History of Science Department
University of Aarhus

CLAUS FESTERSEN

Philosophie und Mathematik in Wittgensteins *Tractatus*

Hosta, No. 9, 2001
Work-in-Progress

Hosta (**H**istory **O**f **S**cience and **T**echnology, **A**arhus) is a series of publications initiated in 2000 at the History of Science Department at the University of Aarhus in order to provide opportunity for historians of science and technology outside the Department to get a glimpse of some of the ongoing or recent works at the Department by reserachers and advanced students. As most issues contain work in progress, comments to the authors are greatly valued.

Publication is only made electronically on the web site of the Department (www.ifa.au.dk / ivh / hosta / home.dk.htm). The issues can freely be printed as pdf-documents. The web site also contains a full list of issues.

ISSN: 1600-7433

History of Science Department
University of Aarhus
Ny Munkegade, building 521
DK-8000 Aarhus C
Denmark

Philosophie und Mathematik in Wittgensteins *Tractatus*

Claus Festersen
19940311
Speciale

Institut for Videnskabshistorie
Aarhus Universitet
August 2001

Abstract

Specialet er tænkt som en redegørelse vedr. foholdet mellem filosofi og matematik i Wittgensteins *Tractatus*. Opgavens tese er, at Wittgensteins opfattelse af filosofi og matematik skal ses i lyset af fysikerne Heinrich Hertz og Ludwig Boltzmanns værker: Wittgenstein udvidede Hertz og Boltzmanns begreb om fysiske teorier som billeder hhv. modeller af virkeligheden til at gælde hele sproget – enhver sætning er et billede af virkeligheden – og han kritiserede på denne baggrund Freges og fremfor alt Russells realistiske opfattelse af logik hhv. matematik. Logik er ifølge Russells opfattelse virkelighedens logik, dvs. et menneskeuafhængigt træk ved virkeligheden. Logik er ifølge Wittgensteins opfattelse afbildningens logik, dvs. et træk ved vort billede af virkeligheden: En sætning fremstiller et muligt sagforhold ved at besidde samme logiske struktur hhv. form som det afbildede sagforhold. Logikken muliggør mao. repræsentation af virkeligheden, men er i modsætning til Russells opfattelse selv ikke noget, der kan repræsenteres. Opgaven indledes med en fremstilling af Hertz og Boltzmanns modelbegreb. Derefter gennemgås Russells realistiske opfattelse af logik hhv. matematik. På denne baggrund fremstilles Wittgensteins formål med *Tractatus*: Påvisningen af at filosofiske spørgsmål ikke er egentlige spørgsmål, der kan besvares, men skinproblemer, som er resultatet af misforståelser af sprogets logik og således ikke kræver en løsning, men en opløsning. Efter fremstillingen af formålet følger en detaileret gennemgangen af selve værket. Gennemgangen afsluttes med en nytolkning af Wittgensteins opfattelse af aritmetikken, dvs. hans forståelse af tal som en operations eksponent samt en nytolkning af *Tractatus*-distinktionen mellem det der kan siges og det der (kun) kan vises. Denne distinktion udgør ifølge Wittgenstein filosofiens hovedproblem og tolkes i opgaven på baggrund af Hertz's redegørelse for kraftbegrebet.

Vorwort

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei all denen bedanken, die mir während meiner Arbeit mit Rat und Tat zur Seite standen. Hier denke ich vor allem an die Angestellten und Studenten des Instituts. Ein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Kurt Møller Pedersen, der es mir gestattete, über die Philosophie der Mathematik zu schreiben. Für zahllose Diskussionen und für unschätzbaren Rat möchte ich mich bei Henrik Kragh Sørensen und Louis Klostergaard bedanken. Gleiches gilt Terese M. O. Nielsen, die alle Kapitel meiner Arbeit gelesen und mit großer Kompetenz kommentiert hat. Außer Terese hat Peter Schulze die Arbeit sehr sorgfältig gelesen und vor allem sprachlich sehr verbessert. Bei Søren Vestergaard möchte ich mich dafür bedanken, daß er mir ein wahrer Freund ist. Vor einem halben Jahr nahm er mich in seiner Wohnung auf, was es mir ermöglichte, meine Arbeit in Århus weiterzuschreiben. Darüber hinaus möchte ich mich bei ihm für moralische und praktische Unterstützung bedanken. Dies gilt auch für meinen Bruder Carsten und seine Freundin Rikke. Der größte Dank gebührt jedoch meinen Eltern Rita und Hans Heinrich, die mir während meiner Studienzeit stets Halt geboten haben. *Tusind tak, mor og far.*

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Ludwig Josef Johann Wittgenstein (1889–1951) publizierte zu Lebzeiten nur ein Buch, den *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921) und einen Artikel, *Some Remarks on Logical Form* (1929). Er hinterließ jedoch einen umfangreichen *Nachlaß*. Während Philosophen der Diskussion der posthum herausgegebenen Spätwerke *Philosophische Untersuchungen*[1] (1953) und *Über Gewißheit*[2] (1969) große Aufmerksamkeit und viel Arbeit gewidmet haben, sind den Arbeiten über die Philosophie der Mathematik aus dem Nachlaß der Jahre 1929–44 wenig Beachtung geschenkt worden, obwohl die Mathematik das von Wittgenstein am ausführlichsten behandelte Thema ist. Diese Tatsache ist vor allem auf die Rezeption von Wittgensteins *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* zurückzuführen, die erstmals 1956 erschienen. Folgend wird die Rezeptionsgeschichte der Philosophie der Mathematik Wittgensteins dargestellt, um vor diesem Hintergrund das Ziel bzw. den Ansatz dieser Arbeit zu erläutern.

1.1 Rezeptionsgeschichte

Die Nichtbeachtung der Philosophie der Mathematik Wittgensteins kann wie erwähnt auf die kritische Aufnahme der *Bemerkungen* zurückgeführt werden. Die äußerst namhaften Rezenten des Buches waren sich darüber einig, daß

[1]Eine Frühversion des Teil I von *Philosophische Untersuchungen* entstand 1936–9. 1942–3 revidierte und ordnete Wittgenstein teilweise die Frühversion des Teil I um. 1945 fügte er mehr als 500 neue Paragraphen hinzu. Dies stellt die Basis des publizierten Teil I von *Philosophische Untersuchungen* dar. Teil II der veröffentlichten Ausgabe wurde hauptsächlich auf Material der Jahre 1946–9 basiert (Stern, 1995, S. 95–6).

[2]Eine Auswahl von Bemerkungen aus Manuskripten Wittgensteins der Jahre 1949–51 (Stern, 1996, S. 447).

Wittgensteins Ansichten über Mathematik verworfen gehörten.[3] Der Logiker Georg Kreisel schrieb z.B. in seiner Kritik: "it seems to me to be a surprisingly insignificant product of a sparkling mind"(Kreisel, 1958, S. 158). Diese negative Haltung gegenüber der Philosophie der Mathematik Wittgensteins dominierte für Jahrzehnte das philosophische Bewußtsein. Nachdem über zwanzig Jahre seit der Veröffentlichung der *Bemerkungen* vergangen waren, ist noch beim Philosophen Michael Dummett zu lesen: "Wittgenstein's vision of mathematics cannot, I believe, be sustained; it was a radical faulty vision"(Dummett, 1978, S. 68).

Die Standardauffassung der Philosophie Wittgensteins war geworden, daß er mit dem *Tractatus* und den beiden Spätwerken großes für die Philosophie geleistet hatte, aber in seinen sogenannten Übergangswerken "for one and a half decades [worked] on a faulty (and even perverse) philosophy of mathematics. In other words, there is a black hole precisely in the center of Wittgenstein's career"(Gerrard, 1991, S. 125). Während man den Inhalt der Übergangswerke als uninteressant empfand und keiner näheren Untersuchung würdigte, hob man stattdessen die Unterschiede zwischen dem sogenannten Wittgenstein I des *Tractatus* und dem Wittgenstein II der Spätwerke hervor.

Es gibt mehrere externe Faktoren, die die negative Rezeption der *Bemerkungen* erklären helfen. Erstens ist der Inhalt des Buches von den Herausgebern[4] aus mehreren Manuskripten der Jahre 1937–44 zusammengestückelt worden.[5] Es ist verständlich, daß es für den Leser verwirrend ist, wenn zwischen zwei gedruckten Paragraphen von den Herausgebern ohne einen Hinweis ganze Passagen bzw. Seiten ausgelassen wurden: Die Gedankengänge Wittgensteins scheinen die bizarrsten Sprünge zu überbrücken. Zweitens war der Zugriff auf Wittgensteins nachgelassene Schriften für lange Zeit sehr begrenzt. Bezogen sich Wittensteins Kommentare in den *Bemerkungen* nicht auf die drei Jahre vorher erschienenden *Philosopische Untersuchungen*, so schienen sie oft aus der Luft gegriffen zu sein. Dies änderte sich erst im Jahre 1964 als aus dem Nachlaß der Jahre 1929–30 das Buch *Philosophische Bemerkungen* publiziert wurde (Stern, 1996, S. 455),[6] welches eine der Vorarbeiten zu den *Bemerkungen* darstellt.[7]

Die erwähnte Standardauffassung ist schon seit längerer Zeit kritisiert worden, und viele Lesungen der 1980'er unternehmen den Versuch, die Ent-

[3]Siehe Kreisel (1958), Dummett (1959) und Bernays (1959).

[4]Gertrude Elizabeth Margareth Anscombe, Rush Rhees und Georg Henrik von Wright.

[5]Beispielsweise besteht Teil II, §§1–40 der *Bemerkungen* aus den Seiten 9–17, 21–9, 31–3, 42–3, 52–7, 59–67, 71–88, 90–7, 99–118, 121–3, 128–9, 131, 135–40 und 149–50 des Manuskripts *MS 122* (Stern, 1996, S. 460).

[6]Eine englische Übersetzung erschien 1975.

[7]Siehe Marion (1998, S. vii–ix) für weitere Faktoren.

wicklung der Philosophie Wittgenstens mit Hilfe der nun zum Großteil publizierten Übergangswerke Wittgensteins darzustellen. Es ist jedoch in diesen Lesungen gang und gäbe, daß die Kapitel in den Übergangswerken, die der Philosophie der Mathematik gewidmet sind, nicht berücksichtigt bzw. diskutiert werden. Im Vorwort des ersten Bandes von David Pears' *The False Prison* (1987) ist z.B. zu lesen: "This is the first of two volumes of a continuous study of the development of Wittgenstein's philosophy. The treatment is selective, but his investigation of the foundations of mathematics is the only topic that is left untouched"(Pears, 1987, S. vii). Die gleiche Auslassung findet sich in Merrill B. und Jaakko Hintikkas *Investigating Wittgenstein* (1986) und zuletzt in Jørgen Husteds Einführung in die Philosophie Wittgensteins wieder: "Med valget af de tre hovedværker er der foretaget et fravalg. Dels af de omfattende skrifter om matematikkens filosofi, som ved at forudsætte en stor specialviden ikke hører hjemme i en indføring"(Husted, 2000, S. 7). Diese Werke erklären nicht mehr, daß Wittgensteins Philosophie der Mathematik verfehlt ist,[8] sie bauen jedoch auf der Prämisse, daß Wittgensteins allgemeine Philosophie ohne Berücksichtigung seiner Philosophie der Mathematik interpretiert werden kann: Es ist unproblematisch, die Bemerkungen über Mathematik von seiner Philosophie abzutrennen, um dann mit Hilfe des restlichen Textkorpus eine unverzerrte Darstellung der Entwicklung seiner Sprachphilosophie und Philosophie der Psychologie zu geben.

Einer der ersten Versuche, Wittgensteins Philosophie der Mathematik zu rechtfertigen, wurde von Crispin Wright in *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics* (1980) unternommen. Cora Diamond hat auf Probleme aufmerksam gemacht, dieses Buch als eine eigentliche Wittgenstein-Exegese zu verstehen. *Bemerkungen* wird nicht getreu den internen Absichten Wittgensteins behandelt, sondern aus der externen Perspektive der Philosophie Dummetts interpretiert: Wittgenstein wird als ein sogenannter Anti-Realist verstanden, dessen Ansichten über Mathematik, Logik und Sprache mit einer Vielzahl anderer verglichen und diskutiert werden. Es ist infolge Diamond auffällig, daß unter den anderen Ansichten nicht die des *Tractatus* ist, obwohl Wittgenstein, zumindest was *Philosophische Untersuchungen* angeht, darauf aufmerksam macht, daß seine spätere Philosophie am besten mit dem *Tractatus* im Hintergrund verstanden wird (Wittgenstein, 1997a, S. 232). Wrights Wittgenstein ist wegen den zu engen Affinitäten mit der Philosophie Dummetts und der Auslassung des *Tractatus* zu weit vom Wittgenstein der *Bemerkungen* entfernt.[9]

Stuart Shankers *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of*

[8] Mit Ausnahme von Hintikka und Hintikka (1986, S. ix).
[9] Siehe Diamond (1991g).

Mathematics (1987) ist ein zweiter Versuch der Rechtfertigung der Philosophie der Mathematik Wittgensteins. Shanker widmet in seinem Buch der Kritik an Wright sehr viel Aufmerksamkeit. Er läßt im Gegensatz zu Wright den *Tractatus* als solchen nicht völlig aus, hat aber keine Interpretation der Paragraphen des Frühwerkes, die der Mathematik gewidmet sind.

Pasquale Frascolla und Mathieu Marion in *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics* (1994) bzw. *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics* (1998) füllen jeder auf ihre Art diese Lücke aus. Besonders Marion kritisiert Kommentatoren Wittgensteins, die seine Philosophie isoliert von den vielen Betrachtungen über Mathematik behandeln. Frascolla sowie Marion kommentieren selbst ausschließlich die Paragraphen des *Tractatus*, die die Mathematik betreffen. Frascolla behandelt die Paragraphen im *Tractatus*, die im engeren Sinne der Mathematik gewidmet sind: der Arithmetik. Seine Darstellung beginnt mit einer Diskussion des Paragraphen 6 des *Tractatus*. Marions Interpretation widmet sich darüber hinaus der Paragraphen, die im weiteren Sinne die Mathematik betreffen: der Kritik Wittgensteins an der Auffassung der Mathematik Bertrand Russells. Er behandelt somit einen umfangreicheren Teil des *Tractatus* als Frascolla. Seine erklärte Strategie ist es, die Betrachtungen über Mathematik *at face value* zu interpretieren, d.h. sie unmittelbar bzw. so weit es geht ungefärbt von einem Vorverständnis der Philosophie Wittgensteins zu verstehen. Nur wenn nötig werden Kommentatoren der allgemeinen Philosophie Wittgensteins konsultiert.

Weder Frascollas noch Marions Buch sind als Introduktionen zum *Tractatus* gedacht. Das Werk selbst wird als bekannt angenommen, und eine gewisse Vorkenntnis der vorhandenen Sekundärliteratur wird vorausgesetzt. Es ist nicht die Absicht der beiden Autoren den *Tractatus* als eine Einheit, ein Werk, darzustellen, sondern eher den notwendigen Hintergrund für die Behandlung der späteren Werke zu geben. Das Resultat ist, daß Philosophie und Mathematik wiederum getrennt voneinander behandelt werden.

1.2 Neuer Ansatz

Diese Arbeit wählt einen anderen Zugang zur Philosophie der Mathematik Wittgensteins als die erwähnten. Wie aus der Rezeptionsgeschichte zu ersehen ist, unternimmt keiner dieser Arbeiten den Versuch, die Bemerkungen über die Mathematik bzw. Arithmetik im *Tractatus* als Teil des Ganzen darzustellen. Es fehlt eine Interpretation der *Philosophie und Mathematik in Wittgensteins Tractatus*. Daher der Titel dieser Arbeit.

Wird in diesem Zusammenhang die Sekundärliteratur betrachtet, die dem

Tractatus gewidmet ist, so wird ersichtlich, daß zwei einander völlig widersprechende Auffassungen diese Literatur dominieren: *metaphysische* kontra *therapeutische* Interpretation. Marie McGuinn stellt in ihrem Artikel *Between Metaphysics and Nonsense: Elucidation in Wittgenstein's Tractatus* des Jahres 1999 einen Vergleich der einander widersprechenden Interpretationen auf. Die metaphysische Auffassung des *Tractatus* läßt sich dabei folgendermaßen charakterisieren:

> "On one reading, it is a work of metaphysics, which puts forward substantive claims about the nature of a language-independent reality. On this view, it provides a speculative account of what the relation between language and this independent reality must be in order for language to represent the world"(McGuinn, 1999, S. 491).

Diese Auffassung wird z.B. von G.E.M. Anscombe, Max Black, Norman Malcolm, David Pears und Peter Hacker vertreten.[10] Die therapeutische Auffassung des *Tractatus* faßt McGuinn wie folgt zusammen:

> "On the other reading, far from being a work of metaphysics, *TLP* represents the 'unfolding of a therapeutic strategy'.[3] This begins with the temptation to make metaphysical pronouncements from a philosophical perspective and ends with the realization that these pronouncements are nonsensical: the so-called philosophical perspective is an illusion"(McGuinn, 1999, S. 491).

Vertreter dieser Interpretation sind beispielsweise Cora Diamond, James Conant und Thomas Ricketts.[11] Entscheidend ist, daß die beiden widersprüchlichen Auffassungen in einer Ansicht übereinstimmen: Die Anfangsparagraphen des *Tractatus* (*TLP* 1–2.063) stellen eine metaphysische bzw. realistische Weltanschauung dar. Folgendes ist der Widerspruch: Die metaphysische Auffassung hält durchgehend an dieser Interpretation fest, während die therapeutische Auffassung erklärt, daß es die Strategie des *Tractatus* ist, Therapie zu leisten: Es gilt letztendlich einzusehen, daß der philosophische Standpunkt im allgemeinen und insbesondere die realistische Weltanschauung, die am Anfang des *Tractatus* zum Ausdruck kommt, unsinnig bzw. illusorisch ist.

[10]Siehe Anscombe (1959), Black (1964), Malcolm (1986), Pears (1987), Hacker (1996) und Hacker (1997).

[11]Siehe Conant (1989), Conant (2000), Diamond (1991d), Diamond (2000) und Ricketts (1996).

Fahren wir vor diesem Hintergrund fort: Vom Standpunkt bzw. Ansatz dieser Arbeit sind beide Interpretationen unzulänglich: Die Anfangsparagraphen sind nicht Ausdruck einer realistischen Metaphysik, an der entweder festzuhalten ist (metaphysische Interpretation) oder die es zu überwinden gilt (therapeutische Interpretation), sondern diese Paragraphen sollen den Begriff des logischen Raumes erläutern. Dieser Begriff ist nicht aus Wittgensteins eigenem Geiste entsprungen sondern ein Begriff der theoretischen Physik, den Wittgenstein in den Werken der Physiker Ludwig Boltzmann und Heinrich Hertz vorfand: der Begriff des Phasen- bzw. Konfigurationsraumes.

Folgendes ist jedoch bezüglich der therapeutischen Interpretation zu bemerken: Obwohl sie infolge dieser Arbeit die Anfangs- und Schlußparagraphen des *Tractatus* unzulänglich auffaßt, so sind viele Ausführungen dieser Arbeit auf der Grundlage von Artikeln von Cora Diamond gefertigt. Daß eine Ausführung bzw. ein Abschnitt vor dem Hintergrund eines Artikels von Diamond verfaßt und folglich nicht eigener Überlegungen entsprungen ist, wird nicht im Text erwähnt sondern jeweils gleich in einer Fußnote hervorgehoben.

Fahren wir mit dem Ansatz fort: Der Einfluß der erwähnten Physiker wird aus der Sicht dieser Arbeit in der Sekundärliteratur nicht hinlänglich bzw. nicht adäquat zur Kenntnis genommen. Es existieren zwar viele Artikel und einzelne Kapitel, die diesen Einfluß erörtern,[12] jedoch nach hiesigem Wissensstand keine Arbeit, die den *Tractatus* durchgehend – von Paragraph 1: "Die Welt ist alles, was der Fall ist" bis Paragraph 7: "Wovon man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen" – vor dem Hintergrund der Schriften von Hertz und Boltzmann versteht. Der Standpunkt dieser Arbeit ist, daß ein solches Verständnis jedoch notwendig ist, um eine möglichst adäquate Darstellung der *Philosophie und Mathematik in Wittgensteins Tractatus* hervorzubringen. So läßt sich letztendlich die Kritik Wittgensteins an der Auffassung der Logik bzw. Mathematik Russells nur vor diesem Hintergrund klären.

Es wird deshalb in der Arbeit folgendermaßen verfahren: Teil I widmet sich mit notwendiger Ausführlichkeit dem angesprochenen Hintergrund des *Tractatus*: Den Schriften von Hertz und Boltzmann und der Auffassung Russells der Logik bzw. Mathematik. Eingeleitet wird Teil I mit einer Biographie Wittgensteins, die als eine Art Übersicht bzw. Rahmen gedacht ist. Teil II erläutert den *Tractatus* vor dem in Teil I dargstellten Hintergrund: Der Zweck des *Tractatus* wird hauptsächlich vor dem Hintergrund von Hertz und Boltzmann interpretiert, und es wird gezeigt, daß auf dieser Grundlage der Gegensatz zwischen der Auffassung Wittgensteins und den Auffassungen von

[12] Beispielsweise Griffin (1964), Barker (1980), Wilson (1989), Janik und Toulmin (1996, Kap. 5), Hacker (1997, S. 2–5, 15–7), Visser (1999) und Kjærgaard (k.J.).

Gottlob Frege und Bertrand Russell verstanden werden kann. Wittgensteins Kritik an Russell im allgemeinen und insbesondere an Russells Theorie der Typen stellt dabei den Übergang von Teil II zu Teil III dar. Der dritte Teil versteht sich vor dem Hintergrund der in Teil I und II dargestellten Problematik als eigentliche Darstellung der Position bzw. des Gedankenganges Wittgensteins im *Tractatus*. Eingeleitet wird der Teil mit einer Behandlung der Auffassung Wittgensteins des Satzes als Bild, d.h. des logischen Raumes, welche auf Steen Brocks Artikel *Billedteorien i Wittgensteins Tractatus – Sprog, model og virkelighed* (1986) basiert: Aus der Sicht dieser Arbeit berücksichtigt die Interpretation von Brock der Anfangsparagraphen des *Tractatus* den Einfluß von Hertz und Boltzmann auf meisterliche Art und Weise. Fortgefahren wird mit einer Darstellung der Auffassung Wittgensteins des Satzes als Wahrheitsfunktion, der einer Erläuterung des *Tractatus*-Begriffs der allgemeinen Form des Satzes folgt. Die Arbeit schließt mit Interpretationen des Verständnisses Wittgensteins der Mathematik und der Philosophie, d.h. der Auffassung der Zahl als Exponent einer Operation bzw. dem Schlußparagraphen des *Tractatus*: "Wovon man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen"(*TLP* 7).

