke noget svar at give på spørgsmålet om, hvorvidt matematikken (i det store hele) er sand, og følgelig kan en naturalistisk filosof heller ikke svare hverken ja eller nej.

---

[34] I Resnik [1995].
[35] Maddy [1999].

Det er med andre ord uklart, hvad naturalismen indebærer, og hvorvidt filosofi som selvstændig disciplin har en eksistensberettigelse, set fra et naturalistisk synspunkt. Specielt fordi det som regel kræver en del fortolkning at afgøre, *hvad* og *om* videnskaben svarer på spørgsmål om, hvad der findes i verden, og hvad der er sandt, som eksemplet med Maddys ændrede holdning illustrerer.

Endelig anses den naturalistiske tese af mange[36] for at gøre spørgsmålet om *matematisk* sandhed til et ubetydeligt vedhæng til spørgsmålet om *videnskabelig* sandhed, således at indispensability-argumentet kommer til at betyde, at man højst kan være realist m.h.t. til matematik, såfremt man er også er realist i mere almen videnskabsfilosofisk forstand. Resniks 'Scientific vs. Mathematical Realism: The Indispensability Argument' ([1995]) er netop et forsøg på at fremstille en version af argumentet, der ikke hænger på sandheden af videnskabelige teorier, idet han anser det for at være langt mere indlysende, at matematikken i det store hele er sand, end at videnskaben er det. Jeg vil ikke her forsøge at vurdere, hvorvidt Resniks forsøg er lykkedes.

§7 Den foregående diskussion illustrerer dels den livlige debat angående Indispensability argumentet, dels den lange række af uafklarede filosofiske problemer, som argumentet har forbindelse til. Argumentet benytter sig af en lang række begreber – uundværlighed, videnskabelig praksis, teori, reference, evidens, sandhed – der langt fra er klart afgrænsede, og det knytter an til problemfelter som forholdet mellem sprog og virkelighed, mellem teori og eksperiment samt mellem filosofi og videnskab, der er genstand for megen uenighed. Jeg vil således påstå, at når argumentet har så stor tilslutning, som det har – stort set alle nyere platonister[37] refererer til indispensability som grunden til deres overbevisning – så er det i høj grad, fordi det er så uklart. Jeg forestiller mig, at enhver nøjere specificering af, hvad der menes med f.eks. videnskab, vil få argumentet til at virke mindre overbevisende på nogle af dets nuværende tilhængere.

Derudover har argumentet også et tvetydigt forhold til den almindelige sunde fornuft ("common sense"), som naturalister typisk mener, at deres tænkning ligger i forlængelse af. På den ene side giver det umiddelbart svar på Wigners spørgsmål i 'The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences'[38]: hvordan kan det være, at matematikken er sådan et effektivt redskab for de empiriske videnskaber? Fordi matematikken *er en del af* de empiriske videnskaber. Spørgsmålet svarer til at spørge om, hvorfor fysik er så effektivt et hjælpemiddel for fysik. Argumentet er desuden en naturlig forlængelse af, hvad lægfolk bemærker, når man præsenterer matematik-filosofi for dem. Den første reaktion på ideen om, at matematik kan betvivles, er som regel chok, mens den anden reaktion, som indtræder efter et øjeblik, er at referere til ingeniørkunst: jamen, når det kan lade sig gøre at bygge en Storebæltsbro, så *må* matematik være i orden. På den anden side er holisme-tanken tilsvarende i konflikt med andre af den almindelige sunde fornufts antagelser. Hvis man har to bunker æbler med fem i den ene og syv i den anden, og resultatet af en samlet optælling *ikke* bliver tolv, er den eneste acceptable forklaring, at nogen må have anbragt eller fjernet et eller flere æbler, eller at man simpelthen har talt forkert. Dette er langt mere simpelt og indlysende end en hvilken som helst samlet helhed af videnskabelig teori, der ellers kunne tænkes at bekræfte, at 7+5=12.

[36] F.eks. Michael Resnik og Bob Hale. Sidstnævnte fremhæver (i personlig samtale) det neo-fregeanske program og dets brug af Freges kontekstprincip som et bedre bud på et argument for matematisk realisme, netop fordi spørgsmålet om matematisk sandhed på den måde kobles fra spørgsmålet om videnskabelig sandhed og på spørgsmålet om logisk sandhed, også selv om det neo-fregeanske argument for eksistensen af matematiske objekter ifølge min læsning har vigtige strukturelle lighedspunkter med indispensability-argumentet.

[37] Undtagelserne til denne regel er f.eks. Bob Hale, Crispin Wright og James Robert Brown.

[38] Wigner [1960].

§8 Jeg har nævnt forskellige former for kritik af argumentet, som alle går på, at en eller flere af de enkelte indgående teser er problematisk. Enten kan videnskaben faktisk formuleres uden brug af matematik (Field), eller matematik refererer ikke til matematiske objekter (Chihara), eller der kan og bliver draget grænser mellem matematik og de empiriske videnskaber (Sober) eller naturalisme giver ikke anledning til den konklusion, at matematiske objekter findes (Maddy). Men alle disse kritikpunkter accepterer argumentets *form*. Min hovedindvending mod indispensability argumentet er, at det er tvivlsomt, at det kan lade sig gøre at eksplicitere alle videnskabens forudsætninger og på den måde aflæse, hvilke entiteter der findes i verden. For mig at se hviler indispensability argumentet på nogle for snævre og fordrejede begreber om, hvad videnskabelig viden er,[39] og hvad objekter er, som kritikerne i øvrigt deler.

Hvis indispensability-argumentet skal virke overbevisende, skal (videnskabelig) viden være ekspliciterbar, fuldstændigt gennemsigtig og udgøre et system, hvori det kan afgøres entydigt, hvilken rolle de enkelte udsagn spiller, altså om de er grundantagelser, hypoteser, forsøgsresultater eller andet. Den model for viden, der anvendes, kan altså eksemplificeres ved f.eks. en (idealiseret) lærebog. Et minimumskrav er, at det kan afgøres, hvilke udsagn der anses for basale sandheder. Men sådan fungerer viden ganske simpelt ikke. Viden består ikke i korrekte beskrivelser, men er snarere et forhold mellem et handlende individ og verden. Specielt er viden ikke hierakisk på samme måde som et teoretisk system nødvendigvis må være, i og med det bliver fremstillet skriftligt. Lad mig tage et eksempel. At en funktion f: $M \rightarrow N$ er *kontinuert* i et punkt $x_o \in M$ kan defineres på (mindst) tre måder ud fra forskellige begreber.[40]

a) (Den metriske definition) For ethvert $\varepsilon>0$ findes der et $\delta>0$ således at $|x_o-x|<\delta$ medfører $|f(x_o)-f(x)|<\varepsilon$.
b) (Følgekontinuitet) For enhver følge (x_n), der konvergerer mod x_o, gælder det, at følgen $(f(x_n))$ konvergerer mod $f(x_o)$.
c) (Den topologiske definition) For enhver åben omegn U om $f(x_o)$, er $f^{-1}(U)$ en åben omegn om x_o.

Hvis (matematisk) viden skal kunne stilles op i et hierakisk system med klare grundbegreber, må en af disse definitioner udnævnes til at være den grundlæggende, og der skal to beviser til at godtgøre, at de to andre *også* beskriver begrebet kontinuitet.[41] Ifølge min overbevisning (og paradoksalt nok også ifølge Quines begreb om ontologisk relativitet[42]) er der simpelthen ikke noget svar på spørgsmålet om, hvilken definition der er den rigtige. Der er altså i dette tilfælde ikke nogen skelnen mellem, hvad der er en definition, og hvad der er en sætning, der skal bevises. Men hvor Quine drager den konklusion, at det er, fordi ontologi er relativ til teori, er min konklusion, at det er en forvanskning at mene, at viden/teorier kan stilles op på en måde, så deres

---

[39] Ideen til kritik af vidensbegrebet stammer i stor udstrækning fra [Dohn 1997].

[40] Hvis man accepterer klassisk logik og udvalgsaxiomet. Det vil jeg gøre i denne fremstilling.

[41] En indvending kunne være, at definitioner blot er forkortelser, og at valg af definitioner afhænger af baggrundsteori, hvorfor de tre definitioner fortolket i standard ZF mængdelære ville være på lige fod, så problemet slet ikke opstår. Mit (foreløbige) svar hertil, som jeg ikke agter at uddybe her, ville være at sige for det første, at det er et reelt spørgsmål, hvad det vil sige at vide, hvad kontinuitet er, hvorfor det faktum, at en fortolkning i mængdelære får spørgsmålet til at forsvinde ved at eliminere ordet "kontinuitet", simpelthen viser, at mængdelæren er en malplaceret ramme for diskusion af, hvad kontinuitet er. For det andet mener jeg ikke, at definitioner er arbitrære i den forstand, at de blot tjener som indføring af forkortelser og i princippet kan undværes. Historisk set er det at finde en god definition ofte en stor bedrift og resultatet af års arbejde fra flere menneskers side, og derfor bør matematik-filosofien også opfatte definitioner som bærere af information. For en indledende diskussion af problemstillingen, se J. R. Brown [1999], kapitel 7. Tak til Bob Hale for en diskussion af dette spørgsmål, der hjalp mig til at gøre mine tanker væsentligt klarere.

[42] Quine [1968a].

ontologiske bindinger fremgår utvetydigt af dens/deres udformning. Ifølge Quine vælger man en teori (ud fra helhedsbetragtninger om, hvad der giver den "bedste"[43] totale teori), der så afgør, hvilket af de ovenstående udsagn, der er en definition. Men efter min mening behøver man ikke foretage et sådant valg. Eller rettere sagt, man behøver ikke stå ved sit valg. Man kan i enhver given situation vælge det udsagn, der er mest oplagt eller tiltalende ud fra, hvad man skal bruge sin definition til. Derfor er der stadigvæk et spørgsmål om, hvad kontinuitet *er*, men dette spørgsmål afklares ikke af valg af en enkelt definition. Begrebet kontinuitet indgår i en række forskellige sammenhænge, og man ved, hvad kontinuitet er, hvis man kan håndtere begrebet i (nogle af) disse sammenhænge, og det kræver måske netop, at man *ikke* lægger sig fast på en enkelt definition. Viden er ikke nødvendigvis tilslutning til en korrekt teori, men snarere (blandt andet) en praktisk evne til at udvælge og bruge teorier.

Netop *fordi* videnskaben er en forlængelse af "common sense", er det stærkt kontekstafhængigt, hvilke udsagn der er basale, og hvilke der er afledt af andre. Matematikkens udvikling viser i særlig grad, hvordan der hele tiden bliver større og større klarhed over grundbegreberne (tænk blot på geometriens udvikling), samtidig med at der bliver bevist flere og flere sætninger om mere og mere komplicerede strukturer. Hvad der til enhver tid antages for at være de *basale* sandheder, som resten bygger på, ændrer sig konstant. Og hvad mere er, disse ændringer modificerer samtidig de indgående termers betydning, idet de bringes til at dække over tilfælde, som de ikke før dækkede over.[44] På den måde er ethvert formaliseret vidensystem et øjebliksbillede af et system i en dialektisk proces, der stadigt udvikler sig.