Es ist wie erwähnt die These der Arbeit, daß Philosophie und Mathematik im *Tractatus* letztendlich vor dem Hintergrund von Hertz und Boltzmann zu verstehen sind. Das will jedoch nicht heißen, daß der *Tractatus* sich ohne ein Verständnis der Philosophie Freges und Russells erschließen läßt, sondern daß der Gegensatz zwischen der Auffassung Freges bzw. Russells auf der einen Seite und Wittgensteins auf der anderen letzten Endes ein Ausdruck des Einflusses der Physiker auf Wittgenstein ist. Damit die Arbeit dies zeigen kann, sind Auslassungen notwendig: Ganz bewußt findet sich in der Arbeit keine Diskussion der vorhandenen Sekundärliteratur. Denn die Arbeit versteht sich weder als Diskussion noch als Kritik sondern stattdessen als *Exegese* der Philosophie Wittgensteins im *Tractatus*. Falls Ausführungen sich auf Sekundärliteratur stützen wird dies meist nicht im Text sondern jeweils in einer Fußnote bemerkt, so daß das Augenmerk auf den Argumentationsgang des *Tractatus* verbleibt. Besonders in den beiden letzten Kapiteln finden sich in Fußnoten kritische Bemerkungen bezüglich der allgemeinen Sekundärliteratur. Diese Bemerkungen sind nicht als Aufzeigen des Irrtums dieser Literatur gedacht. Denn dazu bedarf es der Diskussion. Sie wollen jedoch durch Infragestellung der Literatur kennzeichnen, falls vom hiesigen Wissensstand andersartige bzw. neue Wege der Interpretation Wittgensteins beschritten werden.

Teil I

Der Hintergrund des *Tractatus*

Kapitel 2

Das Leben Wittgensteins

Ludwig Josef Johann Wittgenstein wurde am 26. April 1889 in Wien geboren.[1] Er war der jüngste einer achtköpfigen Kinderschar des Ehepaares Karl und Leopoldine Wittgenstein. Karl war Ingenieur und ein äußerst erfolgreicher Geschäftsmann, der sehr schnell das ansehnliche väterliche Erbe durch ein aus der Eisen- und Stahlindustrie erwirtschaftetes Vermögen verfielfachte. Tüchtigkeit und Charisma machten ihn zu einer führenden Persönlichkeit der Industrie der Österreich-Ungarischen Dynastie. Karl war als Vater sehr dominant und hatte, was den Unterricht seiner Kinder anging, eigene Ideen. So ließ er sie bis zu ihrem 14. Lebensjahr zu Hause unterrichten, welches beim jungen Ludwig kein Erfolg mit sich führte. Als Ludwig sich für die Immatrikulation an einer der höheren Schulen Wiens bewarb, wurde er abgelehnt. Nur mit Aufwand gelang dem Vater die Einschreibung Ludwigs an einer Realschule in Linz. Dort legte Wittgenstein 1906 nach drei trostlosen Jahren seine *Matura* (Reifeprüfung) ab. Ein lebhaftes Interesse für Musik und Kunst gab Leopoldine an ihren Sohn weiter. Es war hauptsächlich ihr Verdienst, daß das große Pratrizierheim sich als Sammelpunkt der Künstler und Intellektuellen Wiens etablierte: Johannes Brahms, Gustav Mahler, Sigmund Freud etc. gingen aus und ein im Hause der Wittgensteins.

Laut Wittgensteins eigenen Angaben hatte er die Absicht, nach der Matura an der Universität in Wien unter dem Physiker Ludwig Boltzmann (1844–1906) zu studieren.[2] Dieser Plan wäre aber am Selbstmord Boltzmanns im gleichen Jahr gescheitert. Einige Einzelheiten an dieser Geschichte sind jedoch nicht ganz schlüssig: Ludwigs Matura war nur für die Zulassung zur *Technischen Hochschule* ausreichend. Wahrscheinlich hatte Wittgenstein nur einen wagen Wunsch, unter Boltzmann zu studieren. Der Wunsch ist auf-

[1] Dieses Kapitel ist vor dem Hintergrund von Husted (2000, S. 9–18), McGuinness (1988) und Monk (1991) gefertigt worden.

[2] In Gesprächen mit G. H. von Wright geäußert, siehe McGuinness (1988, S. 54).

grund folgender Tatsache aufschlußreich: Es muß Boltzmanns Wissenschaftslehre gewesen sein, mit der Wittgenstein durch das Buch *Populäre Schriften* (1905) des österreichischen Physikers vertraut war, die sein Interesse weckte, da Wittgenstein zu diesem Zeitpunkt nicht das notwendige Wissen hatte, um Boltzmanns Arbeiten innerhalb der theoretischen Physik zu verstehen (McGuinness, 1988, S. 54). Durch dieses Buch wurde Wittgenstein höchst wahrscheinlich auch das Werk des deutschen Physikers Heinrich Rudolf Hertz (1857–94) bekannt (Wilson, 1989, S. 257). Viele der im Buche abgedruckten Vorträge und Abhandlungen enthalten Kommentare und Diskussionen über Hertz's Buch *Prinzipien der Mechanik* (1894).

Anstelle des erwähnten Studiumwunsches ließ sich Wittgenstein am 23. Oktober 1906 an der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg als Student des *Maschinen-Ingenieurwesens* einschreiben. Er verbrachte drei Semester an der Hochschule und erhielt am 5. Mai 1908 sein *Abgangszeugnis*. Der eineinhalbjährige Aufenthalt in Berlin erweckte beim jungen Wittgenstein ein Interesse für den Flugzeugbau, das ihn im Sommer des Jahres 1908 zur Universität Manchester führte, wo er sich im Ingenieurzweig für Flugzeugbau immatrikulierte. Seine Forschung widmete er hauptsächlich der Konstruktion eines Propellers.[3] Trotz seiner begrenzten Vorkenntnisse meisterte er schnell die notwendige Mathematik seines Forschungsgebietes, und seine Aufmerksamkeit fing an sich von der angewandten über die reine Mathematik auf die Grundlagen der Mathematik zu richten. Ein Mitstudent erzählte ihm von dem Buch *The Principles of Mathematics* (1903), ein Versuch der logischen Grundlegung der Mathematik des Logikers und Philosophen Bertrand Arthur William Russell (1872–1970).

Es war Russell bis kurz vor der Fertigstellung seines Buches nicht bekannt, daß der deutsche Mathematiker Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925) ihm in den Hauptwegen seines Unterfangens zuvorgekommen war. Frege hatte in seinem Werk *Grundgesetze der Arithmetik*, dessen erster Band 1893 erschien, den Versuch unternommen, die Arithmetik logisch zu begründen. Russell vollzog ein Schnellstudium dieser Arbeit Freges und erweiterte sein eigenes Buch mit einem Appendix über 'The Logical and Arithmetical Doctrines of Frege'(Russell, 1956, S. 501–22). Während dieses Studiums entdeckte er, daß Freges System in *Grundgesetze* den Beweis eines Widerspruchs zuließ,[4] weshalb er sein Buch mit einer Diskussion des Widerspruches erweiterte und den Versuch unternahm, das Problem zu lösen, d.h. die Möglichkeit des Beweisens dieses Widerspruches zu umgehen. Es gelang ihm in *Princip-*

[3] Am 17.8. 1911 wurde sein Patent für "Improvements in Propellers applicable for Aerial Machines" angenommen (Monk, 1991, S. 34).

[4] Später als *Russells Paradox* bezeichnet.

les jedoch nur die Skizze einer Lösung, weshalb er sein Buch mit folgenden Worten schloß:

> “What the complete solution of the difficulty may be, I have not succeeded in discovering; but as it affects the very foundations of reasoning, I earnestly commend the study of it to the attention of all students of logic”(Russell, 1956, S. 528).

Wittgenstein folgte dieser Anweisung und widmete einen Großteil seiner ersten zwei Semester in Manchester einem Studium der *Principles* und *Grundgesetze*. Er begab sich am Ende der Sommerferien des Jahres 1911 zur Universität Jena, um Frege zu besuchen, und ihm einige Entwürfe für logische und philosophische Arbeiten zu präsentieren. Frege gab ihm den Rat, nach Cambridge zu ziehen, um unter Russell zu studieren.

Wittgenstein folgte diesem Rat, und am 18. Oktober des gleichen Jahres erschien er unangemeldet in Cambridge, um sich Russell vorzustellen, und am Anfang des Frühlingssemesters 1912 ließ er sich an der Universität Cambridge einschreiben, um beim Engländer zu studieren. Insgesamt brachte er es dort nur auf 5 Semester Studium, die zudem von vielen Reisen unterbrochen wurden. Der Gewinn war jedoch enorm. Es vergingen nur einige Monate, bevor Russells anfängliche Skepsis gegenüber dem all zu eifrigen Wittgenstein, der ihm kaum freie Augenblicke ließ, der Anerkennung wich, die kurzerhand zur Bewunderung wurde. Die vielen Reisen führten Wittgenstein nach Island und Norwegen. An einem abgeschiedenen Ort in Norwegen baute er sich eine Hütte und verbrachte dort viele Monate des Jahres 1913, ganz seinen logischen Untersuchungen zugewandt.

Kurz nach dem Ausbruch des Ersten Weltkrieges meldete sich der nun 25-jährige Wittgenstein als Freiwilliger zum Kriegsdienst. Ihm wurde der Dienst als Mechaniker der Artillerie zugewiesen, den er bis 1916 an der Ostfront wahrnahm. Später wurde er zu einer Offiziersausbildung ausersehen und als Artilleriebeobachter eingesetzt. Als Italien die Fronten wechselte, wurde er Anfang 1918 nach Tirol entsendet, um die italienischen Bergtruppen zu bekämpfen. Im Herbst des gleichen Jahres war die Kriegsniederlage abzusehen, und nach dem Waffenstillstand im November mußte Wittgenstein südlich von Rom in Kriegsgefangenschaft, wo er sich bis zu seiner Freilassung Ende 1919 aufhielt.

Wittgenstein war ein anderer geworden, als er von den Grausamkeiten des Krieges heimkehrte. Vor dem Krieg war er zum Teil sehr verschwenderisch mit dem Geld des Vaters umgegangen. Als Ingenieurstudent in Manchester hatte er einmal den Zug nach Liverpool verpaßt, was ihn schleunigst dazu veranlaßte, einen privaten Zug zu bestellen. Nach dem Krieg entsagte er seinem Erbanspruch am Vermögen des Vaters, der am 20. Januar 1912 gestorben war, um ein Leben in Sparsamkeit zu führen, und ließ das Geld zwischen seinen noch lebenden Geschwistern aufteilen. Der Anstoß zur Persönlichkeitskehre setzte schon einige Monate nach Kriegsanfang ein. Wittgenstein nahm am Feldzug gegen die Russen in Galizien teil, die in einer Katastrophe mit über 600.000 Gefallenen endete. Gelähmt vom Leid um ihn herum, breitete sich in ihm ein Gefühl der totalen Verlassenheit aus. Als sein Weg an der galizischen Stadt Tarnow vorbeiführte, stattete er dem Buchhandel der Stadt einen Besuch ab. Dieser bot nur ein einzelnes Buch zum Verkauf an, Leo Nikolajewitsch Tolstois (1828–1910) *The Gospel in Brief*[5], welches Wittgenstein erwarb. Im Buch unternahm Tolstoi den Versuch, das Evangelium von den Worten zu reinigen, die laut Tolstoi der Botschaft Jesu später von der Kirche hinzugedichtet worden sind. Es handelt sich hierbei z.B. um die Berichte über Wunder und das Versprechen vom Leben nach dem Tode (Husted, 2000, S. 13). Das Buch fesselte Wittgenstein und wurde für ihn eine Art Talismann: Er brachte es überall mit sich und laß es so oft, daß er letztendlich ganze Passagen auswendig konnte, und unter seinen Kameraden als »Mann mit dem Evangelium« bekannt wurde. Er empfahl es jedem Leidenden und vertraute einem Freund an, daß dieses Buch ihn zu jenen Zeiten geradezu am Leben hielt und man sich nicht vorstellen könne, welchen Eindruck es auf einen Menschen machen könne (Monk, 1991, S. 115).

Während des Krieges führte Wittgenstein ein philosophisches Tagebuch,[6] welches nebst der *Gospel* dazu beitrug, daß er seinen Verstand nicht verlor. Anfänglich behandelten seine Einträge noch die logischen Themen seiner Zeit in Cambridge. Allmählich traten jedoch Probleme ethischer, religiöser und existentieller Natur im Tagebuch deutlicher hervor. In der Gefangenschaft gelang ihm die Fertigstellung der Zusammenfassung seiner Gedanken in einem kleinen Buch. Nach mehreren gescheiterten Versuchen Wittgensteins, einen Verleger zu finden, gelang die Herausgabe des Buches letzten Endes mit Hilfe Russells. Eine deutschsprachige Ausgabe erschien 1921 unter dem Titel *Logisch-Philosophische Abhandlung*, eine englische 1922 unter *Tractatus-Logico Philosophicus*. Selbst war er davon überzeugt, die philosophischen Probleme ein für alle mal gelöst zu haben, weshalb er nach der Freilassung aus dem Gefangenenlager der Philosophie den Rücken kehrte, um sich einer Beschäftigung zuzuwenden, die in Einklang mit einem genügsamen Leben ausgeübt werden konnte.

Die Arbeit als Volksschullehrer entsprach diesem Ideal, und September 1919 ließ er sich an einer Lehrerbildungsanhalt in Wien einschreiben, um

[5] Trotz größter Bemühungen war der Versuch der Festlegung des Jahres eines Erstdrucks ohne Erfolg.

[6] 1960 von G. H. von Wright und G. E. M. Anscombe unter dem Titel *Tagebücher 1914–1916* herausgegeben.

im Juli 1920 die Ausbildung abzuschließen, und seine erste Anstellung in einem Dorfe südlich von Wien zu bekleiden. Die zwei ersten Jahre im Amte verliefen für ihn alles andere als zufriedendstellend, weshalb es ihn zu einer zweiten und wenig später zu einer dritten Schule zog. Als Lehrer soll es ihm an Geduld gegenüber seinen Schülern gefehlt haben, und er wegen seiner autoritären Methoden mit den Eltern in Konflikt geraten sein. Er entschloß sich deshalb 1926, seine Tätigkeit als Lehrer zu beenden, und ließ sich als Gärtner eines Klosters anstellen, wo er jedoch auch nicht glücklich wurde, und als seine Schwester nachfragte, ob er nicht bei der Konstruktion ihres neuen Hauses helfen wolle, sagte er zu. Er übernahm mehr und mehr Aufgaben des Architekten und schuf binnen der Jahre 1926–8 einen durch und durch funktionalistischen Bau.

Nach dem Krieg hatte sich unter der Führung des Philosophen Moritz Schlick (1882–1936) in Wien ein Kreis von Intellektuellen gebildet, der sogenannte *Wiener Kreis*. In den Sitzungen des Kreises hatten die Mitglieder den *Tractatus* diskutiert und als ein Manifest ihrer eigenen wissenschaftlichen Weltanschauung empfunden. Als ihnen zu Ohren kam, daß der Verfasser des so hoch geschätzten Werkes in Wien weilte, trat Schlick mit Wittgenstein in Kontakt. Nur zögernd konnte dieser von Schlick dazu überredet werden, den Sitzungen des Kreises beizuwohnen. Obwohl die Diskrepanz zwischen den Auffassungen Wittgensteins und den Mitgliedern des Kreises schnell offensichtlich wurde, läutete Wittgensteins Teilnahme seine Rückkehr zur Philosophie ein. Er hatte wieder Kontakt mit der philosophischen Welt aufgenommen.[7]

Ein Mann war in dieser Beziehung von entscheidender Wichtigkeit: Frank Plumpton Ramsey (1903–30). Er hatte als Student in Cambridge bei der Übersetzung des *Tractatus* geholfen und als 19-jähriger 1923 eine Rezension des Werkes für die philosohische Zeitschrift *Mind* verfaßt. Selbst wollte er von dem *Tractatus* ausgehend einen neuen Versuch unternehmen, die Mathematik zu begründen, und um sein Verständnis des Werkes zu schärfen, besuchte er September 1923 Wittgenstein. Er war jedoch nicht nur gekommen, um den Erläuterungen des nun berühmten Philosophen zu horchen, sondern machte auch auf Probleme im *Tractatus* aufmerksam.

Später wollte Ramsey Wittgenstein zur Rückkehr nach Cambridge bewegen, was ihm 1929, vom Cambridge-Ökonomen und Freund Wittgensteins John Maynard Keynes (1883–1946) unterstützt, gelang. Wittgenstein, der seinen Platz außerhalb der Mauern von Cambridge vergeblich gesucht hatte, kehrte am 18. Januar 1929 nach Cambridge zurück. Aus seinem Versuch

[7] Siehe Wittgenstein (1996c) für die von Friedrich Waismann aufgezeichneten Gespräche.

der Ausbesserung des *Tractatus* entstand die Einsicht, daß ein neuer Ansatz nötig war. Das erste Jahr in Cambridge war Wittgenstein als Ph.D.-Student eingeschrieben und konnte im folgenden Jahr den *Tractatus* als Abhandlung einliefern. Dank Russell erhielt er ein langjähriges Stipendium, das ihm die nötige Freiheit gab, um in Ruhe schreiben und zu Zeiten nach Norwegen zur Hütte reisen zu können. 1936 begann er die Arbeiten an einem Manuskript, das zu seinem spätphilosophischen Hauptwerk *Philosophische Untersuchungen* werden sollte. Seine Person zog begabte junge Philosophen aus nah und fern an, die nach seinem Tode seine Philosophie verbreiten halfen.

Wittgenstein übernahm 10 Jahre nach seiner Rückkehr den Lehrstuhl von George Edward Moore (1873–1958), den er jedoch anfänglich nur kurz wahrnehmen konnte. Im September 1939 überfielen deutsche Truppen Polen, weshalb Großbritannien Deutschland den Krieg erklärte. Wittgenstein war zwischenzeitlich britischer Staatsbürger geworden, was ihn dazu verpflichtete, in Kriegszeiten dem Lande zu Diensten zu stehen. Bis 1944 arbeitete er als Krankenträger am Guy's Hospital in London und danach als Gehilfe im Labor eines Hospitals in Newcastle.

Als das Ende des Zweiten Weltkrieges 1944 abzusehen war, konnte Wittgenstein nach Cambridge zurückkehren, um endlich seine Professur wahrzunehmen. Sein Ziel war es, die *Philosophische Untersuchungen* fertigzustellen. Wegen den vielen Pflichten als Professor, die ihm zum Teil innerlich zuwider waren, fand er jedoch nicht die nötige Vertiefung, weshalb er 1947 seinen Lehrstuhl aufgab, um nach Irland zu ziehen. Dort fand er die ersehnte Ruhe, und seine Arbeit schritt zügig voran. Sein Gesundheitszustand wurde immer schwächer, und 1949 wurde eine fortgeschrittene Krebserkrankung diagnostiziert. Er kehrte nach England zurück und lebte bis zu seinem Tode am 29. April 1951 bei Freunden in Cambridge und Oxford. Bis ein paar Tage vor seinem Tod schrieb er noch an den Bemerkungen, die 1969 als *Über Gewißheit* erscheinen sollten. Die letzten Worte an die Freunde, die sich um sein Sterbebett versammelt hatten, waren: “Tell them, I've had a wonderful life.”

Kapitel 3

Kernfragen der Physik im ausgehenden 19. Jahrhundert

Wissenschaftler und Gelehrte waren vom 18. bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts der Überzeugung gewesen, daß das Erkenntnisideal der Physik das Ideal der Newtonschen Mechanik sei und bleiben werde.[1] Der Gebrauch des Newtonschen Kraftbegriffes wurde für jedes exakte Naturverständnis als Voraussetzung angesehen, weshalb ständig der Versuch unternommen wurde, die Newtonschen Grundbegriffe in andere naturwissenschaftliche Gebiete zu übertragen. Während der letzten Jahrzehnte des 19. Jahrhunderts war jedoch unter einer Gruppe von deutschsprachigen Wissenschaftlern, die solch hervorragende Forscher wie Gustav Robert Kirchhoff (1824–87), Hermann von Helmholtz (1821–94), Ernst Mach (1838–1916), Heinrich Hertz und Ludwig Boltzmann zählte, eine Diskussion um den Status und die Gültigkeit der wissenschaftlichen Erkenntnis entfacht.

Die ontologische Bedeutung physikalischer Theorien war vor dem 19. Jahrhundert nicht prinzipiell in Frage gestellt worden. Vor allem durch den Einfluß von Ernst Mach wurde nun jedoch dieser naturwissenschaftliche Realismus durch einen Phänomenalismus verdrängt, dessen Grundannahme es war, daß die von der Wissenschaft untersuchte Wirklichkeit nicht mehr als der Sinneswirklichkeit entspricht. Farben, Geräusche, Wärme, Druck, Raum, Zeit etc. qua unmittelbarer Sinneswahrnehmung sind die wahren und einzigen Gegenstände der Untersuchung innerhalb der Wissenschaften, weshalb es die einzige Aufgabe der Wissenschaft ist, die unterschiedlichen Arten und Weisen, auf denen diese elementaren Sinnesdaten sich miteinander in Verbindung bringen lassen, zu studieren. Vor diesem Hintergrund proklamierte

[1] Allgemeine Sekundärliteratur für dieses Kapitel stellen Janik und Toulmin (1996, S. 120–66) und Cassirer (1950, S. 81–117) dar.

Mach, daß es notwendig sei, die Beziehung zwischen Physik und Mechanik neu zu definieren. Er unterstrich, daß ein Unterschied zwischen einer kausalen Naturauslegung und der mechanischen Naturauffassung bestünde: Jede Kausalität ist nicht unbedingt mechanischer Natur. Die Mechanik untersucht die physikalische Welt, das uns in der Seh- und Tastwahrnehmung Gegebene. Wir sind jedoch laut Mach nicht berechtigt, dieser Reihe von Wahrnehmungen eine priviligierte Position in unserer Kosmologie einzugestehen. Es bestehen keine Gründe dafür, von unbeweisbaren metaphysischen Annahmen abgesehen, daß beispielsweise den Geräuschwahrnehmungen nicht der gleiche ontologische Stellenwert zugesprochen wird wie den Seh- und Tastwahrnehmungen. Der einzig gangbare Weg zur Erkenntnis besteht darin, innerhalb des Zeniths der Erfahrungen zu verbleiben, und diese Erfahrungen, ohne Gebrauch von metaphysischer Spekulation in ihrer Unmittelbarkeit zu beschreiben. Die phänomenalistische Physik von Mach erkennt nur Abhängigkeiten zwischen Wahrnehmungen an, welche auf direkte Art und Weise ohne hypothetisches Substratum wie der Atomistik der statistischen Mechanik Boltzmanns nachgewiesen werden können.[2] Die Aufgabe aller wissenschaftlichen Bemühungen ist es, Machs Devise der Denkökonomie zu folgen, d.h. Sinnesdaten auf die einfachste und ökonomischste Art und Weise zu beschreiben.

Wie die Atomistik kann auch die Doktrin, daß jede Kausalität mechanischer Natur ist, nicht durch die Erfahrung begründet werden und stellt deshalb ein metaphysisches Postulat dar. Ein wahrer Ausdruck des Prinzips der Kausalität ist laut Mach nicht diese Doktrin der mechanischen Weltauffassung, sondern das Prinzip der Energieerhaltung: Arbeit kann nicht aus nichts gewonnen werden. Zudem ist der Kraftbegriff selbst metaphysischer Natur, welches bei Newton deutlich durch den Gebrauch von unobservierbaren Fernwirkungskräften zum Ausdruck kommt. Nicht Kraft sondern Energie ist laut Mach der Grundbegriff der Physik im allgemeinen und der Mechanik im besonderen. Es ist deshalb verständlich, daß die Elimination des Kraftbegriffes aus der Mechanik, die Hertz in seinem Buch *Prinzipien der Mechanik* durchführte, bei Mach auf Zustimmung stieß. Übereinstimmung zwischen den beiden Physikern in dieser Hinsicht sollte jedoch nicht dazu führen, bestehende und zum Teil gravierende Unterschiede in ihren Auffassungen zu übersehen. Im nächsten Abschnitt wird der Standpunkt von Hertz dargestellt.

[2] Boltzmanns Auffassung wird unten dargestellt.

3.1 *Prinzipien der Mechanik*

Heinrich Hertz erlangte als Physiker Weltruhm durch seinen experimentellen Nachweis der elektromagnetischen Wellen der Maxwellschen Theorie der Elektrodynamik und seiner Demonstration, daß diese Wellen alle Charakteristika des Lichts wie beispielsweise Reflektion und Interferenz aufweisen. Es war somit eine Klärung über die Frage nach dem Wesen des Lichts, welche lange Zeit die Physiker beschäftigt hatte, erzielt worden. Ein grundlegender Bestandteil der Theorie der Elektrodynamik, nach welcher der Unterschied zwischen elektrischen Wellen und Wärme- und Lichtwellen nur in der Wellenlänge besteht, war experimentell bestätigt worden (Cassirer, 1950, S. 103).

Es konnte jedoch immer noch das Gefühl aufkommen, daß nur ein Rätsel durch ein neues abgelöst worden war: das Wesen elektromagnetischer Phänomene ist nicht leichter verständlich als das optischer Erscheinungen. James Clerk Maxwell (1831–79) hatte selbst aus der Empfindung der Notwendigkeit einer mechanischen Interpretation seiner Theorie heraus verschiedene Bilder des Äthers konstruiert. Diese Bilder sollten jedoch nicht als Beschreibungen bzw. Approximationen der physikalischen Wirklichkeit aufgefaßt, sondern als anschauliche Modelle verstanden werden, die als eine mechanische Analogie der Erscheinungen eine Kenntnis der Phänomene ermöglichten (Visser, 1999, S. 138).

Maxwell folgend unternahm Hertz nicht den Versuch, auf die Frage nach der richtigen Theorie zu antworten. Er erklärte, daß die Maxwellsche Theorie nicht mehr als das System der Maxwellschen Gleichungen sei (Hertz, 1892, S. 23). Besteht die Möglichkeit anhand der Theorie durch deduktives Schließen Folgen in der Natur zu bestimmen, und diese Folgen durch Experimente nachzuweisen, so ist die Gültigkeit der Theorie erwiesen. Mehr kann weder verlangt noch erreicht werden:

> “Es ist die nächste und in gewissem Sinne wichtigste Aufgabe unserer bewußten Naturerkenntnis, daß sie uns befähige, zukünftige Erfahrungen vorauszusehen, um nach dieser Voraussicht unser gegenwärtiges Handeln einrichten zu können [...] Das Verfahren aber, dessen wir uns zur Ableitung des Zukünftigen aus dem Vergangenen und damit zur Erlangung der erstrebten Voraussicht stets bedienen, ist dieses: Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände [...] Ist es uns einmal geglückt, aus der angesammelten bisherigen Erfahrung Bilder von der ver-

> langten Beschaffenheit abzuleiten, so können wir an ihnen, wie an Modellen, in kurzer Zeit die Folgen entwickeln, welche in der äußeren Welt erst in längerer Zeit oder als Folgen unseres eigenen Eingreifens auftreten werden [...] Die Bilder, von welchen wir reden, sind unsere Vorstellungen von den Dingen; sie haben mit den Dingen die *eine* wesentliche Übereinstimmung, welche in der Erfüllung der genannten Forderung liegt, aber es ist für ihren Zweck nicht nötig, daß sie irgend eine weitere Übereinstimmung mit den Dingen haben"(Hertz, 1910, S. 1–2).

Auf den ersten Blick scheinen diese Bemerkungen in Verlängerung von Machs phänomenalistischer Physik zu liegen: Das Ziel wisschenschaftlicher Tätigkeit ist, eine Umbildung und Adaption der inneren Scheinbilder hin zur adäquaten Beschreibung der jeweiligen Phänomene zu erreichen. So verstanden entsprechen die Bilder den *ideas* der britischen Empiristen, d.h. sind als Kopien von partikulären *impressions* aufzufassen. Für jedes Element der Theorie ist deshalb experimentell der Nachweis der Existenz der jeweiligen Wahrnehmung zu erbringen. Auf den zweiten Blick wird jedoch deutlich, daß der Bild- bzw. Symbolbegriff von Hertz nicht diese Bedeutung hat. Aus der oben zititierten *einen* Grundforderung nach Vorhersagungskraft geht hervor, daß Hertz und Mach sich in der Hinsicht einig sind, daß jede physikalische Theorie der experimentellen Bestätigung bedarf. Im Gegensatz zu Mach bestreitet Hertz jedoch die Auffasssung, daß alle Elemente der Theorie einer solchen Verifikation benötigen. Dies ist nur für die Theorie als Ganzes notwendig.

Hertz benutzt in den *Prinzipien* das Wort *Darstellung*, um die Funktion seiner Bilder zu kennzeichnen. Sie sollen nicht als *Vorstellungen* früherer Sinneswahrnehmungen eines passiv perzipierenden Subjekts verstanden werden, sondern als bewußt konstruierte Erkenntnisschemata, welche die Grundforderung zu erfüllen haben.[3] Diese Forderung bestimmt infolge Hertz ein Bild nicht eindeutig. Verschiedene Bilder derselben Gegenstände sind möglich, weshalb er in der Einleitung der *Prinzipien der Mechanik* drei Bedingungen aufstellt, die ein Bild bzw. eine Darstellung äußerer Phänomene erfüllen sollte: *logische Zulässigkeit*, *Richtigkeit* und *Zweckmäßigkeit*. Ein Bild wird als *logisch zulässig* oder kurz *zulässig* bezeichnet, wenn es nicht einen Widerspruch gegen die Gesetze unseres Denkens in sich trägt, wobei die Denkgesetze von Hertz als a priori im Kantschen Sinne verstanden werden. Diese Forderung entspricht mit anderen Worten der Forderung nach *logischer Konsistenz*. Ein Bild wird als *richtig* bezeichnet, wenn dessen Vorhersagungen mit den

[3] Nur im oberen Zitat ist er in seinem Sprachgebrauch nicht konsistent, weshalb es verständlich ist, daß beispielsweise Mach ihn mißverstehen konnte.

Experimenten übereinstimmen, d.h. es die Grundforderung erfüllt. Die Erfüllung dieser beiden Forderungen ist letztendlich notwendig, um überhaupt als Bild der jeweiligen äußeren Gegenstände gelten zu können. Die Forderung der Zweckmäßigkeit ist somit das einzige Kriterium, um zwischen verschiedenen Bildern derselben Gegenstände eine Wahl treffen zu können. Dieses Kriterium läßt sich in zwei aufteilen: *Deutlichkeit* und *Einfachheit*. Von zwei Bildern desselben Gegenstandes wird dasjenige das *deutlichere* sein, welches mehr wesentliche Beziehungen des Gegenstandes widerspiegelt als das andere. Bei gleicher Deutlichkeit wird von den Bildern dasjenige am *einfachsten* sein, "welches neben den wesentlichen Zügen die geringere Zahl überflüssiger oder leerer Beziehungen enthält"(Hertz, 1910, S. 2).

Diesen Bedingungen entsprechend, muß in Darlegungen der Bilder klar hervorgehen, welche Eigenschaften den Bildern um der Zulässigkeit, der Richtigkeit bzw. der Zweckmäßigkeit willen zugelegt wurden. Was den Bildern um der Zweckmäßigkeit willen beigelegt wurde ist in dem enthalten, was wir nach Willkür hinzutun oder wegnehmen können. Exempel solchen konventionellen Inhalts sind Bezeichnungen, Definitionen und Abkürzungen. Was den Bildern zukommt um ihrer Richtigkeit willen, ist in ihrer Relation zu den Erfahrungstatsachen enthalten. Ob die Bilder zulässig sind, ist durch unsere Denkgesetze bestimmt. Über die Zweckmäßigkeit eines Bildes können unterschiedliche Meinungen bestehen. Ob ein Bild richtig ist oder nicht kann eindeutig aber nur nach dem Stande der gegenwärtigen Erfahrung entschieden werden. Die Zulässigkeit eines Bildes kann dagegen a priori beantwortet werden. Die Bedingungen der Zulässigkeit und der Zweckmässigkeit sind somit im Gegensatz zur Richtigkeit von der Erfahrung unabhängig. Die zwei ersten Bedingungen sind Kriterien zur Beurteilung der internen Struktur bzw. logischen Artikulation der mathematischen Modelle mechanischer Phänomene, während durch die Richtigkeit ein Kriterium dargestellt wird, welches die Relationen eines Modells zu den Erfahrungstatsachen wertet.

Hertz's Darlegung der Prinzipien der Mechanik entspricht den eigenen Anforderungen. Er beginnt diese im Buch I mit einem umfassenden System physikalischer Begriffe und Definitionen. In bezug auf die Definitionen seiner drei Grundbegriffe Zeit, Raum und Masse, mit welchen er sein System der Mechanik einleitet, formuliert Hertz: "Den Überlegungen des ersten Buches bleibt die Erfahrung völlig fremd. Alle vorgetragenen Aussagen sind Urteile a priori im Sinne KANTS. Sie beruhen auf den Gesetzen der inneren Anschauung und den Formen der eigenen Logik des Aussagenden und haben mit der äußeren Erfahrung desselben keinen anderen Zusammenhang, als ihn diese Anschauungen und Formen etwa haben"(Hertz, 1910, S. 53). Laut Hertz sind die Grundbegriffe der Physik also Muster möglicher Erfahrung und nicht wie bei Mach Kopien tatsächlicher Erfahrung (Cassirer, 1950, S. 106).

Diese Begriffe stellen a priori Elemente dar, die Erfahrungsurteile überhaupt erst ermöglichen. Sie sind jedoch nicht synthetisch a priori im Sinne Kants, da sie wie erwähnt im Gegensatz zu den Kantschen Kategorien willkürlich hinzugetan oder weggenommen werden können, d.h. der Darstellung um der Zweckmäßigkeit willen zugelegt sind. Sind die Begriffe erst festgelegt, so können wir anhand ihrer die denknotwendigen Folgen entwickeln. Diese Folgen sind der Darstellung der Zulässigkeit willen zugelegt. Im Gegensatz zu Buch I, das die a-priori-Elemente des Hertzschen Bildes der Mechanik enthält, werden in Buch II die a-posteriori-Elemente eingeführt. Es wird dargestellt, wie das a priori System des ersten Buches zur Erfahrung zu beziehen ist. Was der Darstellung in diesem Buch zugelegt wird geschieht also primär der Richtigkeit willen.

Anhand der drei Forderungen unternimmt Hertz in der Einleitung der *Prinzipien der Mechanik* eine Kritik der verschiedenen Darstellungen der Mechanik. Das Hauptargument für die Bevorzugung seiner eigenen von Kräften eliminierten Mechanik stellt die Forderung nach der Zweckmäßigkeit bzw. Einfachheit dar. Hertz kritisiert an der Newtonschen Mechanik, daß von Kräften die Rede sei, die nicht in der Natur vorkämen. Außerdem bemängelt er, daß zu viele unnötige Kräfte introduziert würden, um einfache Erscheinungen zu erklären. Das Ruhen eines auf einem Tisch liegenden Eisenstücks wird beispielsweise durch eine resultierende Nullwirkung tausender von magnetischen, elektrischen und Gravitationskräften erklärt (Hertz, 1910, S. 15–6). Die durch Hertz nachgewiesene Möglichkeit der Elimination des Kraftbegriffes aus der Mechanik zeigt, daß diese leere Beziehungen bzw. *leergehende Nebenräder* darstellen,[4] d.h. das Hertzsche Bild ist einfacher und deshalb zu bevorzugen. Die Energetik, eine zweite Darstellung der Mechanik, faßt statt der Kraft die Energie als Grundbegriff auf und ist laut Hertz zwar zweckmäßiger als die Newtonsche, aber nicht so einfach wie seine eigene.

Seine Mechanik verhält sich zur Newtonschen "wie die systematische Grammatik einer Sprache zur Grammatik, welche den Lernenden möglichst bald erlauben soll, sich über die Notwendigkeiten des täglichen Lebens zu verständigen"(Hertz, 1910, S. 47). Es ist also von einer Zweckmäßigkeit im Sinne eines Geistes die Rede, der das Ganze der mechanischen Erkenntnis objektiv zu umfassen und in einfacher Weise darzustellen sucht ohne Rücksicht auf praktische Anwendung und Bedürfnisse der Menschen. Im Sinne der Bedürfnisse der Menschen räumt Hertz der Newtonschen Mechanik eine höhere Zweckmäßigkeit ein. Im Sinne der Einfachheit ist jedoch seine Darstellung vorzuziehen. Ziel ist eine übersichtliche Darstellung der Mechanik, dessen

[4] Den Begriff *leergehende Nebenräder* mag Hertz von Maxwell übernommen haben (Lützen, 1995, S. 8).

Zweck in einer analytischen Elimination begrifflicher Scheinprobleme liegt, welches Hertz in einem kurzen Abschnitt darstellt. Dieser Abschnitt sollte später für Wittgenstein Inbegriff der kritischen Methode von Hertz werden:

> "Auf die Zeichen "Kraft" und "Elektrizität" aber hat man mehr Beziehungen gehäuft, als sich völlig mit einander vertragen; dies fühlen wird dunkel, verlangen nach Aufklärung und äußern unsern unklaren Wunsch in der unklaren Frage nach dem Wesen von Kraft und Elektrizität. Aber offenbar irrt die Frage in Bezug auf die Antwort, welche sie erwartet. Nicht durch die Erkenntnis von neuen und mehreren Beziehungen und Verknüpfungen kann sie befriedigt werden, sondern durch die Entfernung der Widersprüche unter den vorhandenen, vielleicht also durch Verminderung der vorhandenen Beziehungen. Sind diese schmerzenden Widersprüche entfernt, so ist zwar nicht die Frage nach dem Wesen beantwortet, aber der nicht mehr gequälte Geist hört auf, die für ihn unberechtigte Frage zu stellen"(Hertz, 1910, S. 9).[5]

Kurz gefaßt erfüllt eine zweckmäßige bzw. übersichtliche Darstellung durch die Elimination leerer Beziehungen eine therapeutische Funktion. Nebst der Elimination leerer Beziehungen besteht die Zweckmäßigkeit einer solchen Darstellung in ihrer übersichtlichen Darlegung der eigenen inneren bzw. logischen Struktur. Dem Geiste wird durch die Übersicht zu Bewußtsein geführt, was sich vor dem Hintergrund des Modells folgern bzw. fragen läßt, weshalb die Qualen des Geistes ein Ende finden.

Ein anderer charakteristischer Aspekt seiner Mechanik, dem in bezug auf den *Tractatus* große Bedeutung zukommt, tritt deutlich im Kontrast zum Phänomenalismus von Mach hervor. Mach hatte in seinem Buch *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt* (1883) den Versuch unternommen, die Ursachen für diese Entwicklung darzustellen, und die Stellen ausfindig zu machen, wo die Metaphysik sich einfand und die Physiker verwirrte. Die Abgrenzung der Naturwissenschaft im allgemeinen und der Mechanik im besonderen von der Metaphysik läßt sich laut Mach durch eine Reduktion bestimmen, welche Aussagen über physikalische Erscheinungen auf ihre jeweiligen Evidenzsätze, d.h. Aussagen über Sinneswahrnehmungen, zurückführt. Die Festlegung der Grenzen der Mechanik wird also extern bestimmt.[6] Diese Art der Grenzbestimmung steht im Gegensatz zur Methode

[5]Wittgenstein hatte zeitweilig die Absicht, die letzten Zeilen des Zitats als Motto für *Philosophische Untersuchungen* zu gebrauchen (Hacker, 1997, S. 4).

[6]Diese Charakteristik des Machschen Unterfangens findet sich in Janik und Toulmin (1996, S. 141).

von Hertz. Seine übersichtlichen Darstellungen erbringen den Vorteil, daß sich ihre Grenzen von innen bestimmen lassen:

> “Unser Grundgesetz, vielleicht ausreichend die Bewegung der toten Materie darzustellen, erscheint wenigstens der flüchtigen Schätzung zu einfach und zu beschränkt, um die Mannigfaltigkeit selbst des niedrigsten Lebensvorganges wiederzugeben. Daß dem so ist, scheint mir nicht ein Nachteil, sondern eher ein Vorzug unseres Gesetzes. Eben weil es uns gestattet, das Ganze der Mechanik umfassend zu überblicken, zeigt es uns auch die Grenzen dieses Ganzen”(Hertz, 1910, S. 45).

Durch die Darstellung ist bereits die Grenze des Anwendbarkeitsbereiches aufgezeigt. Das Modell selbst *zeigt* uns die Grenzen der möglichen Erfahrungen, die als ‘mechanisch’ gelten können (Janik und Toulmin, 1996, S. 142). Während der begriffliche Apparat von Mach psychologisch seine Begründung findet, sind die Grundlagen der Modelle von Hertz anhand der drei Forderungen logico-mathematisch bestimmt. Psychologische Untersuchungen spielen in den *Prinzipien der Mechanik* keine Rolle. Es spielt keine Rolle, wie wir uns Bilder machen sondern nur, daß wir sie uns machen. Nach dieser Darlegung von Teilen der *Prinzipien der Mechanik*, die Wittgenstein beeinflussen sollten, wird im nächsten Abschnitt eine dementsprechende Darlegung in bezug auf die Artikelsammlung *Populäre Schriften* von Ludwig Boltzmann unternommen.

3.2 *Populäre Schriften*

Ludwig Boltzmann ist als Physiker hauptsächlich für seine theoretischen Arbeiten über die kinetische Gastheorie und die statistische Mechanik bekannt geworden (Visser, 1999, S. 139), in welcher er von der Hypothese der Atomistik ausging: Materie besteht aus Atomen. Wie schon erwähnt wurde diese Annahme von Mach als unnütze metaphysische Spekulation kritisiert. Machs Auffassung wurde von Wilhelm Ostwald (1853–1932), einer der Grundleger der physischen Chemie, und Pierre Duhem (1861–1916), ein französischer Physiker und Philosoph, geteilt (Visser, 1999, S. 136). Um dieser Kritik zu entgegnen, unternahm Boltzmann in einem Vortrag mit dem Titel *Über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neurerer Zeit*[7] den Versuch, seine Position durch eine Vermittlung zwischen der Auffassung von Hertz und der von Mach zu stützen.

[7]Den 22. September 1899 auf der Münchener Naturforscherversammlung gehalten. In *Populäre Schriften*, S. 198–227 erschienen.

Boltzmann hatte vor der Herausgabe der *Prinzipien der Mechanik* in Verlängerung Maxwellscher Ideen in *Über die Methoden der theoretischen Physik*[8] (1892) eine eigenständige Bild-Theorie formuliert. Da Hertz die Charakteristika seiner Bilder deutlicher und exakter darstellte, blieb im Vortrag von 1899 die Bewunderung von Boltzmann nicht aus. Letzterer sah die Arbeit von Hertz als eine Art Vollendung der Ideen Maxwells an:

> "Hertz hat in seinem Buch über Mechanik, ebenso wie die mathematisch-physikalischen Ideen Kirchhoffs, auch die erkenntnistheoretischen Maxwells zu einer gewissen Vollendung gebracht [...] seine eigenen Ausführungen dagegen bezeichnete er [Maxwell] als bloße Bilder der Erscheinungen. Hieran anknüpfend, bringt Hertz den Physikern so recht klar zum Bewußtsein, was wohl die Philosophen schon längst ausgesprochen hatten, daß keine Theorie etwas Objektives, mit der Natur sich wirklich Deckendes sein kann, daß vielmehr jede nur ein geistiges Bild der Erscheinungen ist, das sich zu diesen verhält, wie das Zeichen zum Bezeichneten"(Boltzmann, 1925, S. 215–216).

Die wichtigste Einsicht Maxwells war laut Boltzmann die Möglichkeit der Pluralität von Theorien. Das Begreifen der Theorie als Bild impliziert die Verwerfung der traditionellen Ansicht der Theorie als wahre Beschreibung objektiver Vorkommnisse, welches Hertz am deutlichsten formuliert hatte. Mit der Auffassung von Maxwell und Hertz als Hintergrund konkludierte Boltzmann deshalb:

> "Die Frage, ob die Materie atomistisch zusammengesetzt oder ein Kontinuum ist, reduziert sich auf die viel klarere, ob die Vorstellung enorm vieler Einzelwesen oder die eines Kontinuums ein besseres Bild der Erscheinungen zu liefern vermöge"(Boltzmann, 1925, S. 216).