§9 Min kritik af den videns-opfattelse, der ligger til grund for indispensability-argumentet, hænger nøje sammen med mine indvendinger angående det objektbegreb, som for mig at se også er en del af de implicitte forudsætninger for, at argumentet kan stilles op. I indispensability-argumentet optræder (matematiske) objekter som noget, der indgår i (matematiske) teorier. Men begrebet om objekter som noget, der beskrives af teorier, er langt fra det eneste mulige objektbegreb. Jeg vil her nævne 7 forskellige, som ganske vist har forbindelser til hinanden, men som ikke desto mindre repræsenterer forskellige synsvinkler på, hvad objekter er:

a) objekter er værdier for variablerne i teorier (Quines COC)
b) objekter er bærere af egenskaber
c) objekter er det, der kan være subjekt for en dom (Leibniz)
d) objekter er noget, der har et identitetskriterium tilknyttet (Frege)
e) objekter er noget, der kan tælles
f) objekter er noget, der kan skelnes og genkendes
g) objekter er noget, der bevæger sig kontinuert i tid og rum.

I det følgende vil jeg uddybe disse begreber og foretage en indledende diskussion af deres forbindelser, oprindelse og begrænsninger.

Indispensability-argumentet er et argument for, at visse objekter eksisterer, og derfor hænger det også implicit sammen med en vis ide om, hvordan man karakteriserer objekter, eller hvad det vil sige at være et objekt. Denne ide er, at et objekt er noget, der beskrives af en teori, som det fremgår af den anti-reduktionistiske tese. Men når objekter beskrives af teorier, sker det som oftest ved, at de tilskrives visse egenskaber. Ingen teorier om elektroner nøjes med at sige "elektroner er"; teorien går altid på, at "elektroner er ladningsbærere" eller "elektroner har masse

[43] Jeg vil ikke her diskutere teorivalg nøjere. Den "bedste" teori kan således være den mest simple, frugtbare, smukke eller mest ontologisk beherskede; jeg vil overlade det til læseren at indsætte sit yndlingskriterium.
[44] Det klassiske eksempel er Lakatos [1976]. Processen svarer til det begreb om et "wide reflective equilibrium" som Rawls [1971] har gjort kendt.

m_e" eller lignende. Min påstand er altså, at objektbegrebet a) i indispensability-argumentet er et teoretiske objekt-begreb, og således knyttet sammen med b), hvor objekter ses som "noget, der har egenskaber". Her er objektet altså blot et substrat for sine egenskaber. Dette objektbegreb går tilbage til Leibniz, om ikke før, og svarer således delvist til c), der er en version af Leibniz' ide om substanser som "noget, der kan være subjekt for et udsagn", eftersom et udsagn hos Leibniz i det store hele også er på formen "A er B" og altså består i at tilskrive et objekt et prædikat. Objektbegrebet i indispensability-argumentet svarer altså til (mindst et af) begreberne a), b) og c), som er nært sammenknyttet.

For mig at se er dette objektbegreb, eller denne gruppe af objektbegreber, fordrejet eller for snævert. I hvert fald er det ikke den *eneste* type objektbegreb, vi har til rådighed, og derfor er det en fejltagelse at behandle det som sådan, hvilket er, hvad indispensability-argumentet implicit gør. Ved at fokusere ensidigt på en type objektbegreb, overser man vigtige spørgsmål om, hvad et matematisk objekt er (hvis de findes), og hvordan de forholder sig til ikke-matematiske objekter.

Jeg vil nu skitsere objektbegreberne d), e), f) og g) og diskutere, hvordan spørgsmålet om de forskellige objektbegrebers status viser sig i nyere matematik-filosofi. Men først vil jeg gøre opmærksom på, hvordan min diskussion af objektbegrebet *ikke* skal forstås. Jeg vil ikke hævde, at der er et af de nævnte begreber, der kan gøre krav på at være filosofisk priviligeret i forhold til de andre, og jeg vil heller ikke vove at påstå, at der ikke kan være overlap mellem begreberne. Hvordan de præcis forholder sig til hinanden, har jeg endnu ikke dannet mig en mening om, og det er et spørgsmål, jeg muligvis vil vende tilbage til andetsteds. Her er mit ærinde blot at påpege, at der *er* forskellige objektbegreber, og at deres status, rolle i indispensability-diskussionen og forhold til forskellige videns-begreber er uafklaret.

Overfor de tre første, mere teoretiske objektbegreber kan man stille begreberne d), e), f) og g). Med e) mener jeg begrebet om objekter som noget, der kan tælles. Dette skal forstås som følger: at tælle en samling genstande er at tilordne hver enkelt ét og kun ét tal. Dette forudsætter 1) at man kan *skelne* to objekter fra hinanden, således at man er sikker på, at man ikke giver det samme tal til to objekter og 2) at man kan *genkende* objekter, således at man ikke kommer til at give det samme objekt to forskellige tal. Det hænger altså sammen med objektbegrebet f).Det er også dette, der ligger i definitionen af kardinalitet (af endelige mængder), når det defineres, at en mængde M har kardinalitet n, hvis og kun hvis der findes en bijektiv afbildning f: $M \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Dette objektbegreb er ifølge min læsning også bevæggrunden for, at Frege erklærer tal for at være objekter. Vi kan jo skelne to tal fra hinanden, f.eks. v.h.a. ordningsrelationen <, og genkende et tal som det samme, også når det bliver præsenteret på to forskellige måder i f.eks. en ligning som 2=1+1.[45] Problemet er selvfølgelig bare, at hvis man vil anvende karakteristikken af genstande som det, der kan tælles (d.v.s. tilordnes tal), som kriterium for at afgøre, hvorvidt noget er en genstand, kan den *ikke* anvendes på tal, uden at der er tale om en cirkelslutning. Dermed bliver det også et problem for en hvilken som helst anden klasse af matematiske objekter, i hvert fald for så vidt som de skal kunne danne grundlag for udledelsen af matematikken som sådan. Jeg mener selv, at ideen om objekter som noget, der kan skelnes fra hinanden og genkendes igen, er dybt indgroet i vores før-filosofiske brug af begrebet "objekt", og at de her anførte overvejelser viser, hvorfor vi, på trods af at vores objektbegreb ikke oprindeligt har indbefattet tal, alligevel intuitivt har tilbøjelighed til at anse tal for objekter.