Dieses kurze Zitat zeigt Boltzmanns Anwendung der philosophischen Methode von Hertz: ein unlösbares Scheinproblem wird durch eine Frage ersetzt, die durch genügend physikalische Experimente beantwortet werden kann. Das Problem der Atomistik im ontologischen Sinne stellt das Scheinproblem dar. Die Auflösung dieses Problems besteht in der Einsicht, die Atomistik als Teil eines Bildes bzw. der Darstellung zu verstehen. Atomistik in diesem Sinne ist ein gutes Exempel des laut Boltzmann notwendigen Hinausgehens der Bilder über die Erfahrung, weshalb die phänomenalistische bzw. phänomenologische Kritik der Atomistik in folgender Hinsicht irrt:

[8] Siehe Boltzmann (1925, S. 1–10).

> "Wenn die Phänomenologie glaubte, die Natur darstellen zu können, ohne irgendwie über die Erfahrung hinauszugehen, so halte ich das für eine Illusion. Keine Gleichung stellt irgend welche Vorgänge absolut genau dar, jede idealisiert sie, hebt Gemeinsames heraus und sieht von Verschiedenem ab, geht also über die Erfahrung hinaus"(Boltzmann, 1925, S. 222).

Als phänomenologisch wird von Boltzmann die Auffassung bezeichnet, daß es das erfüllbare Ziel einer Theorie sei, eine hypothesenfreie Beschreibung der Erfahrungen zu erlangen. Der Phänomenalismus von Mach beinhaltet darüber hinaus die ontologische Doktrin, daß die Wirklichkeit nicht mehr als die Sinneserfahrung *ist*. Laut Boltzmann sind diese Standpunkte einer Illusion unterworfen. Die Notwendigkeit, über die Erfahrung hinauszugehen, folgt aus der Natur des Denkprozesses, der darin besteht, daß zur Erfahrung etwas hinzugefügt und ein geistiges Bild geschaffen wird, welches nicht die Erfahrung ist und darum viele Erfahrungen darstellen kann. Die Phänomenologie sollte deshalb nicht den Anschein erwecken, als ob sie nicht über die Erfahrung hinausgehe, sondern lediglich davor warnen, dies im übertriebenen Maße zu tun. Diese Warnung entspricht dem Hertzschen Kriterium der Zweckmäßigkeit bzw. Einfachheit: Leere Beziehungen sind so weit wie möglich zu vermeiden.

Wie aus der Darlegung des Vortrages zu ersehen, gelang Boltzmann in eindrucksvoller Weise, sich seinen Kritikern zu stellen, indem er vermochte, zwei Extreme, eine primitive Phänomenologie einerseits und einen groben ontologischen Atomismus andererseits, vor dem Hintergrund der Bild-Theorie zu vereinigen (D'Agostino, 1990, S. 383). Die Bild-Atomistik kann wegen ihrer Vorhersagungskraft von den Phänomenologen geduldet werden, während die Phänomenologie von den Atomisten als Warnung gegen ein übertriebenes Hinausgehen über die Erfahrung Akzeptanz findet.

Boltzmann wird in der Sekundärliteratur oft als ein frommer Schüler von Hertz präsentiert, der in der oben dargestellten Weise ausschließlich die Ideen von Hertz untermauerte und ergänzte.[9] Andrew D. Wilson war der erste, der darauf aufmerksam machte, daß solch eine Darstellung der Beziehung zwischen den beiden Physikern historisch unkorrekt ist (Wilson, 1989, S. 246). Nicht zuletzt um ihres Einflusses auf Wittgenstein willen ist es wichtig, zwischen ihren jeweiligen Auffassungen zu unterscheiden. Besonders in seinen späteren Vorträgen und Artikeln stimmte Boltzmann einer evolutionären Epistemologie im Sinne Darwins zu, welche Kants transzendentale Denkgesetze verwarf und stattdessen die Gesetze als Regeln evolutionären adaptiven

[9]Hacker (1997, S. 4) und Barker (1980, S. 244) sind zwei Beispiele einer solchen Interpretation.

Verhaltens verstand. In *Über die Grundprinzipien und Grundgleichungen der Mechanik*,[10] Vorlesungen an der Clark University im Jahre 1899 gehalten, kommt seine Auffassung in einer Kritik an dem Kantschen Element der *Prinzipien der Mechanik* von Hertz zum Ausdruck:

> "Besonders klar hat dies Hertz in seinem berühmten Buche über die Prinzipien der Mechanik ausgesprochen, nur stellt Hertz daselbst als erste Forderung die auf, daß die Bilder, welche wir uns konstruieren, den Denkgesetzen entsprechen müssen. Gegen diese Forderung möchte ich gewisse Bedenken erheben [...] Diese Denkgesetze sind uns fast ausnahmslos angeboren, aber sie erleiden doch durch Erziehung, Belehrung, und eigene Erfahrung Modifikationen [...] Ihre erste Quelle waren primitive Erfahrungen der Menschheit im Urzustand, allmählich erstarkten sie und verdeutlichten sich durch komplizierte Erfahrungen, bis sie endlich ihre jetzige scharfe Formulierung annahmen"(Boltzmann, 1925, S. 258).

Denkgesetze sind als Denkgewohnheiten aufzufassen, die sich zwar in der Geschichte der Menschheit bewährt haben, doch wird immer offen bleiben, ob sie nicht doch noch die eine oder andere Modifikation erfahren werden. Boltzmann verweist darauf, daß die Geschichte der Wissenschaft zahlreiche Fälle aufweist, wo man Sätze bald begründete, bald widerlegte mittels Beweisgründen, die man als evidente Denkgesetze angesehen hatte, während man später von ihrer Unrichtigkeit überzeugt war. Aufgrund dieser Überlegungen schloß Boltzmann, daß die Hertzsche Bild-Theorie der Modifikation bedarf. Laut Hertz sind die Denkgesetze a priori bestimmt, weshalb jedes Bild der Forderung nach Zulässigkeit genügen muß. Für Boltzmann stellen sie empirisch erprobte Denkgewohnheiten dar, d.h. können auf ihre Richtigkeit überprüft werden. Die Forderung nach Richtigkeit hat deshalb einen höheren Stellenwert als die Denkgesetze bzw. die Forderung nach Zulässigkeit.

An diesen Standpunkt anknüpfend hielt Boltzmann 1904 in St. Louis einen Vortrag mit dem Titel *Über statistische Mechanik*.[11] Dieser Vortrag stellt eine Art Prolegomena für eine zukünftige Sprachphilosophie dar. Der vorigen Vorlesung folgend kann es weder die Aufgabe der Physiker noch der Philosophen sein, "das Gegebene vor den Richterstuhl unserer Denkgesetze zu zitieren,"(Boltzmann, 1925, S. 354) sondern das Ziel ist die Worte so zusammenzustellen, daß sie dem Gegebenen den passendsten Ausdruck verleihen. Die in Sätzen hergestellten Zusammenhänge zwischen den Worten sollen den

[10] In Boltzmann (1925, S. 253–307) erschienen.
[11] Siehe Boltzmann (1925, S. 345–63).

Zusammenhängen des Wirklichen möglichst adäquat sein, d.h. die Fragestellung findet durch die zweckmäßigste Lösung eine Antwort. Boltzmann erkennt, daß dieses Unterfangen die allergrößten Schwierigkeiten bereiten kann, jedoch sei das angestrebte Ziel bekannt und immer einer Lösung fähig.

Scheinbare Widersprüche entstehen, wenn ein Denkgesetz, das in den meisten Fällen zweckmäßig ist, "so zur Gewohnheit, zur zweiten Natur wird, daß man nicht mehr davon lassen kann,"(Boltzmann, 1925, S. 354) wenn irgendwo seine Zweckmäßigkeit aufhört. In solchen Fällen spricht Boltzmann davon, daß die Anpassung über das Ziel hinausschießt. Ein Beispiel für das Hinausschießen unserer Denkgewohnheiten läßt sich in bezug auf die Frage nach der Kausalität aufweisen. Die Gewohnheit, bei allem nach der Ursache zu fragen, ist zum unwiderstehlichen Zwang geworden, weshalb wir nach der Ursache fragen, warum alles eine Ursache hat. Es hat jedoch laut Boltzmann keinen Sinn zu fragen, ob Ursache und Wirkung ein notwendiges Band, oder bloß eine zufällige Aufeinanderfolge darstellen, sondern es kann nur gefragt werden, ob eine bestimmte Erscheinung immer mit einer bestimmten Gruppe anderer Phänomene verbunden ist oder nicht. Eine deutliche Formulierung der Auffassung Boltzmanns findet sich im folgenden Zitat:

> "Meine gegenwärtige Lehre ist total verschieden von der, daß gewis[se] Fragen außerhalb der Grenzen des menschlichen Erkennens [f]allen. Denn nach letzterer Lehre liegt darin ein Mangel, eine Unvollkommenheit des menschlichen Erkenntnisvermögens, während ich die Existenz dieser Fragen, dieser Probleme selbst als eine Sinnestäuschung halte. Bei oberflächlichem Nachdenken überrascht es freilich, daß, nachdem die Sinnestäuschung erkannt ist, der Drang, jene Fragen zu beantworten, nicht aufhört. Die Denkgewohnheit ist viel zu mächtig, als daß sie uns losließe"(Boltzmann, 1925, S. 355).[12]

Er vergleicht im nächsten Abschnitt diese Art der Sinnestäuschungen mit den gewöhnlichen, die auch noch fortbestehen, nachdem ihre Ursache erkannt ist. Die unzweckmäßigen bzw. unberechtigten Denkgewohnheiten werden somit nur langsam weichen. Deshalb ist als eine Hauptaufgabe der Philosophie anzusehen, die Unzweckmäßigkeit dieses über das Ziel Hinausschießens der Denkgewohnheiten klar darzustellen und bei der Wahl und Verbindung von Begriffen und Wörtern nur den zweckmäßigsten Ausdruck des Gegeben anzustreben, womit folgendes erreicht wäre:

> "Würde es daher der Philosophie gelingen, ein System zu schaffen, wo in allen im Frühern besprochenen Fällen die Nichtbe-

[12]Die Buchstaben in den eckigen Klammern fehlen im Originaltext.

> rechtigung der Fragestellung klar hervorträte und dadurch der angewohnte Trieb danach allmählich erstürbe, so wären mit einem Schlage die dunkelsten Rätsel gelöst, und die Philosophie des Namens einer Königin der Wissenschaft würdig"(Boltzmann, 1925, S. 356).

Selbst unternimmt Boltzmann im Gegensatz zu Wittgenstein nicht den Versuch, diese Aufgabe zu bewältigen. Letzterer war der Überzeugung gewesen, mit dem *Tractatus* das von Boltzmann nachgefragte System konstruiert zu haben. Während Boltzmann die Beendigung sinnloser Fragestellungen forderte, schuf Wittgenstein mit dem *Tractatus* ein System, welches die Grenzen der sinnvollen Fragen und Sätze zog, und mit dem Paragraphen 7 schloß: "Wovon man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen." Wittgenstein stand bei seiner Konstruktion jedoch nicht ohne Anhaltspunkt. Er fand in den Werken Freges und Russells Systeme vor, die von ihm als Prototypen des erwünschten Systems angesehen wurden. Das nächste Kapitel widmet sich der Darstellung dessen, was Wittgenstein in den Werken Russells antraf.

Kapitel 4

Der Logizismus Russells

4.1 *The Principles of Mathematics*

In *The Principles of Mathematics* gab Russell eine unformelle Darstellung der logistischen These, daß die Grundlagen der Mathematik rein logischer Natur seien, d.h. die Mathematik sich auf logische Begriffe und Konstanten reduzieren läßt.[1] Diese These war für Russell Teil einer Kritik am Idealismus (Hacker, 1996, S. 10). Er war der Auffassung, daß wir die Fähigkeit haben, über die Welt als solche zu denken und zu reden statt nur über ein vom menschlichen Bewußtsein abhängiges Surrogat, weshalb Russell dem Idealismus einen Realismus gegenüberstellte, welcher die Logik als vom Menschen unabhängigen Zug der Welt auffaßte. Von der Überzeugung ausgehend, daß philosophische Wahrheiten statt beispielsweise durch transzendentale Deduktionen nur durch logische Analyse zu erreichen seien, schrieb er bezüglich des Verhältnisses zwischen Analyse und seinem Realismus: "All complexity is conceptual in the sense that it is due to a whole capable of logical analysis, but is real in the sense that it has no dependence upon the mind but only on the nature of the object. Where the mind can distinguish elements, there must *be* different elements to distinguish"(Russell, 1956, S. 466). Analyse ist im wesentlichen die Zerlegung begrifflich komplexer Dinge in deren einfache, unanalysierbare Bestandteile, welche als Undefinierbarkeiten (*indefinables*) bezeichnet werden. Laut Russells Auffassung weist ein Ausdruck auf etwas hin, d.h. hat ein Ausdruck Bedeutung, so folgt, daß etwas besteht, welches den Ausdruck bedeutet:

> "*Being* is that which belongs to every conceivable term, to every possible object of thought – in short to everything that can possibly occur in any proposition, true or false, and to all such

[1] Dieses Kapitel entstand vor dem Hintergrund von Potter (2000, S. 105–63).

> propositions themselves [. . .] Thus being is a general attribute of everything, and to mention anything is to show that it is"(Russell, 1956, S. 449).[2]

Jenes etwas, welches in diesem Sinne besteht, stellt eine objektive Wesenheit bzw. Größe, einen Term (*term*) dar. Terme sind entweder simpel oder komplex, d.h. aus den simplen zusammengesetzt. Eine Undefinierbarkeit ist ein einfacher Term, ein goldener Berg ein komplexer. Mit den einfachen Termen sind wir unmittelbar bekannt (*acquainted*). Wir können sie laut Russell mit Hilfe einer besonderen Wahrnehmung wie die Rotheit eines Apfels erfahren. Unsere Kenntnis der komplexen Terme ist abgeleitet, ergibt sich aus der Wahrnehmung ihrer jeweiligen einfachen Bestandteile. Aussagen werden laut dieser Auffassung sprachlich durch Sätze ausgedrückt und als bewußtseinsunabhängige, nicht-linguistische Objekte verstanden, die nicht aus Wörtern sondern aus Termen bestehen. So wird bespielsweise der Berg Mount Blanc *in concreto* als Bestandteil der durch den Satz 'Der Mount Blanc ist mehr als 4000 Meter hoch' ausgedrückten Aussage angesehen.[3] Die Ontologie Russells beinhaltet neben Bergen beispielsweise Raumpunkte, Relationen, Allgemeinbegriffe, Klassen, Zahlen und Bedeutungen logischer Konstanten wie '$\sim$' und '$\supset$' als Gegenstände. Die logistische These besagt in diesem Lichte, daß die Analyse mathematischer Aussagen ab einer gewissen Stufe nur logische Gegenstände als Terme beinhalten wird. Diese Gegenstände sind Bestandteil der Logik der Welt und können von uns qua einer besonderen logischen Wahrnehmung unmittelbar erkannt werden (Russell, 1956, S. 3).

4.2 Russells Paradox

Während Russell an den *Principles* schrieb, wurde er wie erwähnt auf Freges *Grundgesetze* aufmerksam, wo der Versuch unternommen wurde, die Arithmetik formal bzw. axiomatisch-deduktiv aus der Logik herzuleiten. In einem Brief vom 16.6 1902 schrieb Russell an Frege, daß er bezüglich des Wesentlichen mit ihm einer Meinung sei, aber auf ein Problem gestoßen war:

> "Ich finde mich in allen Hauptsachen mit Ihnen in vollem Einklang [. . .] Nur in einem Punkte ist mir eine Schwierigkeit begegnet. Sie behaupten (S. 17) es könne auch die Funktion das

[2] Russell unterscheidet zwischen bestehen im Sinne des Zitats und existieren. Der Begriff 'goldener Berg' besteht als logischer Gegenstand, weshalb jedoch kein Berg aus Gold zu existieren braucht.

[3] Aus einem Brief von Russell an Frege vom 12.12 1904, siehe Frege (1976, S. 248–51).

> unbestimmte Element bilden. Dies habe ich früher geglaubt, jedoch jetzt scheint mir diese Ansicht zweifelhaft, wegen des folgenden Widerspruchs: Sei w das Prädicat, ein Prädicat zu sein welches von sich selbst nicht prädicirt werden kann. Kann man w von sich selbst prädiciren? Aus jeder Antwort folgt das Gegentheil.“(Frege, 1976, S. 211).

Angenommen w kann von sich selbst prädiziert werden, so ist es laut der Definition ein Prädikat, welches nicht von sich selbst prädiziert werden kann. Kann w dagegen nicht von sich selbst prädiziert werden, so kann es von sich selbst prädiziert werden. Wir haben einen Widerspruch erhalten. Wie Russells Paradox aus dem System Freges hervorgeht, läßt sich mit Hilfe der folgenden Darstellung ersehen.

In *Grundgesetze* wird zwischen Funktion und Gegenstand unterschieden: Ein Gegenstand führt keine Argumentstelle mit sich. Er ist gesättigt. Eine Funktion führt eine Argumentstelle mit sich.[4] Sie ist ungesättigt und wird durch das Argument zum Wert der Funktion (für das Argument) ergänzt. Jede Funktion bestimmt einen logischen Gegenstand, den Wertverlauf der Funktion. Ein Begriff kann im System als Funktion dargestellt werden, deren Wert immer ein Wahrheitswert, d.h. entweder der logische Gegenstand *das Wahre* (W) oder *das Falsche* (F) ist. ‘Fa’, die Aussage ‘a ist F’, wird somit als $F(a) = W$ wiedergegeben, und ‘$\sim Fa$’, die Aussage ‘a ist nicht F’, als $F(a) = F$. Dem Wertverlauf $\{x : F(x)\}$ des Begriffes F entspricht dessen Umfang $\{x : Fx\}$, d.h. die Klasse aller Gegenstände, die unter den Begriff fallen. In bezug auf die Wertverläufe führte Frege das Grundgesetz V ein, welches sich in moderner Notation als

$$\{x : f(x)\} = \{x : g(x)\} \equiv (x)(f(x) = g(x))$$

wiedergeben läßt, wobei ‘$\{x : f(x)\}$’ und ‘$\{x : g(x)\}$’ die Wertverläufe der Funktion $f(x)$ bzw. $g(x)$ bezeichnen. In dem besonderen Falle, wo die Funktionen Begriffe sind, erhält man durch die obere Interpretation für die Umfangsgleichheit von Begriffen

$$\{x : Fx\} = \{x : Gx\} \equiv (x)(Fx \equiv Gx) \tag{4.1}$$

Beispielsweise bestimmen die zwei Begriffe ‘x ist ein Sohn’ und ‘x ist ein Mann’ den gleichen Wertverlauf. Die Beziehung des Hineinfallens eines Gegenstandes in einen Begriffsumfang definierte Frege als

$$x \in y \equiv_{Df} (\exists X)(Xx \,.\, y = \{z : Xz\}). \tag{4.2}$$

[4]In *Grundgesetze* ist auch von Funktionen mit zwei Argumentstellen die Rede, welches in diesem Zusammenhang jedoch irrelavant ist.

Mit Hilfe des Gesetzes und der Definition läßt sich folgendes Lemma beweisen:

Lemma. $a = \{x : Fx\} \supset (x)(x \in a \equiv Fx)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\text{Ist } a = \{x : Fx\}, \text{ so gilt} \\
x \in a &\equiv x \in \{z : Fz\} \\
&\equiv (\exists X)(Xx \,.\, \{z : Fz\} = \{z : Xz\}) && \text{kraft (4.2)} \\
&\equiv (\exists X)(Xx \,.\, (z)(Fz \equiv Xz)) && \text{kraft (4.1)} \\
&\equiv Fx.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Russells Paradox erhalten wir folgendermaßen:

Russells Paradox. Ist $a = \{x : x \notin x\}$ folgt ein Widerspruch.

Beweis:

$(x)(x \in a \equiv x \notin x)$ folgt kraft des Lemmas. Besonders gilt $a \in a \equiv a \notin a$. Widerspruch.

Q.E.D.

Aus den zitierten Zeilen des Briefes geht hervor, daß Russell aufgrund des Widerspruches daran zweifelte, ob "die Funktion das unbestimmte Element bilden kann". Anders gesprochen bezweifelt er, ob der Wertverlauf der Funktion überall als Argument auftreten kann. Wegen des Widerspruches muß gefolgert werden, daß "unter gewissen Umständen eine definierbare Menge kein Ganzes bildet"(Frege, 1976, S. 211), d.h. der Begriff 'das Prädikat, ein Prädikat zu sein, welches von sich selbst nicht prädiziert werden kann' keinen Wertverlauf bzw. keinen Gegenstand a bestimmt und somit das Grundgesetz V nicht uneingeschränkt gültig ist.[5]

[5]Infolge des Grundgesetzes bestimmt jeder Begriff F einen Wertverlauf: $\{x : Fx\} = \{x : Fx\} \equiv (x)(Fx \equiv Fx)$.

4.3 *On Denoting*

Das Paradox offenbarte, daß es nötig war, den üppigen Wuchs an bestehenden Gegenständen zu reduzieren, die Freges System und Russells bisherige Auffassung zuließen.[6] Den Ansatz für solch eine Reduktion gelang Russell mit Hilfe seiner *Theory of Description*, die er im Artikel *On Denoting* des Jahres 1905 darstellte. Diese Theorie forderte von Russell das Eingeständnis, daß zwischen der grammatischen Struktur eines Satzes und der logischen Struktur der durch den Satz ausgedrückten Aussage ein Unterschied bestehen kann. Bisher war er davon ausgegangen, daß der sprachliche Ausdruck eine transparente Darstellung der jeweiligen Aussage sei. Die neue Theorie offenbarte laut Russell jedoch, daß die grammatische Form eines Satzes die wahre *logische Form* der ausgedrückten Aussage verbergen könne. Durch die Analyse eines Satzes können beispielsweise Quantoren, Identitäten und logische Konstanten zum Vorschein kommen.

Russell gab im Artikel die seither berühmte Analyse der Sätze, welche bestimmte Beschreibungen (*definite descriptions*) enthalten. So analysierte er beispielsweise den Satz 'Der jetzige König Frankreichs ist glatzköpfig' ('The present king of France is bold'). Dieser Satz hat grammatisch die Subjekt-Prädikat-Form. Die bestimmte Beschreibung 'der jetzige König Frankreichs' stellt das grammatische Subjekt und 'ist glatzköpfig' das Prädikat dar. Im Unterschied dazu ergibt die logische Analyse der Aussage laut Russell den Satz

$$(\exists x) : Fx \,.\, Gx \,.\, (y) : Fy \,.\!\supset\!.\, y = x,$$

wobei 'Fx' und 'Gx' die Aussagefunktionen 'x ist jetziger König Frankreichs' bzw. 'x ist glatzköpfig' bezeichnen. Die bestimmte Beschreibung 'der jetzige König Frankreichs' scheint qua ihrer Funktion als grammatisches Subjekt eine bestimmte Person zu bedeuten. In diesem Sinne hat die Beschreibung jedoch keine Bedeutung, weil keiner König von Frankreich ist (noch zu Zeiten Russells war). Die Beschreibung ist kein logischer Eigenname, sondern was Russell einen bedeutenden Ausdruck (*denoting phrase*) nannte.[7] In *Principles* hatte Russell angenommen, daß solch ein Ausdruck einen Begriff (*denoting concept*) bedeutet, d.h. dem Ausdruck in der Aussage ein Begriff entspricht. Er war der Auffassung gewesen, daß in unserem Beispiel der Ausdruck 'der jetzige König Frankreichs' einen Begriff bedeutet, unter den zwar keine Person fällt, d.h. das grammatische Subjekt in diesem Falle keine Person bedeutet, aber stattdessen einen Begriff. Somit entsprechen laut Russells

[6] Ab dem jetzigen Abschnitt wird die Notation Russells verwendet.

[7] 'Der jetzige König Schwedens' und 'der jetzige Direktor des Steno Museeums' sind somit auch bedeutende Ausdrücke.

Auffassung in *Principles* grammatische und logische Form einander.

Eben dieses wird in *On Denoting* verneint und verworfen, welches deutlich aus dem Beispiel hervorgeht. Das grammatische Subjekt ist nicht Bestandteil des durch die Analyse resultierenden Satzes. Letzterer Satz spiegelt die logische Form der Aussage wieder, weshalb zu schließen ist, daß der Ausdruck gar keine Bedeutung hat. Russell bezeichnete später solche Ausdrücke als unvollständige Symbole (*incomplete symbols*).[8] Im Artikel kommt seine neue Doktrin wie folgt zum Ausdruck:

> “denoting phrases never have any meaning in themselves, but [...] every proposition in whose verbal expression they occur has a meaning”(Russell, 1905, S. 480).

Russell hatte einen Ansatz für die Reduktion der bestehenden Größen gefunden. Bedeutende Ausdrücke können mit Hilfe der neuen Theorie als unvollständige Symbole verstanden und die bedeutenden Begriffe, von der Ausnahme abgesehen, wo letztere Variablen sind, aus der Ontologie verbannt werden. Die Variable bildet eine Ausnahme, weil sie durch die Theorie nicht eliminiert wird, welches aus unserem Beispiel zu ersehen ist: die Variablen x und y sind Bestandteile, Termen der Aussage. Die Elimination der anderen Begriffe hatte neben der ontologischen Reduktion den Vorteil, daß Russell von der Ausnahme abgesehen nicht mehr das Verhältnis zwischen einem bedeutenden Begriff und seiner Bedeutung erläutern brauchte. Das Problem allgemein zu erklären, wie bestimmte logische Gegenstände andere Gegenstände bedeuten können, reduzierte sich somit auf den besonderen Fall, wo von einer Variable die Rede ist. Die Lösung des Problems der Bedeutung für die Variable bereitete Russell in der folgenden Zeit viel Kopfzerbrechen:

> “I only profess to reduce the problem of denoting to the problem of the variable. This latter is horrible difficult, and there seems equally strong objections to all the views I have been able to think of”(Russell, 1983–, Bd. IV, S. xxxv).

Zu Zeiten von *On Denoting* verstand er die Variable als einfache, nichtlinguistische Größe, deren Bereich unbegrenzt ist, d.h. die Variable kann jeden Wert annehmen (Potter, 2000, 127–8). Diese Auffassung von der Variablen mußte er jedoch später verwerfen, um eine Lösung des Paradoxes geben zu können. Diese Lösung wird unten dargelegt.

[8] Siehe Whitehead und Russell (1910–3, Bd. 1, Kap. 3).

4.4 *Principia Mathematica*

In *Principia Mathematica* (1910–13) unternahm Russell zusammen mit Alfred North Whitehead (1861–1947) den Versuch der formalen bzw. axiomatisch-deduktiven Begründung der logistischen These. Dieses Werk war eigentlich als zweiter Band der *Principles* (1903) gedacht. Als es nahezu 10 Jahre später erschien, hatte es sich jedoch in ein selbständiges, drei Bände umfassendes Werk verwandelt. *Principles* hatte neben einer Diskussion des Russellschen Paradoxes nur eine Skizze einer Lösung desgleichen enthalten. Eine der Hauptaufgaben ihrer formalen Darlegung sahen die beiden Autoren in der Behebung dieses Mangels (Whitehead und Russell, 1910–3, Bd. 1, Pref.).

4.4.1 Die Theorie der logischen Typen

In Whitehead und Russells Theorie der logischen Typen (*theory of logical types*) zur Lösung des Paradoxes und der anderen Antinomien, die kurz vor bzw. seit der Fertigstellung von *Principles* publik geworden waren und deren bekanntester Repräsentant die Antinomie von Burali-Forti darstellt, fuhren sie mit der Einsicht aus *On Denoting* fort, daß die grammatische Form des Satzes und die logische Form der durch den Satz zum Ausdruck kommenden Aussage nicht unbedingt übereinzustimmen brauchen. Der Ausdruck 'das Prädikat, ein Prädikat zu sein, welches von sich selbst nicht prädiziert werden kann' ist zwar grammatisch korrekt aufgebaut aber laut der Theorie der Typen nicht logisch wohlgeformt, weshalb der Ausdruck keine logische Größe, d.h. kein Prädikat bedeutet. Im Ausdruck tritt ein Circulus vitiosus auf, welcher laut Whitehead und Russell auch in den anderen Antinomien vorkommt. Dieser Circulus vitiosus folgt aus der Annahme, daß unter den Mitgliedern einer bestimmten Sammlung von Objekten solche sein können, die nur durch die Sammlung als Ganzheit definierbar sind. Um im Symbolismus solch logisch illegitime Totalitäten zu vermeiden, wird deshalb in *Principia* das Prinzip des Circulus vitiosus (*vicious-circle principle*) eingeführt:

> " 'Whatever involves *all* of a collection must not be one of the collection'; or, conversely: 'If, provided a certain collection had a total, it would have members only definable in terms of that total, then the said collection has no total' "(Whitehead und Russell, 1910–3, Bd. 1, S. 40).

Wird das Prinzip auf das Paradox angewandt folgt, daß der obige Ausdruck kein Prädikat w bedeutet, weil w sich nur durch die Ganzheit von Prädikaten definieren läßt, der es wiederum selbst angehört. Allgemeiner gesprochen ist zu schließen, daß kein Prädikat bzw. keine Aussagefunktion als sein eigenes Argument auftreten kann:

> "A function is what ambiguously denotes some one of a certain totality, namely the values of the function; hence this totality cannot contain any members which involve the function, since, if it did, it would contain members involving the totatility, which, by the vicious-circle principle, no totality can do"(Whitehead und Russell, 1910–3, Bd. 1, S. 42).

So ist ein paradoxaler Ausdruck wie '$\phi(\phi\widehat{x})$' ein Scheinausdruck, der weder wahr noch falsch sondern bedeutungslos ist (Der Zirkumflex wird gebraucht, um zwischen der Aussagefunktion wie $\phi\widehat{x}$ und deren Wert für das Argument x unterscheiden zu können). Die Werte, welche das Argument einer Aussagefunktion wie $\phi\widehat{x}$ annehmen kann, sind somit auf einen bestimmten Bereich von Werten, einen bestimmten logischen Typ begrenzt. Whitehead und Russell zeigen in ihrer Theorie, wie die Aussagefunktionen sich mit Hilfe des Prinzips des Circulus vitiosus anhand des Wertebereiches ihrer Argumentstellen in eine Typen-Hierarchie klassifizieren lassen, welche die Bildung der paradoxalen Scheinausdrücke ausschließt.

Die Klassifikation der Aussagefunktionen geht von den Funktionen aus, welche keine Quantoren beinhalten. Diese werden als Matrizen (*matrices*) bezeichnet. Den Ausgangspunkt der Hierarchie bilden die elementaren Aussagen (*elementary propositions*), worunter die Aussagen verstanden werden, in denen keine Variablen auftreten. Whitehead und Russell geben folgendes Beispiel: "A proposition such as "this is red," where "this" is something given in sensation, will be elementary"(Whitehead und Russell, 1910–3, Bd. 1, S. 95–96) und bemerken, daß sofern 'p' und 'q' Elementaraussagen bezeichnen, 'A glaubt p', 'A glaubt $p \vee q$', '$\sim p$', '$p \vee q$', '$p \,.\, q$', '$p \supset q$', etc. auch als Bezeichnugnen elementarer Aussagen zu verstehen sind.

Als erster Typ wird die Variable introduziert, deren Argument alle Gegenstände als Werte annehmen kann, wobei Gegenstände als Bedeutungen verstanden werden, die weder Funktionen noch Aussagen sind. Enthält eine elementare Aussage einen Gegenstand, so kann dieser durch die Variable, deren Werte Gegenstände sind, ersetzt werden. Das Resultat solch einer Substitution wird als Matriz bzw. elementare Aussagefunktion erster Ordnung bezeichnet. Sind beispielsweise $f_0(a, b)$ und $g_0(a)$ Elementaraussagen, so sind

$$f_0(\widehat{x}, b),\ f_0(a, \widehat{y}),\ f_0(\widehat{x}, \widehat{y}) \text{ und } g_0\widehat{x}$$

Matrizen erster Ordnung. Wird über die Variablen einer solchen Matriz quantifiziert, so erhalten wir entweder Aussagefunktionen oder Aussagen erster Ordnung: Werden alle Variablen gebunden resultiert eine Aussage; werden nicht alle gebunden entsteht eine Aussagefunktion. Aus den elementaren Aussagefunktionen unseres Beispiels lassen sich unter anderem die Aussagen erster Ordnung

$$(x).f_0(x,b),\ (\exists y)(x).f_0(x,y) \text{ und } (\exists x).g_0 x$$

und die Aussagefunktionen

$$(\exists x).f_0(x,\widehat{y}) \text{ und } (x).f_0(x,\widehat{y})$$

bilden. Die elementaren Aussagefunktionen sind selbst auch Beispiele der letzteren.

Sind alle Funktionen und Aussagen erster Ordnung konstruiert, können die Matrizen zweiter Ordnung gebildet werden, die ausschließlich Variablen über Gegenstände und Variablen erster Ordnung, welche als Argumente alle Aussagefunktionen erster Ordnung nehmen, beinhalten. Durch Quantifikation über Variablen der Matrizen zweiter Ordnung lassen sich Aussagefunktionen und Aussagen zweiter Ordnung bilden. Auf dieser Stufe der Konstruktion stoßen wir auf den Begriff der Prädikativität: eine Funktion wird als prädikativ (*predicative*) bezeichnet, falls sie eine freie Variable beinhaltet, deren Ordnung mindestens so hoch wie die höchste Ordnung unter den gebundenen Variablen ist. Prädikative Funktionen werden durch ein Ausrufezeichen gekennzeichnet. Mit Hilfe dieser Kennzeichnung kann zwischen einer Matriz zweiter Ordnung wie $\phi!\widehat{x}$, deren Werte alle prädikativen Funktionen erster Ordnung sind, und deren Wert für das Argument $\phi\widehat{x}$ unterschieden werden. Da alle Aussagefunktionen erster Ordnung prädikativ sind, nimmt $\phi!\widehat{x}$ alle Funktionen erster Ordnung als Werte an. Wird das frühere Beispiel fortgesetzt, erhalten wir unter anderem die Matrizen zweiter Ordnung

$$\phi!(f_0(\widehat{x},\widehat{y})) \text{ und } \phi!(g_0(\widehat{x})).$$

Die Werte der Matriz $\phi!(g_0(\widehat{x}))$ sind beispielsweise

$$g_0 a,\ (x).g_0 x,\ (\exists x).g_0 x,\ f_0(a,b) \,.\!\vee\!.\, g_0 a, \text{ etc.}$$

Durch Quantifikation lassen sich aus $\phi!(g_0\widehat{x})$ Funktionen zweiter Ordnung wie

$$(\phi).\phi!(g_0 x),\ (\exists x).\phi!(g_0 x) \text{ und } (x).\phi!(g_0 x)$$

bzw. Aussagen zweiter Ordnung wie

$$(\phi).\phi!(g_0 a) \text{ und } (\exists x)(\phi).\phi!(g_0 x)$$

bilden. Nicht alle Funktionen zweiter Ordnung sind prädikativ. Beispielsweise hat $(\phi).\phi!(g_0(\widehat{x}))$ eine gebundene Variable erster Ordnung, aber nur eine freie Variable über Gegenstände und ist deshalb nicht prädikativ.

Wir kommen nun zur Bildung von Matrizen dritter Ordnung, die nebst den zwei vorhergehenden auch Variablen zweiter Ordnung beinhalten. Whitehead und Russell hätten eine Variable zweiter Ordnung ψ_2 einführen können, die *alle* Funktionen zweiter Ordnung als Werte annehmen kann, weil diese nicht das Prinzip des Circulus vitiosus verletzen würde (Potter, 2000, S. 142). Stattdessen wählen sie eine Variable, deren Bereich nur die prädikativen Funktionen umfaßt. $(x).\phi!(g_0 x)$ ist somit ein Wert der Matriz dritter Ordnung $\psi!(\phi!(g_0 x))$, $(\phi).\phi!(g_0 x)$ jedoch nicht.

Die Hierarchie kann durch sukzessives Fortsetzen der skizzierten Prozedur bis zur gewünschten Ordnung dargestellt werden. Allgemein gilt, daß der Bereich einer jeden Funktionenvariablen der Hierarchie auf die prädikativen Funktionen einer bestimmten Ordnung begrenzt ist. Russell verwarf also mit der Theorie der Typen seine frühere Auffasssung über die Variable. Die unbegrenzte Variable von *On Denoting* wurde mit einer ganzen Reihe von Variablen bzw. Matrizen ersetzt, die sich durch ihren Typ unterscheiden. Die Aussagefunktionen sind durch eine Typenhierarchie geschichtet. Für jeden Typ kann eine Variable eingeführt werden, die alle Funktionen dieses Typs annehmen kann. Variablen, deren Bereich sich über alle Typen erstreckt, sind des Paradoxes willen nicht zugelassen.

Dies wirft jedoch ein Problem auf. Wie ist es möglich, die Hierarchie darzustellen? Jeder Versuch einer Darstellung der Hierarchie muß notgedrungener Weise *alle* Typen beschreiben. Eben solch eine Verallgemeinerung wird jedoch durch die Typentheorie untersagt (Potter, 2000, S. 144). Whitehead und Russell umgingen das Problem, indem sie betonten, daß Aussagen, welche solch unzulässigen Variablen zu beinhalten scheinen, als typenmehrdeutig (*typical ambiguous*) zu verstehen sind. Jede der in der Aussage enthaltenen Variablen ist auf einen Typ beschränkt, *welcher* jedoch noch unbestimmt ist. Dementsprechend soll durch die Anführung einer typenmehrdeutigen Aussage jede Bestimmung, durch welche die Aussage bedeutend wird, verstanden werden. Beispiele solcher Aussagen werden unten gegeben.

4.4.2 Die Identität

Erstes Beispiel stellt die Definition der Identität dar. Wegen der Typentheorie wäre die Definition

$$x = y \,.\equiv_{Df}.\, (\phi).\phi x \equiv \phi y$$

aufgrund einer unbegrenzten Quantifikation über alle Funktionen unzulässig. Stattdessen wählen Whitehead und Russell die Definition

$$x = y \,.\equiv_{Df}.\, (\phi).\phi!x \equiv \phi!y,$$

d.h. Gegenstände sind gleich, falls sie in all ihren prädikativen Eigenschaften übereinstimmen. Diese Definition ist typenmehrdeutig, weil die Variablen x und y nicht unbedingt als Variablen über Individuen aufgefaßt werden sollen. Es ist zwar festgelegt, daß sie den gleichen Typ haben, aber *welcher* Typ dies ist bleibt unbestimmt. Aufgrund der Typenmehrdeutigkeit ist von relativen Typen die Rede: die Ordnung der prädikativen Funktionen der Definition ist eine Stufe höher als die Ordnung der Variablen x. Ein Nachteil der Definition ist, daß die Möglichkeit besteht, daß zwei Gegenstände infolge der Definition gleich sind, welche durch Eigenschaften höherer Ordnung unterschieden werden können, d.h. das Leibnizsche Gesetz

$$x = y \,.\supset.\, \phi x \equiv \phi y$$

kann durch die Definition nicht für willkürliche Aussagefunktionen $\phi\widehat{x}$ sondern nur für prädikative bewiesen werden. Wie Whitehead und Russell das Problem beheben wird später dargestellt. Im nächsten Abschnitt wird die Theorie der Klassen (*theory of classes*) behandelt.

4.4.3 Die Theorie der Klassen

Wie aus Russells Brief an Frege zu ersehen ist, war er 1902 der Überzeugung gewesen, daß nicht “jede definierbare Menge ein Ganzes bildet”, daß beispielsweise nicht jede Funktion einen Klassen-Term bestimmt. Im Jahre 1903 hatte er den Versuch unternommen, durch die Elimination aller Klassen-Terme eine Lösung des Paradoxes zu erhalten. Das Hineinfallen eines Gegenstandes in eine Klasse sei in Wahrheit nur ein anderer Ausdruck für eine Prädikation. Seine Idee war, daß ‘$x \in \widehat{y}\phi y$’, wobei ‘$\widehat{y}\phi y$’ die Klasse aller Gegenstände, die unter ϕ fallen, bezeichnet, einfach als ein anderer Ausdruck für ‘ϕx’ aufzufassen sei. Diese Art der Elimination der Klassen schien Russell das Paradox zu lösen, weshalb er an Frege schrieb, daß “die Klassen gänzlich überflüssig sind”(Frege, 1976, S. 241). Es stellte sich jedoch schnell heraus, daß Russells Paradox über Klassen zwar beseitigt, aber durch das entsprechende Paradox über Funktionen ersetzt worden war. Ist es zugelassen, eine Aussagefunktion f durch

$$f(\phi\widehat{x}) \,.=_{Df}.\, \sim\phi(\phi\widehat{x})$$

zu definieren, so folgt der Widerspruch $f(f\widehat{x}) \equiv \sim f(f\widehat{x})$. Das Problem war nicht, daß Russell Klassen eliminierte, sondern daß er sie einfach mit Funktionen ersetzte (Potter, 2000, S. 122).

Dieser Mangel wird in *Principia* behoben. Erstens wird die Konstruktion wie die des oberen funktionstheoretischen Widerspruchs verhindert: die Bildung von $\phi(\phi\hat{x})$ ist laut der Theorie der Typen logisch unzulässig. Zweitens wird die Lösung der klassentheoretischen Antinomien wie Russells Paradox auf den funktionstheoretischen Fall reduziert und somit durch die Typentheorie gelöst: Es wird in der Theorie der Klassen dargelegt, wie Ausdrücke über Klassen als Aussagen über Funktionen zu verstehen sind, d.h. wie Klassen als unvollständige Symbole aufzufassen sind. Konkreter gesprochen wird durch folgende Definition eine Methode angegeben, welche die Elimination der Klassen aus Kontexten wie '$f\{\hat{x}\phi x\}$' erlaubt:[9]

$$f\{\hat{x}\phi x\} :\equiv_{Df}: (\exists\psi) : \phi x \,.\equiv_x.\, \psi!x : f\{\psi!\hat{z}\},$$

d.h. $f\{\hat{x}\phi x\}$ bedeutet, daß f von einer prädikativen Funktion erfüllt wird,[10] welche mit $\phi\hat{x}$ umfangsgleich ist. Es ist wiederum zu bemerken, daß es Whitehead und Russell wegen der Theorie der Typen nicht offen stand ψ einfach als Aussagefunktion zu wählen, weil ψ dann eine unbegrenzte Variable darstellen würde. Darüber hinaus stellt die Definition ein zweites Beispiel einer typenmehrdeutigen Aussage dar. Die Variable x ist nicht unbedingt als Variable über Individuen aufzufassen, sondern es ist unbestimmt, über *welchen* Typ sie variiert. Folglich ist neben der Hierarchie der Aussagefunktionen auch von einer Hierarchie der Klassen die Rede. Jede Klasse enthält nur Elemente eines bestimmten Typs. Die folgenden Definitionen der leeren Klasse Λ bzw. der universellen Klasse V sind somit typenmehrdeutig aufzufassen:

$$\Lambda =_{Df} \hat{x}(x \neq x)$$
$$V =_{Df} \hat{x}(x = x).$$

4.4.4 Relationen und Beschreibungen

Nach den Klassen werden in *Principia* Relationen als unvollständige Symbole eingeführt. Entsprechend der dargelegten Einführung der Klassen durch Funktionen $\phi\hat{x}$ eines Arguments, definiert eine Funktion $\psi(\hat{x}, \hat{y})$ mit zwei Argumentstellen eine Relation $\hat{x}\hat{y}\{\psi(x, y)\}$, die als Klasse geordneter Paare (x, y) verstanden wird, welche die Funktion $\psi(\hat{x}, \hat{y})$ erfüllen. Allgemein wird eine Relation zwischen zwei Variablen durch die Form xRy abgekürzt.

Eine dritte Gruppe unvollständiger Symbole stellen Beschreibungen (*descriptions*) dar. Mit einer Beschreibung wird ein Ausdruck der Form 'der

[9] Durch die Klammern wird das Umklammerte als eine Ganzheit hervorgehoben. $\{\hat{x}\phi x\}$ bezeichnet also die *Klasse* aller x, für welche ϕx wahr ist.

[10] Eine Größe wie x erfüllt eine Aussagefunktion wie $\phi\hat{x}$, falls ϕx wahr ist.