---

[45] Frege argumenterer for, at for at vise, at tal er objekter, er det tilstrækkeligt at kunne angive et identitetskriterium ("Kenzeichen der Gleichheit", eng. "Criterion of identity"). Han angiver altså d) som sit objektbegreb. Men dette bruges kun til at afhverve kritik, efter at han ifølge sin egen mening har godtgjort, at tal er objekter v.h.a. kontekstprincippet, og dette princips implicitte objektbegreb minder mest om c), Leibniz' rent syntaktiske karakteristik: noget er et objekt, hvis det er referencen for et egennavn ("Eigenname", eng. "proper name" eller "singular term"). Disse to objektbegreber hænger altså sammen, i hvert fald for Frege.

Man kan spørge til, hvordan den skelnen, der er indeholdt i begrebet om objekter som noget, der kan tælles, skal foretages. Begrebet a) om objekter som værdier for variabler i teorier er i bund og grund et svar på dette spørgsmål, i og med at det indebærer, at objekter skelnes v.h.a. den givne teori. Det hænger også nøje sammen med b). Hvis en teori karakteriserer x som havende egenskab P, skelner den altså mellem objekter alt efter, hvorvidt de har egenskab P eller ej. Objektbegrebet g) baserer skelnen mellem objekter på kontinuitet af bevægelser i tid og rum. Dette objektbegreb er altså afledt af - og følgelig overvejende dækkende for - middelstore fysiske objekter ved normale hastigheder. Her identificeres et objekt v.h.a. sin historie, altså sin bane i rummet over tid. Ifølge dette objektbegreb er vanddråber, der løber ned ad en rude, objekter, mens det er tvivlsomt, om det er tilfældet, hvis man bruger “det at kunne tælles” som kriterium. De færreste vil vel regne vandet i en spand for et objekt (og tilsvarende for andre massetermer), mens det falder mere naturligt at kalde en enkelt, isoleret vanddråbe for et objekt, og regndråberne på ruden må siges at være en slags grænsetilfælde, der ligger imellem de to tilfælde af vand, som noget kontinuert i tid og rum, men ikke opdeleligt i enheder, der kan tælles, og vand som klart afgrænsede enheder, der dog ændrer afgrænsning over tid.

Undersøgelser af spædbørn omkring 10 måneders alderen tyder på, at mens de ganske vist har forventninger om, at (middelstore fysiske) objekter bevæger sig kontinuert i tid og rum, bliver de *ikke* mærkbart overraskede over at se, at et objekt tilsyneladende skifter farve, facon, materiale og lignende efter at have bevæget sig ind bag en skærm.[46] Dette tyder på, at et objektbegreb som g) baseret på kontinuitet af bevægelse er *forud* i tid for objektbegrebet b) baseret på egenskaber. Dette bør give anledning til filosofisk overvejelse, eftersom filosofi efter min mening til en vis grad må indrettes efter vores dagligdags opfattelse af verden. Det betyder ikke, at sidstnævnte ikke kan modificeres, men det betyder, at den ikke kan modificeres på alle punkter på en gang, og at en filosofi, der helt undlader at tage hensyn til vores før-filosofiske tænkning, er fejlslagen.

Lad mig afslutte min skitse af uklarheder i objektbegrebet med en gennemgang af to eksempler fra nyere matematik-filosofi, der stiller spørgsmålstegn ved, i hvor høj grad forskellige objektbegreber kan overføres på matematiske entiteter. Eksemplerne er ganske vist ikke formuleret i disse termer, men for mig at se er det alligevel dette spørgsmål, der går igen i forskellige iklædninger. Det første eksempel er Azzounis kritik af overførsel af et fysisk inspireret begreb om objekter, og det andet er Akibas kritik af opfattelsen af matematiske objekter som noget, der har veldefinerede egenskaber.

Azzouni påpeger,[47] at matematiske termer fungerer anderledes end empiriske termer, idet det ikke ser ud til, at man kan begå samme type *fejltagelser*, når man bruger den ene slags termer som den anden. Når man skal referere til noget v.h.a. en empirisk term, kan man begå to typer fejltagelser: man kan enten tage fejl af, hvad termen refererer til, fordi man forveksler referenten med et andet objekt (en A-fejltagelse i Azzounis terminologi), eller fordi man ikke er klar over, hvad termen faktisk står for (en ‘A’-fejltagelse). Azzouni giver flere eksempler, og jeg vil referere de simpleste af disse. Antag at John og James er tvillinger. Hvis jeg kommer til at kalde John for “James”, kan forklaringen f.eks. være, at jeg udmærket er klar over, hvem der er hvem, men at jeg simpelthen ikke er god til at se forskel på dem. Dette er en A-fejltagelse. Men det kan også være, at jeg har fået at vide af en fælles ven, at James er den tvilling, der altid går med kasket, og jeg tilfældigvis møder John på et tidspunkt, hvor han har lånt James’ kasket. Dette er en ‘A’-fejltagelse. Azzounis pointe er, at begge disse typer fejltagelser kan finde sted, når man anvender empiriske termer, uden at der er tale om, at den, der begår fejltagelserne, er decideret sprogligt inkompetent. Men når man har med matematiske termer at gøre – eller i hvert fald med små, hele tal – ser det ikke ud til, at det kan lade sig gøre at begå A-fejltagelser. Man kan ikke forveksle to tal med hinanden, hvis man vel at mærke ellers faktisk taler om det, man har til hensigt at tale om. Hvis jeg beregner 7×8 og får 49, eller jeg tror, at |||||| er 7, er der ikke tale om, at jeg har

[46] Xu & Carey [1996].
[47] I Azzouni [1996], 31-48.

forvekslet tallet 56 med tallet 49 eller tallet 6 med tallet 7, men om, at jeg har taget fejl af, hvad 7×8 og ││││││ *betegner*. Hvis man bliver præsenteret for et regnestykket, der siger 7×8=49, er der ikke nogen, der vil konkludere af den grund, at den, der har regnet det ud, tror, at 8 går op i 49, eller at 49 er det tal, der følger efter 55. Eller rettere sagt, hvis vedkommende, der har lavet regnefejlen, også tror disse ting, er der ikke tale om en simpel regnefejl, men om en grundlæggende mangel på forståelse af, hvad enten 7×8 eller 49 faktisk betyder.

Jeg ser mig (endnu) ikke i stand til at drage en entydig konklusion ud fra Azzounis eksempler. Men et minimum må være, at man ikke uden videre kan gå ud fra, at det samme objektbegreb kan være dækkende for matematik og for middelstore, fysiske objekter. Denne pointe hænger jo i øvrigt udmærket sammen med Azzounis tidligere nævnte kritik af uniformiteten af Quines criterion of ontological commitment, som jo som regel bringes på banen, hvis den antireduktionistiske tese skal uddybes til en forklaring af, hvordan præcis man afgør, hvilke entiteter en given teori forudsætter eksistensen af.

En lignende lære kan uddrages af Akibas forsvar for, at matematiske objekter er *ubestemte*.[48] Han refererer Benacerrafs overvejelser angående reduktion af de naturlige tal til mængder.[49] Det er velkendt, at de naturlige tal kan repræsenteres som mængder på en række forskellige måder, hvoraf de kendteste er von Neumanns talrække, Ø, {Ø}, {Ø,{Ø}} o.s.v., og Zermelos talrække, Ø, {Ø}, {{Ø}} o.s.v. Disse repræsentationer giver anledning til spørgsmål som f.eks ”Er Ø et element i 2?”, som har forskellige svar i de to repræsentationer, og slet ikke har noget svar i hverken talteorien eller i vores dagligdags brug af tal til købmandsregning og deslige. Det er velkendt, at Benacerraf (mere eller mindre bevidst) grundlagde strukturalismen som matematik-filosofi ved på grundlag af ovenstående pointe at hævde, at tal ikke er mængder og faktisk ikke er objekter overhovedet, men blot er positioner i strukturer og følgelig kun har de egenskaber, der skyldes deres relationer til de øvrige positioner i den givne struktur. Akibas pointe er, at man ikke behøver at drage denne konklusion, eller rettere, at den hviler på en implicit præmis om, at alle objekter er *bestemte* med hensyn til, hvilke egenskaber de har og ikke har. Akiba hævder derimod, at der findes ubestemte objekter, som simpelthen hverken har egenskaben P eller ikke-P for visse egenskaber P, og at matematiske objekter er af denne type. Dermed gør han op med et objektbegreb a la b), idet han ikke mener, at det nødvendigvis er sådan, at for ethvert objekt x og ethvert prædikat P må udsagnet ”x er P” have en sandhedsværdi.

§10 I dette afsnit vil jeg kort gennemgå Gödels argumenter for platonisme som en illustration af, hvordan to forskellige videns- og objektbegreber kan optræde i samme tænker, og hvilke uklarheder dette kan afstedkomme.

Det er velkendt, at Gödel var platonist og dualist, og at han mente, at det måtte være muligt at opnå matematisk viden v.h.a. en særlig form for erkendeevne, nemlig matematisk intuition. Det er mindre velkendt, at han ligeledes argumenterede for sin platonisme v.h.a. et argument a la indispensability-argumentet. Efter min mening hænger Gödels ontologiske dualisme nært sammen med en form for epistemologisk dualisme, der går netop består i at hævde eksistensen af to forskellige vidensformer. Jeg vil således kort gennemgå Gödels matematik-filosofiske tænkning her, dels fordi det kaster lys over spændingerne i vidensbegrebet, dels fordi Gödels matematik-filosofi er af interesse og har afklaring behov i sig selv.

Lad mig kort skitsere Gödels argumenter for platonisme. I 1944 medgav han i forbindelse med sin diskussion af Russells arbejde, at 1) man må acceptere mængder for at kunne forklare matematik på samme måde, som man må acceptere fysiske legemer for at forklare sanseindtryk[50], og 2) axiomer behøver ikke nødvendigvis at være selvindlysende, men kan accepteres på

[48] Akiba [2000].
[49] Benacerraf [1965].
[50] Gödel [1944], 456-457.

grundlag af deres konsekvenser.[51] Her understreger Gödel altså en analogi imellem mængdelærens axiomer og teoretiske, fysiske love, uden at stille spørgsmålstegn ved Russells epistemologiske og metodologiske distinktion mellem matematik og fysik. I perioden 1953-59 arbejdede Gödel med en kritik af Carnaps opfattelse af matematik, og i forbindelse med dette arbejde kritiserede han faktisk denne skelnen, i hvert fald i den udformning den havde hos Carnap og de logiske positivister. Her hævdede Gödel nemlig, at mængdelærens axiomer burde accepteres p.g.a. deres *empiriske* konsekvenser.[52] Det vil altså sige, at Gödel tilsluttede sig en version af den holistiske tese. Han havde altså et argument for platonisme, der gik som følger:

(1) Fysiske love bliver erklæret sande på grundlag af deres empiriske konsekvenser.
(2) Uden matematik ville de fysiske love ikke *have* nogen testbare empiriske konsekvenser.
(3) Matematik må accepteres som sand på samme måde som fysik.
Konklusion: Der findes matematiske objekter.

I det følgende vil jeg kalde dette for ”anvendelses-argumentet”. Selv om dette argument er knap så generelt og detaljeret som det allerede præsenterede indispensability-argument, er det alligevel af samme udformning og hviler på samme grundopfattelse.