Term x, welcher $\phi\hat{x}$ erfüllt' verstanden, wobei '$\phi\hat{x}$' eine Funktion darstellt, die von einem und nur einem Argument erfüllt wird. Wird 'der Term x, welcher $\phi\hat{x}$ erfüllt' mit '$(\imath x)(\phi x)$' bezeichnet läßt sich die kontextuelle Definition der Beschreibung durch

$$\psi(\imath x)(\phi x) \,.\!=_{Df}: (\exists b) : \phi x \,.\!\equiv_x .\, x = b : \psi b$$

wiedergeben. Beispiel einer besonders wichtigen Art der Beschreibung sind die deskriptiven Funktionen (*descriptive functions*), die sich aus Relationen ergeben, welche eine bestimmte Voraussetzung erfüllen: für jeden Wert y der Relation xRy muß es ein und nur ein x geben, das die Relation R zu y hat. Liegt eine solche Relation R vor, so kann der Ausdruck '$(\imath x)(xRy)$' gebildet werden, welcher y als Parameter hat und deshalb eine Funktion von y bedeutet. Diese Funktion ist keine Aussagefunktion, weil sie nicht Aussagen, sondern logische Größen eines bestimmten Typs als Werte hat.[11] In *Principia* wird '$(\imath x)(xRy)$' durch den Ausdruck '$R‘y$' abgekürzt, der als 'das R von y' zu lesen ist.

Gilt xRy, so wird x als ein Bezieher (*referent*) von y bezeichnet, und y als ein Relatum (*relatum*) von x. Die Relation der Klasse der Bezieher von y zu y wird mit $\overrightarrow{R}$ bezeichnet, d.h.

$$\overrightarrow{R} \,.\!=_{Df} .\, \hat{\alpha}\hat{y}\{\alpha = \hat{x}(xRy)\},$$

woraus gefolgert werden kann, daß $\overrightarrow{R}‘y = \hat{x}(xRy)$. Werden Bezieher durch Relata ersetzt, erhält man auf entsprechende Weise $\overleftarrow{R}$ und $\overleftarrow{R}‘x$. Der Bereich (*domain*) $\mathrm{D}‘R$ von R ist die Klasse aller Größen x, welche die Relation R zu mindestens einer Größe haben, und der umgekehrte Bereich (*converse domain*) $\mathrm{Ɑ}‘R$ die Klasse aller Größen y zu welchen mindestens eine Größe die Relation R hat, d.h.

$$\mathrm{D}‘R = \hat{x}\{(\exists y).xRy\} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Ɑ}‘R = \hat{y}\{(\exists x).xRy\}.$$

4.4.5 Die Definition der Zahlen

Peano und Frege folgend wird in *Principia* zwischen der Größe x und der Klasse, deren einziges Element x darstellt, unterschieden. Diese Einheitsklasse (*unit class*) wird mit '$\iota‘x$' bezeichnet. Mit Hilfe zweier unterschiedlicher Einheitsklassen $\iota‘x$ und $\iota‘y$ kann ein Klassenpaar (*cardinal couple*), eine Klasse zweier Elemente, als die Vereinigung $\iota‘x \cup \iota‘y$ definiert werden.

[11]Wieder ein Beispiel der Typenmehrdeutigkeit.

Die natürliche Zahl 0 wird als die Klasse aller leeren Klassen, 1 als die Klasse aller Einheitsklassen und 2 als die Klasse aller Klassenpaare definiert:

$$\begin{aligned} 0 &=_{Df} \iota`\Lambda \\ 1 &=_{Df} \widehat{\alpha}\{(\exists x).\alpha = \iota`x\} \\ 2 &=_{Df} \widehat{\alpha}\{(\exists x, y).x \neq y \,.\, \alpha = \iota`x \cup \iota`y\} \end{aligned}$$

Die allgemeine Definition der natürlichen Zahl geschieht mit Hilfe der Relation sm, welche sich wie folgt ausdrücken läßt: zwei Klassen α und β sind äquipotent oder ähnlich (*similar*), '$\alpha\ sm\ \beta$' bezeichnet, falls es eine 1-1-Relation gibt mit α als Bereich und β als umgekehrten Bereich. Die Definition der Anzahl $Nc`\alpha$ einer Klasse α läßt sich nun in Zeichen fassen. Wir definieren

$$Nc =_{Df} \quad \overrightarrow{sm} \quad \text{und} \quad NC =_{Df} \mathrm{D}`Nc,$$

so daß 'NC' die Klasse der natürlichen Zahlen bezeichnet. Folglich gilt

$$Nc`\alpha = \widehat{\beta}(\beta\ sm\ \alpha),$$

d.h. die Anzahl von α ist die Klasse aller Klassen, die α ähnlich sind.

An der Definition ist vor allem bemerkenswert, daß sie typenmehrdeutig ist. Eine Entfernung der Mehrdeutigkeit kann durch den Gebrauch eines Indizes erreicht werden. Somit wäre beispielsweise die Zahl 2_α die Klasse aller Klassenpaare des Typs α. Folglich drückt eine Ungleichung wie $4 < 5$ nicht eine einzelne Aussage aus, sondern stellt ein typenmehrdeutiges Schema aller Ungleichungen $4_\alpha < 5_\alpha$ dar. Daraus ergibt sich das Problem, daß ein Schema wie $4 < 5$ nicht notwendigerweise für alle Typen den gleichen Wahrheitswert zu haben braucht. Wird der Typ der Gegenstände mit (0), der Typ der Funktionen erster Ordnung mit (1) bezeichnet und beispielsweise angenommen, daß die Gesamtanzahl der Gegenstände 3 beträgt, so folgt die Gleichung $4_{(0)} = 5_{(0)}$, weil beide Klassen die leere Klasse darstellen. Mit Hilfe der 3 Gegenstände lassen sich jedoch $2^3 = 8$ Klassen (mit Elementen) des Typs (0) bilden (bzw. 8 Funktionen erster Ordnung), weshalb $4_{(1)} < 5_{(1)}$. Es gilt allgemein, daß die gewöhnlichen arithmetischen Aussagen alle ab einer gewissen Ordnung wahr sind, da ab einer gewissen Ordnung immer genügend Klassen vorhanden sind. Wie das Beispiel zeigt, brauchen die arithmetischen Aussagen jedoch nicht notwendigerweise für alle Typen wahr zu sein. Whitehead und Russell umgingen dieses Problem durch die Konvention, daß die Aussage einer Gleichung bzw. Ungleichung auf einem Niveau hinreichend hoher Ordnung zu interpretieren ist. Dadurch wird zwar für jedes bestimmte n die Ungleichung $n < n + 1$ sich als wahr ergeben, falls nur die Ordnung von n hinreichend hoch gewählt wird. Durch diese Konvention läßt sich aber nicht aussagen, daß $n < n+1$ für jede natürliche Zahl n gilt. Letzteres ergibt sich nur, wenn ein Typ vorhanden ist, der alle natürlichen Zahlen unterscheidet, d.h. unter welchen mehr als endlich viele Größen fallen. Diese Annahme taucht in *Principia* als das Unendlichkeitsaxiom (*axiom of infinity*) auf und wird als nicht-logische Prämisse zugelassen.

Kurz nach der Fertigstellung von *Principia* erklärte Russell ausdrücklich, daß das Unendlichkeitsaxiom für den Typ der Gegenstände als rein empirische Annahme aufzufassen ist, weil a priori die Möglichkeit bestehe, daß die Anzahl der Gegenstände im Universum endlich sei. Laut Russell sei aber die finite Hypothese viel komplizierter als das Unendlichkeitsaxiom, und zudem bestünden a priori überhaupt keine Gründe, statt dem Axiom die Hypothese anzunehmen.[12]

4.4.6 Das Axiom der Reduzierbarkeit

Um innerhalb der Theorie der Typen die Mathematik entwickelt zu können, war es nötig, daß eine Vielzahl der Aussagefunktionen $\phi\hat{x}$ eine Klasse $\hat{x}\phi x$ bestimmen. Wie aus dem Abschnitt 4.4.3 hervorging, wurde die Existenz einer Klasse $\hat{x}\phi x$ im System der *Prinicipia* nur garantiert, falls $\phi\hat{x}$ mit einer prädikativen Funktion $\psi\hat{x}$ umfangsgleich ist, d.h. falls

$$(\exists\psi).\ \phi x \equiv_x \psi!x. \tag{4.3}$$

Die Behauptung, daß jede Aussagefunktion $\phi\hat{x}$ eine Klasse bestimmt, läßt sich somit innerhalb der *Principia* durch den Satz ausdrücken, daß die (typenmehrdeutige) Gleichung 4.3 für willkürliche Funktionen gilt. Whitehead und Russell sahen sich gezwungen, diese Annahme als Axiom niederzulegen, um die Mathematik aus dem logischen System der *Principia* entwickeln zu können. Darüber hinaus war es der Existenz genügender Relationen willen nötig, ein entsprechendes Axiom für willkürliche Aussagefunktionen zweier Argumentstellen anzunehmen:

$$(\exists\psi).\ \phi(x,y) \equiv_{x,y} \psi!(x,y) \tag{4.4}$$

Whitehead und Russell bezeichneten diese Axiome als Axiom der Klassen (*axiom of classes*) bzw. Axiom der Relationen (*axiom of relations*). In der Regel machten sie jedoch von der Bezeichnung Axiom der Reduzierbarkeit (*axiom of reducibility*) gebrauch, um auf beide Axiome zu verweisen.

Einer der Vorteile des Axioms war, daß es anhand der Definition der Identität den Beweis des in Abschnitt 4.4.2 dargestellten Leibnizschen Gesetzes

[12] Siehe Russell (1983–, VI, S. 52).

zuließ. Der Beweis verläuft folgendermaßen: Für eine willkürliche Funktion $\phi\hat{x}$ existiert laut des Axioms der Reduzierbarkeit eine umfangsgleiche prädikative Funktion $\psi\hat{x}$. Sind x und y gleich, so erfüllen x und y laut der Definition die gleichen prädikativen Funktionen. Besonders gilt $\psi x \supset \psi y$ und folglich mit Hilfe des Axioms $\phi x \supset \phi y$, womit das Gesetz bewiesen ist. Darüber hinaus ist das Axiom nötig, um beispielsweise das Prinzip der mathematischen Induktion zu beweisen (Potter, 2000, S. 153). Whitehead und Russell rechtfertigen das Axiom folgendermaßen:

> "[...] it retains as much of classes as we have any use for, and little enough to avoid the contradictions which a less grudging admission of classes is apt to entail"(Whitehead und Russell, 1910–3, Bd. 1, S. 174).

Das Axiom ist somit zum Teil in pragmatischer Hinsicht begründet: das System der *Principia* scheint mit Hilfe des Axioms der Reduzierbarkeit zu funktionieren, d.h. die notwendigen Mittel für die Entwicklung der Mathematik aus der Logik zu ermöglichen und durch die Typentheorie die Herleitung der Antinomien zu blockieren. Diese Art der Begründung der Axiome hatte Russell seit 1907 verfechtet und als die regressive Methode (*regressive method*) bezeichnet. In bezug auf Axiome allgemein und dem Axiom der Reduzierbarkeit im besonderen erklärte er:

> "The reason for accepting an axiom, as for accepting any other proposition, is always largely inductive, namely that many propositions which are nearly indubitable can be deduced from it, and that no equally plausible way is known by which these propositions could be true if the axiom were false, and nothing which is probably false can be deduced from it [...] In the case of the axiom of reducibility, the inductive evidence in its favour is very strong, since the reasonings which it permits and the results to which it leads are all such as apppear valid"(Russell, 1973, S. 250–1).

Es gelten somit entsprechende Methoden in Physik und Logik. Die Physik behandelt induktiv die physikalischen und die Logik induktiv die logischen Züge der Welt. Während die Physik Phänomene wie die Planetbewegungen zu erklären sucht, widmet sich die Logik der Behandlung mathematischer Tatsachen wie den Aussagen der elementaren Arithmetik ($3 + 4 = 7$).

Die Annahme der regressiven Methode ist von Russell nicht als Verwerfung seines realistischen Logizismus gedacht, sondern eher als Versuch der Unterscheidung zwischen logischer und epistemologischer Ordnung. *Unsere*

Gründe für die Annahme der einzelnen Axiome sind zwar induktiv, die logischen Gesetze selbst aber immernoch als vom Menschen unabhängige Wahrheiten a priori aufzufassen. Der Unterschied zwischen Russells Auffassung in *Principles* und der durch die regressive Methode zum Ausdruck kommenden Ansicht besteht deshalb hauptsächlich in einem geschwächten Zutrauen in das Erkenntnisvermögen des Menschen. Letzteres läßt sich dadurch erklären, daß Russell in *Principia* sich genötigt sah, das Axiom der Reduzierbarkeit zuzulassen, welche nach eigenen Angaben nicht durch Selbstevidenz bzw. logische Wahrnehmung begründet werden kann (Potter, 2000, S. 157).

Teil II

Der *Tractatus* vor dem Hintergrund

Kapitel 5

Der Zweck des *Tractatus*

Nachdem Teile der Werke bzw. Schriften von Hertz, Boltzmann und Russell dargelegt worden sind, kommen wir zur Darstellung des *Tractatus*. Wie in der Einleitung erwähnt, ist es das Ziel dieser Arbeit, den Tractatus bezüglich der Philosophie und Mathematik als Ganzheit zu verstehen. Dieses Kapitel und die beiden nachfolgenden Kapitel sollen verdeutlichen, wie vor dem Hintergrund der beiden Physiker und des Engländers der *Tractatus* verstanden werden kann. In diesem Kapitel wird hauptsächlich dargestellt, welche Einsichten der Physiker Wittgenstein im *Tractatus* anwandte. Thema und Zweck des *Tractatus* bilden den Anfang der Darstellung. Diese bringt Wittgenstein in einer kurzen Passage des Vorwortes zum Ausdruck. Das Thema sind die philosophischen Probleme und der erklärte Zweck das Aufzeigen, daß diese aus dem Mißverständnis unserer Sprachlogik entspringen:

> "Das Buch behandelt die philosophischen Probleme und zeigt – wie ich glaube – daß die Fragestellung dieser Probleme auf dem Mißverständnis der Logik unserer Sprache beruht. Man könnte den ganzen Sinn des Buches etwa in die Worte fassen: Was sich überhaupt sagen läßt, läßt sich klar sagen; und wovon man nicht reden kann, darüber muß man schweigen"(*TLP*, S. 7).[1]

So beruht beispielsweise die Frage, wie Russells Paradox zu lösen sei, auf einem solchen Mißverständnis. Ein anderes Problem, welches aus einem Mißverständnis entspringt, ist die Frage nach der Anzahl existierender Gegenstände ('Wieviele Gegenstände gibt es?'). Diese beiden Fragen und andere philosophische Probleme, die laut Wittgenstein auf dem Mißverständnis unserer Sprachlogik beruhen, werden in den Kapiteln 6 und 7 dieser Arbeit erörtert. Folgend wird vom Zitat ausgehend der Einfluß Boltzmanns auf

[1] Die *Tractatus*-Ausgabe Wittgenstein (1996b) wird im folgenden durch *TLP* abgekürzt.

Wittgenstein erläutert, wonach eine entsprechende Darstellung in bezug auf Hertz gegeben wird.

Boltzmann hatte in seinem Vortrag *Über Statistische Mechanik* des Jahres 1904 die Beendigung der sinnlosen philosophischen Fragestellungen gefordert und es als eine Hauptaufgabe der Philosophie angesehen, die Unzweckmäßigkeit des über das Ziel Hinausschießens der Denkgewohnheiten, die in philosophischen Fragestellungen zum Ausdruck kommen, klar darzustellen. Die Philosophie wäre laut Boltzmann des Namens einer Königin der Wissenschaft würdig, falls es ihr gelingen würde, ein System zu schaffen, in dem die Nichtberechtigung der philosophischen Fragen klar hervorträte und dadurch der Drang, jene Fragen zu beantworten, allmählich erstürbe. Mit der Errichtung eines solchen Systems wäre eine Lösung der dunkelsten philosophischen Rätsel erreicht.

Wie aus dem Zitat hervorgeht, identifizierte Wittgenstein die Ursache für das Aufkommen philosophischer Fragestellungen nicht mit dem über das Ziel Hinausschießen der Denkgewohnheiten sondern mit dem Mißverständnis unserer Sprachlogik. Übte Wittgenstein zwar explizit Kritik an einer Auffassung wie der Boltzmanns, welche dem Darwinismus in der Philsophie eine Bedeutung zukommen läßt (*TLP* 4.1122), so teilte er andererseits mit dem Physiker die Überzeugung, daß keine Fragen existieren können, die außerhalb des menschlichen Erkenntnisvermögens liegen (*TLP* 6.5–6.51). Die meisten philosophischen Fragestellungen sind keine eigentlichen Probleme sondern *Scheinprobleme*, die nicht der Beantwortung sondern der Auflösung bedürfen:

> “Die meisten Sätze und Fragen, welche über philosophische Dinge geschrieben worden sind, sind nicht falsch, sondern unsinnig. Wir können daher Fragen dieser Art überhaupt nicht beantworten, sondern nur ihre Unsinnigkeit feststellen [...] Und es ist nicht verwunderlich, daß die tiefsten Probleme eigentlich *keine* Probleme sind”(*TLP* 4.003).

So ist Russells Paradox kein philosophisches Problem, welches beispielsweise mit Hilfe der Theorie der Typen gelöst werden kann, sondern ein Scheinproblem, dessen Unsinnigkeit festzustellen ist.[2] Und auch die Frage nach der Anzahl existierender Gegenstände ist laut Wittgenstein nicht – wie bei Russell durch das Unendlichkeitsaxiom (‘Es gibt unendlich viele Gegenstände’) – zu beantworten, sondern kann nur als unsinnig erkannt werden.[3]

Während laut Boltzmann einige unserer Denkgewohnheiten in einem solchen Grade zu unserer zweiten Natur geworden sind, daß der Drang zu ihrer

[2]Wittgensteins Kritik der Typentheorie Russells wird in Abschnitt 7.6 dargestellt.

[3]Siehe Abschnitt 4.4.5.

unzweckmäßigen Anwendung nahezu unüberwindlich scheint, schrieb Wittgenstein, daß die Umgangssprache ein Teil des menschlichen Organismus ist und nicht weniger kompliziert als dieser, weshalb es menschenunmöglich sei, die Sprachlogik aus ihr unmittelbar zu entnehmen (*TLP* 4.002). Trotz der damit verbundenen Schwierigkeiten sah Wittgenstein den *Tractatus* im Wesentlichen als Einlösung des von Boltzmann nachgefragten Systems:

> "Dagegen scheint mir die *Wahrheit* der hier mitgeteilten Gedanken unantastbar und definitiv. Ich bin also der Meinung, die Probleme im Wesentlichen endgültig gelöst zu haben"(*TLP*, S. 8).

Gegen diese Darstellung des Einflusses von Boltzmann auf Wittgenstein kann eingewendet werden, daß viele Gedanken des österreichischen Physikers Weiterentwicklungen der in der Einleitung der *Prinzipien der Mechanik* von Hertz ausgedrückten Auffassung sind. Solch einem Einwand kann folgendes entgegengebracht werden: Boltzmann ist deshalb von zentraler Wichtigkeit, weil er den Hertzschen Standpunkt in eine Art philosophisches Programm transformierte. Im Gegensatz zu Hertz, dessen Erörterungen sich hauptsächlich der Physik im allgemeinen und der Mechanik im besonderen widmen, diskutiert Boltzmann auch philosophische Fragestellungen allgemeinerer Natur. Die Bestrebung Boltzmanns, die Bild- bzw. Modellkonzeption von Maxwell und Hertz weiter zu fassen, kommt deutlich in den beiden folgenden Zitaten zum Ausdruck:

> "[...] und endlich generalisierte die Philosophie Maxwells Ideen bis zur Lehre, daß die Erkenntnis überhaupt nichts anderes sei, als die Auffindung von Analogien"(Boltzmann, 1925, S. 9).

> "On this view [Maxwell und Hertz] our thoughts stand to things in the same relation as models to the objects they represent. What resemblance [between thought and thing] there is lies principally in the nature of the connexion, the correlation being analogous to that which obtains between thought and language, language and writing, the notes on the stave and musical sounds, &c"(Boltzmann, S. 102).

Entsprechend ist im *Tractatus* zu lesen:

> "Die Grammophonplatte, der musikalische Gedanke, die Notenschrift, die Schallwellen, stehen alle in jener abbildenden, internen Beziehung zueinander, die zwischen Sprache und Welt besteht"(*TLP* 4.014).

Die wesentliche Übereinstimmung zwischen den beiden letzten Zitaten verdeutlicht den Boltzmannschen Einfluß auf seinen Landsmann. Wittgenstein faßte Sätze als Bilder bzw. Modelle der Wirklichkeit auf.[4] Diese Idee ist eine unmittelbare Weiterentwicklung der Auffassung Boltzmanns, daß die Erkenntnis immer mit Analogien wie beispielsweise mechanischen Modellen operiert. Seine Auffassung des Satzes als Bild der Wirklichkeit erläutert Wittgenstein durch eine Verstrickung des eben dargestellten Einflusses von Boltzmann mit Einsichten von Hertz und Russell.

Ein Satz scheint auf den ersten Blick kein Bild der Wirklichkeit, von der er handelt, zu sein. Dies gelte jedoch auch für die Notenschrift, welche auf den ersten Blick kein Bild der Symphonie zu sein scheint, und für unsere Buchstabenschrift, welche kein Bild unserer Lautsprache zu sein scheint. Doch beide Zeichensprachen erweisen sich im gewöhnlichen Sinne als Bilder dessen, was sie darstellen, weil "es eine allgemeine Regel gibt, durch die der Musiker aus der Partitur die Symphonie entnehmen kann, durch welche man aus der Linie auf der Grammophonplatte wieder die Partitur ableiten kann"(*TLP* 4.0141). Die innere Ähnlichkeit dieser scheinbar so ganz verschiedenen Gebilde besteht im Vorhandensein jener Regel, d.h. jenes Gesetzes der Projektion, welches die Symphonie in die Notenschrift projiziert bzw. jene Regel der Übersetzung der Notensprache in die Sprache der Grammophonplatte. Um das Wesen des Satzes zu verstehen, müsse man an die Hieroglyphenschrift denken, welche die Tatsachen, die sie beschreibt, abbildet. Aus ihr wurde, so Wittgenstein, die Buchstabenschrift, ohne das Wesentliche bzw. die Logik der Abbildung zu verlieren (*TLP* 4.016). Dies können wir daraus ersehen, daß wir den Sinn eines Satzes verstehen, obwohl er uns nicht erklärt wurde (*TLP* 4.02).