Gödels filosofiske tænkning illustreres som regel med nedenstående udtalelse, der normalt tolkes som et argument for platonisme baseret på eksistensen af matematiks intuition som en særlig form for erkendeevne:

> “But, despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true. I don’t see any reason why se should have less confidence in this kind of perception, i.e. mathematical intuition, than in sense perception…” (Gödel [1947/64], 483-484)

På grundlag af dette citat tages Gödel som regel til indtægt for et argument, der går som følger:

(1) Vi kan erkende, at mængdelærens axiomer er sande, v.h.a. matematisk intuition.
(2) Altså kan vi erkende mængder v.h.a. matematisk intuition.
(3) Matematisk intuition fungerer som en særlig sans.
(4) Matematisk intuition er lige så pålidelig som de almindelige sanser.
Konklusion: Der findes matematiske objekter.

Dette argument vil jeg herefter betegne som ”intuitions-argumentet”. Jeg har to bemærkninger til dette argument, før jeg går over til at diskutere dets forhold til Gödels anvendelses-argument. For det første ser det ud til, at Gödel ikke skelner mellem erkendelse af, at et udsagn er sandt, og erkendelse af objekter.[53] Forholdet mellem disse typer af erkendelse er ellers ikke helt så ligetil, som det ser ud til, at Gödel mener. F.eks. kan man udmærket erkende, at ”Enhjørninge har et horn i panden” er sandt, uden at erkende enhjørninge som sådan. Det ovenstående argument hviler på noget à la Freges kontekstprincip og skal altså suppleres for at være holdbart. For det andet er ovenstående også et analogiargument, lige så vel som Gödels anvendelses-argumentet. Matematisk intuition er *lige så* pålidelig som f.eks. synssansen. Så selv om dette argument ikke er decideret afhængigt af, at vi har fysisk viden (hvilket det første er), så er det alligevel knyttet til fysisk viden på en vis måde.

Der er en slående forskel på de to argumenter i den status, de tillægger matematikkens axiomer og matematiske objekter. I anvendelsesargumentet skal matematiske axiomer i sidste

---

[51] *Ibid.* 449.
[52] Gödel [*1953/59], 348-49 og 354.
[53] Parsons [1995] diskuterer forskellen mellem “intuition *of*” og “intuition *that*”.

ende begrundes eksperimentelt, mens de derimod i intuitionsargumentet får deres begrundelse *direkte*, hvorefter den rolle, de spiller i fysiske teorier, ikke kan være den samme som de fysiske loves – disse er jo hypotetiske, indtil de er eksperimentelt bekræftet, mens den indgående matematik ifølge dette billede allerede *er* bekræftet af den matematiske intuition. På den måde er matematiske objekter i anvendelsesargumentet på linie med quarker eller andre teoretiske entiteter, som ikke kan erkendes direkte, men som postuleres for at kunne forklare fænomener, som *kan* erkendes v.h.a. sanserne. I intuitionsargumentet er det derimod de matematiske objekter selv – mængderne – der er genstand for en form for sanse-erkendelse. De to argumenter tillægger altså mængder en helt forskellig status. Ud fra historiske betragtninger må man sige, at den rolle, som anvendelsesargumentet postulerer, at mængder har i vores teoribygninger, virker mest overbevisende. Hvor de sanseindtryk, som fysikken bruger teoretiske entiteter til at forklare – borde, stole og stjernebilleder – har været en del af menneskers liv i tusindvis af år og kan erkendes uden forudgående særlig uddannelse eller træning, er mængder først kommet til i løbet af de sidste 100 til 150 år, og det er stadigvæk kun en lille brøkdel af alle mennesker, der opfatter f.eks. "hvis A er en mængde, og B er en mængde, er deres forening en mængde" som et indlysende faktum, for slet ikke at tale om mere paradoksale udsagn som "den tomme mængde eksisterer". Hvis Gödel skulle opretholde en analogi mellem sansning og matematisk intuition, ville det have virket mere overbevisende at udnævne "2+2=4" til et udsagn, der erkendes intuitivt – altså uden begrundelse eller forklaring og umiddelbart indlysende – end mængdelærens axiomer.

For mig at se stammer spændingen mellem Gödels to argumenter fra de to forskellige vidensbegreber, de repræsenterer. I anvendelsesargumentet er matematisk viden på linie med teoretisk fysisk viden, og viden udgør et samlet, hierakisk system til forklaring af sanseindtryk. Det er med andre ord mere eller mindre Quines holistiske, naturalistiske begreb om viden, der figurerer i dette argument. I intuitionsargumentet optræder matematisk intuition som endnu et middel til at opnå viden, parallelt med mere alment anerkendte erkendemidler; matematisk intuition fremstilles ydermere som værende umiddelbar, indlysende og ikke afhængig af yderligere blåstempling fra andre kilder end sig selv. Tilsvarende er det underliggende objektbegreb i Gödels anvendelsesargument begrebet om objekter som det, der er forudsat i videnskabelige teorier, mens objekter i intuitionsargumentet snarere ser ud til at være noget, der kan sanses. Der er med andre ord store forskelle på, om objekter er noget, vi har direkte kendskab til, eller snarere noget, vi kender til gennem en kæde af deduktioner.

Når man læser Gödels efterladte tekster, ser det ud til, at Gödel forestillede sig, at der findes to adskilte verdner af forskellige typer objekter, den fysiske og den matematiske. Det er uklart, hvilke objekter der bebor den matematiske verden – begreber, ords meninger, mængder, klasser, relationer eller strukturer er nogen af mulighederne – men i hvert fald ser det ud til, at Gödel (muligvis inspireret af Leibniz) anser den matematiske verden for at udstikke rammerne for, hvilke love der kan gælde for den fysiske verden. Matematiske sandheder er sande i alle mulige verdner, mens fysiske sandheder blot er sande i den faktiske verden. Derfor er matematiske sandheder også til dels afspejlet i den fysiske verden, og det må være forklaringen på, at Gödel mener, at matematiske sandheder også har empiriske konsekvenser. Gödel forlader sig altså i stor udstrækning på en skarp opdeling mellem analytiske og syntetiske udsagn, sproglige/logiske og empiriske fakta, som for mig at se blev vist uholdbar i Quines 'Two Dogmas of Empiricism" fra 1951. Desværre har Gödel aldrig kommenteret Quines arbejde, selv om han næppe kan have undgået at have hørt om det.

Gödels epistemologiske dualisme hænger således sammen med en ontologisk og metodologiske dualisme, som næppe nogen vil finde tiltalende i dag. For mig at se tjener Gödels filosofiske tænkning som illustration af, hvad uklarhed i ens videns- og objektbegreberne kan afstedkomme, og understreger altså vigtigheden af at undersøge disse begreber, som de optræder i nyere matematikfilosofi.

§11 Jeg har i dette manuskript gennemgået indispensability-argumentet, idet jeg har søgt at forklare de enkelte indgående teser, deres forhistorie og motivationen for dem samt de typer af kritik, der kan rettes imod dem. Min hensigt har været at give en fremstilling af dette centrale emne i nyere matematik-filosofi, der kan tjene som introduktion for interesserede, der ikke på forhånd kender til feltet, og jeg håber, det er lykkedes.

Derudover har jeg ønsket at påvise, at diskussionen dækker over nogle spørgsmål om, hvad viden er, og hvad objekter er, som sjældent dukker helt op til overfladen. Det er min påstand, at en nøjere undersøgelse af disse spørgsmål vil vise, at både modstandere og tilhængere deler nogle forudsætninger i form af videns- og objektbegreber, der – i modsætning til, hvad der implicit antages – ikke er hævet over enhver tvivl. Ifølge min opfattelse vil en nøjere undersøgelse af disse begreber have meget vidtrækkende konsekvenser og vil måske endda kunne tjene til helt at opløse spørgsmålet om realisme i matematikken, som det opfattes nu. Men dette er en påstand, som jeg langt fra har kunnet give tvingende argumenter for i denne sammenhæng, og videre diskussion af den må vente til en senere lejlighed.

Endelig har jeg givet en kort fremstilling af Gödels to hovedargumenter for matematisk realisme med henblik på at demonstrere ved hjælp af et eksempel, hvor stor en rolle videns- og objektbegreber spiller for filosofisk argumentation, og i hvor høj grad uunderbyggede, implicitte forudsætninger angående deres karakter kan forme en filosofisk position. Derudover mener jeg, at det er en stor hjælp for forståelsen af mulige filosofiske argumentationsformer og begreber at have fået dem præsenteret v.h.a. en person, der eksemplificerer argumenter og begreber. Jeg håber derfor også, at brugen af Gödel som eksempel tjener til at kaste yderligere lys over spændingerne mellem de forskellige vidensbegreber.

Litteratur

KEN AKIBA [2000]: 'Indefiniteness of Mathematical Objects'. *Philosophia Mathematica* **8**, 26-46.

JODY AZZOUNI [1994]: *Metaphysical Myths, Mathematical Practice.* Cambridge: Cambridge University Press.

JODY AZZOUNI [1997]: 'Applied Mathematics, Existential Commitment and the Quine-Putnam Indispensability Thesis'. *Philosophia Mathematica* **5**, 193-209.

JODY AZZOUNI [1998]: 'On "On what there is"'. *Pacific Philosophical Quarterly* **79**, 1-18.

PAUL BENACERRAF & HILARY PUTNAM (red.) [1983]: *Philosophy of Mathematics. Selected Readings.* 2. udgave. Cambridge: Cambridge University Press.

PAUL BENACERRAF [1965]: 'What numbers could not be'. Genoptrykt i Benacerraf og Putnam [1983], 272-294.

JAMES ROBERT BROWN [1999]: *Philosophy of Mathematics – an introduction to the world of proofs and pictures*. London og New York: Routledge.

RUDOLF CARNAP [1936]: *The Logical Syntax of Language.* Oversat af A. Smeaton fra *Logische Syntax der Sprache* (Vienna: Springer, 1934). London: Routledge & Kegan Paul Ltd.

CHARLES S. CHIHARA [1990]: *Constructibility and Mathematical Existence*. Oxford: Clarendon Press.

CHARLES S. CHIHARA [1998]: *The Worlds of Possibility*. Oxford: Clarendon Press.

MARK COLYVAN [1998]: 'In Defence of Indispensability'. *Philosophia Mathematica* **6**, 39-62.

MARK COLYVAN [1999]: 'Confirmation Theory and Indispensability'. *Philosophical Studies* **96**, 1-19.

RENÉ DESCARTES: Uddrag af *Regler for anvendelsen af menneskets erkendemidler.* I *De store Tænkere.* Udvalgt og redigeret af Poul Dalsgård-Hansen. København: Munksgaard, 1991.

NINA BONDERUP DOHN [1997]: *Henimod Viden som Viden i Praksis*. Speciale, Institut for Filosofi, Aarhus Universitet.

MICHAEL DUMMETT [1973]: 'The philosophical basis of intuitionistic logic'. Genoptrykt i Benacerraf & Putnam [1983], 97-129.

MICHAEL DUMMETT [1976]: 'What is a Theory of Meaning? (II)'. Genoptrykt i Michael Dummett: *The Seas of Language*. Oxford: Clarendon Press, 1993, 34-93.

MICHAEL DUMMETT [1991]: *Frege. Philosophy of Mathematics*. London: Duckworth.