Weshalb der Satz auf den ersten Blick kein Bild der Wirklichkeit zu sein scheint, erörtert Wittgenstein mit Hilfe eines Themas, welches er in der Einleitung der *Prinzipien der Mechanik* vorfand. Hertz hatte den Unterschied zwischen seiner Mechanik und der Newtonschen durch ihre unterschiedlichen Zwecke charakterisiert. Erstere verhalte sich zu letzteren "wie die systematische Grammatik einer Sprache zur Grammatik, welche den Lernenden möglichst bald erlauben soll, sich über die Notwendigkeiten des täglichen Lebens zu verständigen"(Hertz, 1910, S. 47). Der Zweck seiner Mechanik war die übersichtliche Darstellung der logischen bzw. inneren Struktur, welche den verschiedenen Modellen der Mechanik ermöglicht, die gleichen Phänomene logisch zulässig und gleich richtig darzustellen. Entsprechend begründet Wittgenstein die Schwierigkeit die Sprachlogik bzw. Logik der Abbildung aus der Umgangssprache zu entnehmen:

[4]Siehe *TLP* 4.01. Wittgensteins Auffassung des Satzes als Bild wird in Kapitel 8 dargelegt.

> "Die Sprache verkleidet den Gedanken. Und zwar so, daß man nach der äußeren Form des Kleides, nicht auf die Form des bekleideten Gedankens schließen kann; weil die äußere Form des Kleides nach ganz anderen Zwecken gebildet ist als danach, die Form des Körpers erkennen zu lassen.
> Die stillschweigenden Abmachungen zum Verständnis der Umgangssprache sind enorm kompliziert"(*TLP* 4.002).

Trotz des Vermögens uns in unserer Sprache korrekt auszudrücken, ist unser Verständnis der logischen Struktur der Sprache oft blind, weil die Umgangssprache diese Struktur nicht vorzeigt bzw. offenbart, sondern verschleiert und dadurch jede Art der Illusion und Konfusion ermöglicht. Russells Verdienst ist laut Wittgenstein in dieser Hinsicht, mit seiner *Theory of Description* gezeigt zu haben, daß die scheinbar dargestellte logische Form des Satzes, d.h. seine grammatische Form, nicht seine wirkliche sein muß. Im *Tractatus* wird die Art und Weise, wie die grammatische Struktur und die gewöhnliche Ausdrucksweise die logische Struktur verbergen anhand von folgenden Beispielen vermittelt.

Einerseits kommt es in der Umgangssprache ungemein häufig vor, daß dasselbe Wort auf verschiedene Art und Weise bezeichnet. Das Wort 'ist' findet als drei logisch unterschiedliche Symbole seinen Gebrauch: Es erscheint als Kopula, als Gleichheitszeichen und als Ausdruck der Existenz. Andererseits werden zwei Wörter, welche auf verschiedene Art und Weise bezeichnen, äußerlich bzw. grammatisch in der gleichen Weise in Sätzen gebraucht, womit laut Wittgenstein eine nicht vorhandene Ähnlichkeit in der Bezeichnungsweise vorgetäuscht wird. Das Wort 'identisch' erscheint als Adjektiv, weshalb man den Fehler begehen kann, es als Eigenschaftswort aufzufassen. Wir gebrauchen ein und dasselbe Wort als variablen Namen ('Es liegt *etwas* auf dem Fußboden') und als variable Aussage ('Vorgestern geschah *etwas*'). Im Satze 'Grün ist grün', wo das erste Wort der Name einer Person, das letzte ein Eigenschaftswort ist, haben diese Worte nicht einfach verschiedene Bedeutung sondern sind logisch gesehen verschiedene Symbole (*TLP* 3.323).

Diese Kluft zwischen der grammatischen und der logischen Form ist laut Wittgenstein die Ursache für die Entstehung der fundamentalen Verwechslungen, welche die philosophischen *Scheinprobleme* und Konfusionen charakterisieren (*TLP* 3.324). Klarheit kann durch eine übersichtliche Zeichensprache erzielt werden, welche nicht den grammatischen sondern den logischen Regeln der Sprache folgt:

> "Um diesen Irrtümern zu entgehen, müssen wir eine Zeichensprache verwenden, welche sie ausschließt, indem sie nicht das gleiche

> Zeichen in verschiedenen Symbolen, und Zeichen, welche auf verschiedene Art bezeichnen, nicht äußerlich auf die gleiche Art verwendet. Eine Zeichensprache also, die der *logischen* Grammatik – der logischen Syntax – gehorcht"(*TLP* 3.325).

Solch eine Zeichensprache verhält sich zur Umgangssprache wie die Hertzsche Mechanik zur Newtonschen. Während die Umgangssprache zum Zwecke hat, den Menschen die Verständigung über die Notwendigkeiten des täglichen Lebens zu ermöglichen, ist in bezug auf die Zeichensprache von einer Zweckmäßigkeit die Rede, welche die logische Struktur bzw. Syntax der Sprache übersichtlich darzustellen und somit die erwähnten Verwechslungen bzw. Scheinprobleme auszuschließen sucht. Beispiele solcher Sprachen sind laut Wittgenstein die Begriffschriften Freges und Russells, die allerdings noch nicht alle Fehler vermeiden (*TLP* 3.325), d.h. die Grammatik bzw. Syntax dieser Begriffschriften folgt nicht immer der logischen Syntax unserer Sprache.[5]

Russell mißverstand diese Passage. Laut dem Engländer sei Wittgensteins Ziel mit dem *Tractatus* gewesen, die Bedingungen aufzustellen, welche eine logisch perfekte Sprache zu erfüllen habe (Wittgenstein, 1961, Intro., S. 8); die Bedingungen darzustellen, welche eine exakte Zeichensprache genügen muß. Im *Tractatus* werden jedoch die Bedingungen bestimmt, welche jede Sprache erfüllen muß, denn jede Sprache ist und muß logisch geordnet sein. Russell übersah Wittgensteins Erläuterungen in bezug auf die logische Zulässigkeit der gewöhnlichen Sprache: Mit den natürlichen Sprachen läßt sich jeder Sinn ausdrücken (*TLP* 4.002); "Alle Sätze unserer Umgangssprache sind, tatsächlich, so wie sie sind, logisch vollkommen geordnet"(*TLP* 5.5563). Wäre dies nicht der Fall, so könnte die Sprache die Wirklichkeit überhaupt nicht abbilden bzw. darstellen. Wie im Falle der Hertzschen Rekonstruktion der Mechanik so fügt eine Begriffschrift der Sprache nicht etwas neues hinzu sondern bringt die logische Struktur bzw. Form zum Vorschein, welche es der Sprache ermöglicht, die Wirklichkeit abzubilden.[6]

Hertz verglich die drei Darstellungen der Mechanik bezüglich ihrer logischen Zulässigkeit, Richtigkeit und Zweckmäßigkeit. Alle drei Darstellungen sind laut dem deutschen Physiker logisch zulässig und gleich richtig. Sein eigenes Bild der Mechanik ist jedoch zweckmäßiger als die beiden anderen.

[5] Mit dem Ausdruck 'Begriffschrift Russells' verweist Wittgenstein auf *Principia*. Einige der Fehler und Konfusionen, welche aus der Sicht Wittgensteins in Freges und Russells Systemen vorzufinden sind, werden in Kapitel 6 behandelt.

[6] Grund für dieses Mißverständnis Russells ist sein Glauben, daß Wittgensteins Auffassung der Logik (mehr oder weniger) seiner eigenen entspricht. Im Gegensatz zu Wittgenstein hat es laut Russell Sinn, nach der Zulässigkeit von Sprachen zu fragen. Russells und Wittgensteins unterschiedliche Auffassungen der Logik werden in Kapitel 7 dargelegt.

Eine zweckmäßige Darstellung erfüllt durch die Elimination leerer Beziehungen und der übersichtlichen Darlegung der eigenen inneren bzw. logischen Struktur eine therapeutische Funktion. Dem Geiste wird zu Bewußtsein geführt, was sich vor dem Hintergrund des Modells folgern und fragen läßt, weshalb der Geist aufhört, unberechtigte Fragen bzw. Scheinprobleme aufzuwerfen. Durch die Darstellung der Mechanik in *Prinzipien der Mechanik* erweist sich der Kraftbegriff aufgrund der möglichen Elimination als überflüssig, als leergehendes Nebenrad, weshalb der Geist aufhört, nach dem Wesen der Kraft zu fragen (Abschnitt 3.1).

Statt Darstellungen der Mechanik vergleicht Wittgenstein die Begriffschriften von Frege und Russell mit dem System des *Tractatus* bezüglich der Hertzschen Forderungen. Wie erwähnt ist aus der Sicht Wittgensteins jede Sprache logisch geordnet bzw. zulässig, d.h. jede mögliche Sprache erfüllt das Kritierium der logischen Zulässigkeit. Dies ist im Wesen des Satzes begründet. Damit der Satz überhaupt ein Bild der Sachlage sein kann, muß etwas in Bild und Abgebildetem identisch sein. Das Bild kann beispielsweise jede Wirklichkeit abbilden, deren Form es hat: Das räumliche Bild alles Räumliche, das farbige alles Farbige, etc. (*TLP* 2.171). Bild und Abgebildetes müssen nicht unbedingt von gleicher Form sein. Sie müssen aber die logische Form gemeinsam haben:

> "Was jedes Bild, welcher Form immer, mit der Wirklichkeit gemein haben muß, um sie überhaupt – richtig oder falsch – abbilden zu können, ist die logische Form, das ist, die Form der Wirklichkeit"(*TLP* 2.18).

> "Ist die Form der Abbildung die logische Form, so heißt das Bild das logische Bild"(*TLP* 2.181).

Die Notenschrift ist z.B. das logische Bild der Symphonie.[7] Wie aus dem Zitat zu ersehen ist, folgt Wittgenstein Hertz und nicht Boltzmann bezüglich der Frage, ob die Forderung nach logischer Zulässigkeit oder die Forderung nach Richtigkeit den höheren Stellenwert hat: Das Bild muß ein *logisches* Bild sein, um überhaupt *richtig* oder falsch abbilden zu können. Hertz sprach in Verbindung mit der Zulässigkeit über a priori Denkgesetze im Kantschen Sinne. Boltzmann übte vor dem Hintergrund der Darwinschen Entwicklungslehre Kritik an der Hertzschen Auffassung. Denkgesetze sind laut dem österreichischen Physiker nicht a priori, sondern sie sind Denkgewohnheiten, die als Resultat adaptiven Verhaltens verstanden werden können. Wandte Wittgenstein sich gegen Boltzmanns Darwinismus, so bezog er nicht explizit zur

[7] Siehe Kapitel 8 für eine detailliertere Erörterung bezüglich Wittgensteins Auffassung des Satzes als Bild.

Hertzschen Auffassung Stellung. Es ist jedoch möglich vor dem Hintergrund der bisherigen Darstellung, Wittgensteins Standpunkt gegenüber Hertz zu formulieren: Der *Tractatus* kann als Auflösung einer Spannung im Hertzschen Denken bezüglich dem Kriterium der logischen Zulässigkeit aufgefaßt werden. Hertz hatte gezögert, ehe er in der Einleitung der *Prinzipien der Mechanik* konkludierte, daß die Newtonsche Mechanik nicht unzulässig sein kann. Wittgenstein knüpfte an diese Konklusion von Hertz an: Es ist laut der Auffassung des Österreichers unmöglich, daß eine Darstellung der Logik widerspricht. In dieser Hinsicht entspricht die Logik der Geometrie:

> “Etwas »der Logik Widersprechendes« in der Sprache darstellen, kann man ebensowenig, wie in der Geometrie eine den Gesetzen des Raumes widersprechende Figur durch ihre Koordinaten darstellen; oder die Koordinaten eines Punktes angeben, welcher nicht existiert”(*TLP* 3.032).

Wie bei Hertz ist die Logik laut Wittgenstein a priori, vor jeder Erfahrung, d.h. kann nicht auf Richtigkeit überprüft werden, sondern muß für sich selber sorgen (*TLP* 5.473). Die Logik ist vor jeder Erfahrung, daß etwas *so* ist. Sie ist vor dem *Wie*, d.h. vor dem, was unrichtig bzw. anders sein kann. Anstelle von Denkgesetzen a priori spricht Wittgenstein von der Unmöglichkeit, unlogisch zu denken (*TLP* 5.4731). Jeder Gedanke ist logisch artikuliert, weshalb nicht unlogisch gedacht werden kann.

Die Begriffschriften, durch welche die Logik der Sprache übersichtlich zum Vorschein gebracht werden soll, werden also im *Tractatus* weder in bezug auf Zulässigkeit noch auf Richtigkeit sondern auf Zweckmäßigkeit verglichen: Der Satz muß die gleiche logische Mannigfaltigkeit wie die Sachlage besitzen, um der Forderung nach Zweckmäßigkeit zu genügen:

> “Am Satz muß gerade soviel zu unterscheiden sein, als an der Sachlage die er darstellt. Die beiden müssen die gleiche logische (mathematische) Mannigfaltigkeit besitzen. (Vergleiche Hertz's Mechanik, über Dynamische Modelle.)”(*TLP* 4.04).

Was an der dargestellten Sachlage zu unterscheiden ist, muß auch am Satz zu unterscheiden sein: Sachlage und Satz müssen die gleiche Deutlichkeit besitzen. Es soll jedoch am Satz nicht mehr zu unterscheiden sein als an der Sachlage: Sachlage und Satz müssen die gleiche Einfachheit besitzen. Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so besitzen die beiden die gleiche logische Mannigfaltigkeit bzw. erfüllt der Satz die Forderung der Zweckmäßigkeit.

Ein konkretes Beispiel für die Anwendung der Forderung nach Zweckmäßigkeit stellt die Diskussion der Frege-Russell-Bezeichnungsweise ‘$(x)fx$’ für die Allgemeinheit dar:[8]

> "Wollten wir z.B. das, was wir durch »(x)fx« ausdrücken, durch Vorsetzen eines Indexes vor »fx« ausdrücken – etwa so: »Alg.fx«, es würde nicht genügen – wir wüßten nicht, was verallgemeinert wurde. Wollten wir es durch einen Index »α« anzeigen – etwa so: »f(xα)« – es würde auch nicht genügen – wir wüßten nicht den Bereich der Allgemeinheitsbezeichnung [...] diese Bezeichnungsweisen genügen nicht, weil sie nicht die notwendige mathematische Mannigfaltigkeit haben"(*TLP* 4.0411).

Würden wir anstelle von '$(x)fx$' die Bezeichnungsweise '$Alg.fx$' verwenden, wüßten wir nicht, ob über x, f oder beide verallgemeinert wird. Diese drei Fälle können anhand der Notationsweise von Frege und Russell durch '$(x)fx$', '$(f)fx$' und '$(x)(f)fx$' unterschieden werden. Die zweite Alternative versucht diesen Mangel zu beheben, indem das Zeichen für die Allgemeinheit direkt an die Variable gebunden wird. Dadurch ist jedoch wiederum nicht der Bereich der Allgemeinheitsbezeichnung eindeutig festgesetzt. Beispielsweise bezeichnet '$F(x\alpha) \vee H(x\alpha)$' entweder '$(x)Fx \vee (x)Hx$' oder '$(x)(Fx \vee Hx)$'. Die Notationsweise von Frege und Russell ist also die zweckmäßigste unter den drei Bezeichnungsweisen.

In diesem Kapitel wurde erörert, wie der Zweck des *Tractatus* – das Aufzeigen, daß philosophische Fragestellungen auf dem Mißverständnis der Logik unserer Sprache beruhen – vor dem Hintergrund der Schriften von Boltzmann und Hertz zu verstehen ist. Im folgenden Kapitel werden einige der Konfusionen und Verwechslungen bezüglich unserer Sprachlogik, welche vom Standpunkt Wittgensteins in den Begriffschriften von Frege und Russell vorzufinden sind und zu unsinnigen Scheinproblemen Anlaß geben, dargelegt und diskutiert.

[8] Frege bezeichnet zwar '$(a)fa$' mit '$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\,f\mathfrak{a}$' und '$(\exists a)fa$' mit '$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\,f\mathfrak{a}$' (Frege, 1879, S. 19 & 23). Die unterschiedliche Typographie ist jedoch vom Standpunkt der Logik irrelevant, weil Freges und Russells Schreibweisen die gleiche logische Mannigfaltigkeit besitzen (siehe folgendes Zitat). Dies sieht man beispielsweise daran, daß man Freges Notationsweise in die Russellsche übersetzen kann. Somit wäre erklärt, weshalb Wittgenstein nicht unterscheidet.

Kapitel 6

Verwechslungen bei Frege und Russell

Die Begriffschriften Freges und Russells gehorchen laut Wittgenstein nicht überall der logischen Syntax unserer Sprache, weshalb diese Schriften zum Teil die Bildung unsinniger Scheinsätze zulassen. So erlaubt beispielsweise Freges *Grundgesetze* die Bildung von '$\phi(\phi\widehat{x})$'. Die Möglichkeit der Bildung eines solchen Scheinsatzes ist dabei nicht auf die Unzulässigkeit sondern auf die Unzweckmäßigkeit der Begriffschriften bzw. unserer Umgangssprache zurückzuführen (Kapitel 5); d.h. weder Umgangssprache noch die Begriffschriften Freges und Russells erfüllen laut Wittgenstein auf zufriedenstellende Art und Weise die Forderung der Zweckmäßigkeit.[1] Aufgrund der Unzweckmäßigkeiten unserer Umgangssprache mißverstehen wir leicht die Logik unserer Sprache, wodurch die fundamentalsten Verwechslungen entstehen, welche die ganze Philosophie charakterisiert (*TLP* 3.324). Eine sehr verbreitete Verwechslung bei den Philosophen, die auch Frege und Russell begehen und welche im folgenden Abschnitt erläutert wird, ist die Verwechslung zwischen den internen Eigenschaften und Relationen und den eigentlichen (externen) Eigenschaften und Relationen (*TLP* 4.122).

[1] Beispielsweise hat die Frege-Russell-Notation für die Allgemeinheit letzten Endes nicht die rechte Mannigfaltigkeit (*TLP* 5.521). Die *Tractatus*-Notation behebt laut Wittgenstein den Mangel und ist somit zweckmäßiger. Siehe Kremer (1992) für eine Diskussion der Kritik Wittgensteins an Frege und Russell, die allerdings nicht den Hertzschen Einfluß berücksichtigt.

6.1 Eigentliche bzw. interne Eigenschaften und Relationen

Eine Eigenschaft ist laut Wittgenstein eigentlich, falls es denkbar ist, daß ihr Gegenstand sie nicht besitzt. Ein Beispiel wäre die Eigenschaft eines Gegenstandes, weiß zu sein: Wir können uns den Gegenstand in einer anderen Farbe denken. Eigentliche Eigenschaften können somit einem Gegenstand zu- oder abgesprochen werden. Sie werden sprachlich durch Begriffe ausgedrückt, welche in der Begriffschrift durch Aussagefunktionen bezeichnet werden. So wird der Begriff 'weiß' durch die Funktion 'x ist weiß' ('Wx') dargestellt. Bezeichnet man den Stein mit 'a', so wird dem Stein die Eigenschaft durch den Satz 'Wa' zugesprochen und durch '$\sim Wa$' abgesprochen. Bezüglich Wittgensteins Erläuterung der eigentlichen Eigenschaften ist vor allem hervorzuheben, daß seine Auffassung des Denkens nicht zum Ziele hat, die eigentlichen Eigenschaften mit der Psychologie in Verbindung zu bringen. Ganz im Gegenteil: Es ist nicht Sache der Psychologie sondern der Logik, ob eine Eigenschaft eigentlich ist: Der Gedanke ist ein *logisches* Bild der dargestellten Sachlage (*TLP* 2.181), d.h. der Gedanke drückt einen Sinn aus, stellt einen *möglichen* Sachverhalt dar. So drücken beispielsweise die Sätze 'Wa' und '$\sim Wa$' beide einen Sinn aus, stellen einen möglichen Sachverhalt dar.

Eine Eigenschaft bzw. Relation ist intern, falls es undenkbar ist, daß ihr Gegenstand sie nicht besitzt. Beispiel einer internen Relation wäre der Abstand zwischen zwei Punkten des Euklidischen Raumes. Der Abstand zwischen den Punkten $(0,0)$ und $(3,4)$ der Euklidischen Ebene beträgt beispielsweise $\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$. Dieser Abstand kann nicht anders gedacht werden, weil er nicht zufällig sondern wesentlich mit den beiden Punkten zusammenhängt: Durch die Koordinaten der Punkte läßt sich der Abstand *berechnen.*[2]

Während ein Punkt einen geometrischen Ort angibt, bestimmt ein Satz laut Wittgenstein einen logischen Ort bzw. eine Sachlage im *logischen Raum.*[3] Wie im Falle des Beispiels aus der Geometrie so beziehen sich infolge Wittgenstein zwei logische Orte auf bestimmte interne Arten und Weisen zueinander.

---

[2]Das Bestehen nicht-Euklidischer Geometrie zeigt *nicht*, daß das Beispiel verfehlt ist: "Jedes Ding ist, gleichsam, in einem Raume möglicher Sachverhalte. Diesen Raum kann ich mir leer denken, nicht aber das Ding ohne den Raum"(*TLP* 2.013). Die Punkte machen im Beispiel die Dinge aus, d.h. können nicht unabhängig eines Raumes (einer bestimmten Krümmung) gedacht werden. In unserem Beispiel ist von Punkten der Euklidischen Ebene die Rede.

[3]Was Wittgenstein unter dem Begriff des logischen Raumes versteht wird in Kapitel 8 dargelegt.

So bestimmen diese und jene blaue Farbe beide einen logischen Ort im Farbenraum, weshalb bestimmte interne Relationen zwischen ihnen bestehen:

> "Diese blaue Farbe und jene stehen in der internen Relation von heller und dunkler eo ipso. Es ist undenkbar, daß *diese* beiden Gegenstände nicht in dieser Relation stünden"(*TLP* 4.123).

Das Bestehen solcher internen Eigenschaften und Relationen kann laut Wittgenstein nicht wie die eigentlichen durch Sätze behauptet werden, weil es ebenso unsinnig wäre einer Sachlage eine interne Eigenschaft abzusprechen, als sie der Sachlage zuzusprechen. So wird durch den Ausdruck "Diese blaue und jene stehen in der internen Relation von heller und dunkler eo ipso" kein Sinn ausgedrückt bzw. keine Sachlage dargestellt, weil es nicht möglich ist, daß die beiden blauen Farben nicht *so* zusammenhängen. Statt durch einen Satz drückt sich das Bestehen einer internen Eigenschaft einer Sachlage durch eine interne Eigenschaft des Satzes aus, welcher die Sachlage darstellt.