SOLOMON FEFERMAN [1993]: 'Why a Little Bit Goes a Long Way: Logical Foundations of Scientifically Applicable Mathematics'. Genoptrykt i Solomon Feferman: *In the Light of Logic*. New York & Oxford: Oxford University Press, 1998, 284-298.

HARTRY H. FIELD [1980]: *Science without Numbers* Oxford: Basil Blackwell.

GOTTLOB FREGE [1884]: *Die Grundlagen der Arithmetik*. Udgivet af Joachim Schulte. Stuttgart: Philipp Reclam Jun., 1987.

KURT GÖDEL [1944]: 'Russell's mathematical logic'. I P. Benacerraf and H. Putnam [1983], 447-469.

KURT GÖDEL [*1953/59]: 'Is mathematics the syntax of language?'. In K. Gödel [1995], 334-363.

KURT GÖDEL [1995]: *Collected Works, Volume III.* S. Feferman et al. (ed.). New York: Oxford University Press.

BOB HALE [1987]: *Abstract Objects*. Oxford: Basil Blackwell.

BOB HALE & CRISPIN WRIGHT [1992]: 'Nominalism and the Contingency of Abstract Objects'. Her citeret fra *Frege: Importance and Legacy*. Redigeret af Matthias Schirn. Berlin & New York: Walter de Gruyter, 1996, 174-199.

SUSAN C. HALE [1988]: 'Spacetime and the Abstract/Concrete Distinction', *Philosophical Studies* **53,** 85-102.

IMMANUEL KANT [1781]: Uddrag af *Kritik af den rene fornuft.* I *De store Tænkere*. Udvalgt og redigeret af Justus Hartnack. København: Munksgaard, 1991.
IMRE LAKATOS [1976]: *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.
PENELOPE MADDY [1989]: 'The Roots of Contemporary Platonism'. *The Journal of Symbolic Logic* **54**, 1121-1144.
PENELOPE MADDY [1990]: *Realism in Mathematics.* Oxford: Clarendon Press.
PENELOPE MADDY [1992]: 'Indispensability and Practice'. *The Journal of Philosophy* **89**, 275-289.
PENELOPE MADDY [1997]: *Naturalism in Mathematics.* Oxford: Clarendon Press.
PENELOPE MADDY [1999]: 'Methodology for the Naturalist'. Logik Kollokvium ved *The Group in Logic and the Methodology of Scienc*e ved University of California, Berkeley.
TERESE M. O. NIELSEN [1997]: *Hvilken Frege? – Resnik og Dummett om Matematikkens Filosofi.* Speciale, Institut for de Eksakte Videnskabers Historie, Aarhus Universitet
CHARLES PARSONS [1995]: 'Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought'. *The Bulletin of Symbolic Logic* **1**, 44-74.
ANTHONY PERESSINI [1997]: 'Applying Pure Mathematics in Physical Theory'. *Philosophia Mathematica* **5**, 210-227.
ANTHONY PERESSINI [1999]: 'Confirming Mathematical Theories: An ontologically agnostic Stance'. *Synthese* **118**, 257-277.
PLATON: *Staten*. Oversat og redigeret af Hans Ræder, 1961. København: Hans Reitzel.
HILARY PUTNAM [1971]: *Philosophy of Logic*. Genoptrykt i *Mathematics Matter and Method. Philosophical Papers Volume 1*. 2nd Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1979, 323-358.
W. V. QUINE [1948]: 'On what there is'. I W.V. QUINE [1980], 1-19.
W. V. QUINE [1951]: 'Two Dogmas of Empiricism'. I W. V. QUINE [1980], 20-46.
W. V. QUINE [1968a]: 'Ontological Relativity'. I *Ontological Relativity & Other Essays.* New York: Columbia University Press (1969), 26-68.
W. V. QUINE [1968b]: 'Epistemology Naturalized'. I *Ontological Relativity & Other Essays*. New York: Columbia University Press (1969), 69-90.
W. V. QUINE [1986a]: 'Reply to Charles Parsons'. I L. E. Hahn og P. A. Schillp (red.): *The Philosophy of W. V. Quine. The Library of Living Philosophers, volume XVII.* La Salle, Illinois: Open Court, 396-403.
W. V. QUINE [1986b]: 'Reply to Hilary Putnam'. I L. E. Hahn og P. A. Schillp (red.): *The Philosophy of W. V. Quine. The Library of Living Philosophers, volume XVII.* La Salle, Illinois: Open Court, 427-431.
JOHN RAWLS [1971]: *A Theory of Justice.* Oxford: Oxford University Press.
MICHAEL D. RESNIK [1980]: *Frege and the Philosophy of Mathematics*. London: Cornell University Press.
MICHAEL D. RESNIK [1995]: 'Scientific vs. Mathematical Realism: The Indispensability Argument'. *Philosophia Mathematica* **3**, 166-174.
MICHAEL D. RESNIK [1997]: *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Clarendon Press.
ELLIOT SOBER [1993]: 'Mathematics and Indispensability'. *The Philosophical Review* **102**, 35-57.
MARK STEINER [1989]: 'The Application of Mathematics to Natural Science'. *The Journal of Philosophy* **86**, 449-480.
MARK STEINER [1995]: 'The Applicabilities of Mathematics'. *Philosophia Mathematica* **2**, 129-156.
LUDWIG WITTGENSTEIN [1918]: *Tractatus Logico-Philosophicus*. Genoptrykt i *Ludwig Wittgenstein Werkausgabe. Band I*, (1995), 7-85. Redigeret af Joachim Schulte. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
EUGENE P. WIGNER [1960]: 'The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural

Sciences'. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **13**, 1-14.
CRISPIN WRIGHT & BOB HALE [2001]: *Reason's Proper Study*. Udkommer snart.
FEI XU & SUSAN CAREY [1996]: 'Infants' Metaphysics: The Case of Numerical Identity'. *Cognitive Psychology* **30**, 111-153.