Das logische Folgern illustriert den Standpunkt Wittgensteins. Wird die Aussage 'Der Stein ist weiß' bzw. 'Der Stein ist nicht rot' mit 'p' bzw. 'q' bezeichnet gilt '$p \supset q$'. Ist 'p' wahr und gilt somit '$p \supset q \,.\, p$', so kann laut Frege und Russell auf der Grundlage eines Schlußgesetzes, dem *Modus Ponendo Ponens*, die Aussage 'q' gefolgert werden. Es besteht zwischen '$p \supset q \,.\, p$' und 'q' eine *externe* Beziehung: 'q' läßt sich anhand des Schlußgesetzes aus '$p \supset q \,.\, p$' *folgern.* Infolge Frege und Russell werden alle logischen Folgerungen auf der Grundlage von Schlußgesetzen gezogen.

Schlußgesetze sind laut Wittgenstein überflüssig, weil logische Folgerungen nicht externe sondern interne Relationen ausdrücken. Die Schlußgesetze erfüllen keinen Zweck, d.h. sind *leergehende Nebenräder* bzw. unzweckmäßig und sollten deshalb eliminiert werden:

> "Folgt p aus q, so kann ich von q auf p schließen; p aus q folgern. Die Art des Schlusses ist allein aus den beiden Sätzen zu entnehmen. Nur sie selbst können den Schluß rechtfertigen. »Schlußgesetze«, welche – wie bei Frege und Russell – die Schlüsse rechtfertigen sollen, sind sinnlos, und wären überflüssig"(*TLP* 5.132).

Interne Eigenschaften (Relationen) sind Eigenschaften (Relationen) der Struktur. So ist aus der Struktur bzw. Form von '$p \supset q \,.\, p$' zu ersehen, welche Sätze sich aus dem Satz folgern lassen: '$p \supset q \,.\, p$' ist auf eine bestimmte Art und Weise aus den Sätzen 'p' und 'q' zusammengesetzt; sein Sinn ist eine Funktion des Sinnes von 'p' und 'q'. '$p \supset q \,.\, p$' verstehen heißt den Sinn von 'p' und 'q' verstehen und wissen, welche Funktion von 'p' und 'q' der Satz ist.

Dadurch weiß man auch, welche Sätze sich aus '$p \supset q \, . \, p$' folgern lassen und welche nicht. So läßt sich beispielsweise 'p' aus '$p \supset q \, . \, p$' folgern, weil der Sinn von 'p' im Sinn von '$p \supset q \, . \, p$' enthalten ist, d.h. es besteht eine interne Relation zwischen 'p' und '$p \supset q \, . \, p$'.

In unserem Beispiel bezeichnen 'p' und 'q' bestimmte Sätze. In den obigen Ausführungen spielt es jedoch keine Rolle, welche Sätze 'p' und 'q' bezeichnen sondern nur, *daß* sie Sätze bezeichnen. Für die obigen Überlegungen ist nur die Art und Weise relevant, wie '$p \supset q \, . \, p$' aus 'p' und 'q' gebildet ist. Nur die logische Form von '$p \supset q \, . \, p$' im Verhältnis zu 'p' und 'q' ist wichtig, weshalb Wittgenstein interne Eigenschaften (Relationen) auch als formale Eigenschaften (Relationen) bezeichnet.

In dem Sinne, in welchem wir von formalen Eigenschaften sprechen, können wir laut Wittgenstein auch von formalen Begriffen reden. Diese werden jedoch nicht wie die eigentlichen Begriffe durch Funktionen bezeichnet, welches Frege und Russell übersehen haben:

> "Daß etwas unter einen formalen Begriff als dessen Gegenstand fällt, kann nicht durch einen Satz ausgedrückt werden. Sondern es zeigt sich an dem Zeichen dieses Gegenstandes selbst. (Der Name zeigt, daß er einen Gegenstand bezeichnet, das Zahlzeichen, daß es eine Zahl bezeichnet etc.) Die formalen Begriffe können ja nicht, wie die eigentlichen Begriffe, durch eine Funktion dargestellt werden. Denn ihre Merkmale, die formalen Eigenschaften, werden nicht durch Funktionen ausgedrückt. Der Ausdruck des formalen Begriffes also, ein Zug gewisser Symbole. Das Zeichen der Merkmale eines formalen Begriffs ist also ein charakteristischer Zug aller Symbole, deren Bedeutung unter den Begriff fallen. Der Ausdruck des formalen Begriffes also, eine Satzvariable, in welcher nur dieser charakteristische Zug konstant ist"(*TLP* 4.126).

Ein formaler Begriff wird nicht durch eine Funktion sondern durch eine Satzvariable bzw. eine logische Form bezeichnet. Die Werte der Satzvariablen sind die Gegenstände, die unter den formalen Begriff fallen. Der Begriff 'Gegenstand' ist beispielsweise kein eigentlicher sondern ein formaler Begriff. Wo immer das Wort Gegenstand richtig gebraucht wird, wird es in der Begriffschrift durch den variablen Namen x bezeichnet. So wird 'es gibt 2 Gegenstände, welche . . . ' durch '$(\exists x, y) \ldots$' bezeichnet. Wird es dagegen als eigentliches Begriffswort gebraucht, entstehen laut Wittgenstein unsinnige Scheinsätze:

> "So kann man z.B. nicht sagen »Es gibt Gegenstände«, wie man

> etwa sagt »Es gibt Bücher«. Und ebenso wenig »Es gibt 100 Gegenstände«, oder »Es gibt x Gegenstände«"(*TLP* 4.1272).

Diese Sätze haben keinen Sinn, weil wir das Wort Gegenstand in unserer Sprache nicht als eigentliches Begriffswort gebrauchen sondern als variablen Namen. Wir haben dem Wort als Begriffswort keinen Sinn gegeben, weshalb die Sätze unsinnig sind. Dasselbe gilt laut Wittgenstein von den Worten Komplex, Tatsache, Funktion, Zahl, etc.. Diese Wörter bezeichnen formale Begriffe, d.h. werden in der Begriffschrift durch Variablen und nicht, wie Frege und Russell glaubten, durch Funktionen oder Klassen dargestellt (*TLP* 4.1272), weshalb Ausdrücke wie '1 ist eine Zahl' und 'es gibt nur ein 1' unsinnig sind. Die Verwechslung von internen mit externen Eigenschaften (Relationen) kommt bei Frege und Russell dadurch zum Ausdruck, daß sie die oberen Scheinsätze als eigentliche, sinnvolle Sätze verstehen. Solch Scheinsätze bzw. -fragen sind jedoch unklarer Weise "von der Art der Frage, ob das Gute mehr oder weniger identisch sei als das Schöne"(*TLP* 4.003). Im *Tractatus* wird diese Unzweckmäßigkeit der Begriffschriften von Frege und Russell behoben und somit die Bildung der laut Wittgenstein unsinnigen Scheinsätze vermieden.

6.2 Das Wesen des Satzes

Zwischen Satz und Name besteht eine andere Distinktion, welche laut Wittgenstein durch die gewöhnliche Ausdrucksform der Schrift oder des Drucks verschleiert wird, weshalb Frege den Unterschied übersehen konnte:

> "Denn im gedruckten Satz z.B. sieht das Satzzeichen nicht wesentlich verschieden aus vom Wort. (So war es möglich, daß Frege den Satz einen zusammengesetzten Namen nannte.)"(*TLP* 3.143).

Frege faßte Sätze als komplexe Namen der Wahrheitswerte auf, welche er als logische Gegenstände (*das Wahre* und *das Falsche*) verstand. Der Satz 'Ludwig Wittgenstein starb am 29. April 1951' ist wahr und somit infolge Frege ein Name für den Wahrheitswert *das Wahre*. Der Satz 'Ludwig Wittgenstein war Deutscher' ist falsch, d.h. ein Name für *das Falsche*. Freges Auffassung des Satzes ist laut Wittgenstein verwirrt. Satz und Name sind wesentlich verschieden. Sie erfüllen in unserer Sprache logisch unterschiedliche Funktionen: Der Satz ist ein Bild der Wirklichkeit. Durch den Satz wird ein Sinn ausgedrückt, eine Sachlage *dargestellt* (*TLP* 4.031). Die Wirklichkeit wird durch den Satz richtig oder falsch dargestellt, auf ja oder nein fixiert. Der Satz zeigt, wie es sich verhält, wenn er wahr ist, weshalb Wittgenstein

Sätze mit Pfeilen vergleicht. Namen dagegen gleichen nicht Pfeilen sondern Punkten. Sie können nicht mit der Wirklichkeit verglichen werden. Sie stellen nichts dar sondern *vertreten* im Satz die Gegenstände der abgebildeten Sachlage. Sätze haben Sinn, Namen Bedeutung.

Russell hat infolge Wittgenstein einen besseren Blick für das Wesen des Satzes. Der Unterschied zwischen Frege und Russell zeigt sich bezüglich der Analyse von Sätzen, die eine bestimmte Beschreibung (*definite description*) enthalten.[4] Die Art und Weise, wie Russell in seiner *Theory of Description* Sätze mit bestimmten Beschreibungen analysiert, ist gewissermaßen der Vorgehensweise von Frege entgegengesetzt. Die bestimmte Beschreibung wird von Frege als komplexer Name eines Gegenstandes aufgefaßt, d.h. die bestimmte Beschreibung tritt beispielsweise im analysierten Satz als Argument eines Prädikats erster Ordnung auf. Die Analyse der Aussage 'Die jetzige Königin Dänemarks ist Raucherin' ist einfach 'Ra', wobei 'Rx' das Prädikat 'x ist Raucherin' bezeichnet und 'a' die jetzige Königin Dänemarks, Königin Margrethe bedeutet. Die Wahrheit oder Falschheit des Satzes ist also davon abhängig, was über die Bedeutung der Beschreibung gilt, was über die Bedeutung ausgesagt werden kann (raucht Königin Margrethe, so ist der Satz 'Ra' wahr). Infolge dieser Analyse ist es unzulässig, Sätzen mit leeren bestimmten Beschreibungen, d.h. Beschreibungen die nichts bedeuten, einen Wahrheitswert zuzusprechen. Somit hätte der Ausdruck 'Der jetzige König Frankreichs ist glatzköpfig' keinen Wahrheitswert, obwohl er die logische Form mit der Aussage 'Die jetzige Königin Dänemarks ist Raucherin' gemein hat. (Es stünde Frege noch offen zu sagen, daß die Beschreibung keine Person sondern einen Begriff bedeutet. Dies ist Russells Position in *Principles*, siehe Abschnitt 4.3.)

Russells Verfahren in *On Denoting* bewegt sich in entgegengesetzter Richtung. Statt vor dem Hintergrund einer Analyse des Satzes zum Schluß zu gelangen, daß der Satz keinen Wahrheitswert haben kann, falls er eine leere Beschreibung enthält, geht Russell vom Wahrheitswert aus, welchen der Satz unter den jeweiligen Bedingungen hat, und endet mit einem Satz, in welchem die bestimmte Beschreibung weganalysiert ist, d.h. die Beschreibung nimmt nicht mehr die Rolle eines Arguments ein, bezeichnet nicht mehr eine Bedeutung, von deren Eigenschaften es abhängt, ob dem Satz ein Wahrheitswert ab- oder zugesprochen wird. Russell analysiert den Satz 'Der jetzige König Frankreichs ist glatzköpfig' als '$(\exists x) : Fx \,.\, Gx \,.\, (y) : Fy \,.\supset .\, y = x$'. Dieser Satz ist falsch, weil keine Person das Prädikat Fx ('x ist jetziger König Frankreichs') erfüllt.

[4]Die folgende Ausführung stützt sich auf Diamond (1991d, S. 186–191).

Die Art und Weise, wie Wittgenstein Russells Analyse versteht, kann folgendermaßen charakterisiert werden: Ob ein Satz einen Wahrheitswert hat, kann nicht von der Erfüllung einer bestimmten Beschreibung abhängen. Die Funktionsweise eines Satzes ist von der eines komplexen Namens zu unterscheiden. Das Vermögen des Satzes auszudrücken, was wahr oder falsch ist, wird von Russell anders behandelt als das Vermögen eines komplexen Namens, etwas zu bedeuten: Ersteres ist von der Erfüllung einer enthaltenen bestimmten Beschreibung unabhängig. Russells Analyse befähigt uns, etwas vom Wesen des Satzes zu verstehen. Es wird uns näher gebracht, welche Art Zeichen ein Satz ist: Die Analyse der Sätze wie 'Der jetzige König Frankreichs ist glatzköpfig' läßt uns folgendes sehen: Der analysierte Satz hat einen Wahrheitswert unabhängig von der Wahr- oder Falschheit der Sätze 'Es gibt einen jetzigen König Frankreichs' ($(\exists x).Fx$) und 'Es gibt nur einen jetzigen König Frankreichs' ($(\exists x) . Fx . (y).Fy \supset x = y$). Außerdem wird die wahre Funktionsweise des ursprünglichen Satzes geklärt: Welches Zeichen der ursprüngliche Satz ist – welche Funktion welcher Bestandteile – kann nicht vom Vermögen unabhängig von der Wahr- oder Falschheit der beiden oberen Sätze einen Wahrheitswert zu haben getrennt werden.

Die Analyse bringt uns somit etwas über das Wesen des Satzes näher: Ein Satz ist eine Art Zeichen, das nicht ohne das Vermögen unabhängig von der Wahr- oder Falschheit von Sätzen eines bestimmten Bereiches wahrheitswertig zu sein, gedacht werden kann. Beispielsweise ist laut Frege die Wahrheitswertigkeit des Satzes 'Der jetzige König Frankreichs ist glatzköpfig' von der Wahrheit des Satzes 'Es gibt einen König Frankreichs', d.h. von der Existenz einer Bedeutung abhängig. Im Gegensatz zu Frege zeigt uns Russell, wie dieses Vermögen unabhängig von der Wahrheit des letzteren Satzes zu verstehen ist. Wir würden laut Wittgenstein völlig geklärt haben, welcher Satz ein Satz ist, was seine Funktionalität ist, wenn es gelingen würde, den Satz so zu analysieren bzw. darzustellen, daß die Unabhängigkeit seiner Wahrheitswertigkeit von der Wahr- oder Falschheit aller Sätze zu erkennen wäre. Durch solch eine Analyse wäre das Wesen des Satzes geklärt. Wittgenstein ist der Überzeugung, im *Tractatus* diese Klärung des Satz-Wesens durchgeführt zu haben. Wie er das Wesen des Satzes klar werden läßt, ist in diesem Zusammenhang unwichtig und wird erst später dargelegt (Kapitel 10). Von Interesse ist hier nur, was die Unabhängigkeit der Wahrheitswertigkeit des Satzes zeigt: Das Vermögen des Satzes, einen Wahrheitswert zu haben, ist nicht extern bestimmt, ist von der Wahrheit anderer Sätze unabhängig. Im besonderen hängt es von der Existenz einer Bedeutung nicht ab. Im allgmeinen ist es von dem Sosein der Welt unabhängig. Dem Satz kann weder die Wahrheitswertigkeit ab- noch zugesprochen werden, d.h. die Wahrheitswertigkeit des Satzes ist eine interne Eigenschaft. Das Vermögen des Satzes zu zeigen, wie es sich verhält, wenn er wahr ist, einen Sinn auszudrücken, ist dem Satz wesentlich. Es ist dem Satz wesentlich, ein Bild der Wirklichkeit zu sein. Im Gegensatz zu Frege zeigt Russell bezüglich Sätzen mit bestimmten Beschreibungen, daß er einen Begriff vom Wesen des Satzes hat. Freges Verwirrung zeigt sich aus der Sicht Wittgensteins daran, daß er von der Bedeutung der Zeichen reden mußte.

6.3 Der *Grundgedanke*

Hat Russell zwar ein besseres Verständnis vom Wesen des Satzes als Frege, so ist jedoch seine Auffassung der logischen Konnektive ('$\sim$', '$\supset$', '$\vee$' und '.') laut Wittgenstein verwirrt. Die logischen Konnektive faßte Russell als Namen unabhängig von uns bestehender logischer Gegenstände auf (4.1). Russell hatte mit Hilfe seiner *Theory of Description* eine Reduktion in der Anzahl bestehender logischer Gegenstände durchführen können. So faßte er beispielsweise die logische Konstante '$=$', das Zeichen der logischen Identität, nicht als Namen eines logischen Gegenstandes, sondern als unvollständiges Symbol auf (Abschnitt 4.4.2). Die logischen Konnektive wurden jedoch von Russell nicht weganalysiert, welches z.B. aus dem analysierten Satz '$(\exists x) : Fx \,.\, Gx \,.\, (y) : Fy \,.\supset.\, y = x$' hervorgeht. Die Kritik an der Auffassung logischen Konstanten als Namen logischer Gegenstände bezeichnet Wittgenstein als seinen *Grundgedanken*:

> "Die Möglichkeit des Satzes beruht auf dem Prinzip der Vertretung von Gegenständen durch Zeichen. Mein Grundgedanke ist, daß die »logischen Konstanten« nicht vertreten. Daß sich die *Logik* der Tatsachen nicht vertreten läßt"(*TLP* 4.0312).

So erfüllen die logischen Konnektive nicht den Zweck bzw. die Funktion, welche ihnen von Russell zugeschrieben wird: Sie sind keine Namen, bedeuten keine logischen Gegenstände. Die Möglichkeit des Satzes beruht auf dem Prinzip der Vertretung von Gegenständen durch Zeichen, weshalb der Engländer sich aufgrund der Unzweckmäßigkeit unserer Umgangssprache bezüglich der Konnektive irren konnte. Durch die Umgangssprache wird die Funktionsweise der Konnektive verschleiert. Es mag so scheinen, als ob ihr Zweck die Vertretung von besonderen Gegenständen sei. Dies ist jedoch eine Illusion. Welchen Zweck sie infolge Wittgenstein erfüllen, wird in Abschnitt 9.3.1 behandelt. Russells Konfusion tritt besonders in einer Textpassage der *Principles* zum Vorschein, wo er von den Undefinierbarkeiten (*indefinables*) – zu denen die logischen Konnektive gehören – spricht:

> "The discussion of indefinables – which forms the chief part of philosophical logic – is the endeavour to see clearly, and to make others see clearly, the entities concerned, in order that the mind may have that kind of acquaintance with them which it has with redness or the taste of a pineapple [...] it is often easier to know that there must be such entities than actually to perceive them; there is a process analogous to that which resulted in the discovery of Neptune, with the difference that the final stage – the search with a mental telescope for the entity which has been inferred – is often the most difficult part of the undertaking. In the case of classes, I must confess, I have failed to perceive any concept fulfilling the conditions requisite for the notion of *class*"(Russell, 1956, S. xv–xvi).

Russell vergleicht Undefinierbarkeiten mit Gegenständen der Astronomie. Die logischen Gegenstände sind laut Russell jedoch keine empirischen Objekte. Wir erkennen sie nicht mit einem physikalischen sondern mit unserem mentalen Teleskop. Laut Wittgenstein beantwortet Russell hier ein philosophisches Scheinproblem. Hertz folgend ist das Ziel jedoch nicht, solch unberechtigte Fragen zu beantworten, sondern ihre Unsinnigkeit festzustellen, und dadurch die Qualen des gequälten Geistes zu beenden. Die unberechtigte Frage, welche Russell zu beantworten sucht, ist die Frage nach dem Wesen der Undefinierbarkeiten bzw. logischen Gegenstände. Die Qualen seines Geistes zeigen sich im Zitat bezüglich der Klassen: Er vermag mit Hilfe seines mentalen Teleskops, keine Klassen zu identifizieren. Während Hertz den Kraftbegriff aus der Mechanik eliminierte und somit der unberechtigten Frage nach dem Wesen der Kraft ein Ende bereitete, entfernte Wittgenstein Russells Zeichen für die logischen Konnektive aus dem Symbolismus und ersetzte sie durch einen Symbolismus, der die Funktionsweise bzw. den Zweck der logischen Konnektive übersichtlich darstellt, wodurch das Fragen nach dem Wesen logischer Gegenstände ein Ende fand.[5] Wittgensteins neuem Symbolismus, die sogenannten Wahrheitstabellen, wenden wir uns später zu.

Die Konfusionen und Verwechslungen, welche aus der Sicht Wittgensteins in den Schriften von Frege und Russell vorzufinden sind, können als Ausdruck zweier sehr unterschiedlicher Auffassungen der Logik bzw. Mathematik aufgefaßt werden. Im nächsten Kapitel wird der Versuch unternommen, Wittgensteins Standpunkt anhand der *Tractatus*-Kritik an Russells Logizismus zu verdeutlichen.

[5]Russell bemerkt in der Einleitung zur 2. Ausgabe der *Principles* des Jahres 1937, daß er die logischen Konstanten nicht mehr als Namen auffaßt (Russell, 1956, S. xi).

Kapitel 7

Die Kritik am Logizismus Russells

7.1 Russells Auffassung der Logik als Logik der Welt

Die Logik bzw. Mathematik ist laut Russells Logizismus eine Wissenschaft, welche die unabhängig vom Menschen bestehende Logik der Welt zu erkennen sucht.[1] Russell sprach in *Principles* uns Menschen das Vermögen zu, die Logik der Welt direkt und unvermittelt wahrzunehmen. Die Aufgabe des Philosophen ist, erstens qua logischer Wahrnehmung die Logik der Welt zu erkennen, und zweitens anderen die erlangte Erkenntnis verständlich zu machen ("The discussion of indefinables – which forms the chief part of philosophical logic – is the endeavour to see clearly, and to make others see clearly, the entities concerned"(Russell, 1956, S. xv)). Wenige Jahre später verwarf Russell seinen Glauben an ein unvermitteltes Erkenntnisvermögen, weil er in *Principia* genötigt war, Axiome zuzulassen, deren Begründung durch logische Wahrnehmung bzw. Selbstevidenz unzulässig schien. Er mußte sich deshalb nach einer neuen Art der Begründung umsehen. Seine neue Lösung der Begründungsfrage bezeichnete er als die regressive Methode: Die Axiome werden als Hypothesen über die Logik der Welt aufgefaßt. Weil wir die Logik nicht immer direkt sondern meist mehr oder weniger vermittelt wahrnehmen können, sind unsere Gründe für die Annahme der einzelnen Axiome induktiv. Wir machen uns qua unserer Wahrnehmung der Logik logische Erfahrungen. Die Axiome werden auf der Grundlage dieser Erfahrungen angenommen, d.h. logische Erfahrungen dienen als Evidenz für die Wahrheit oder Falschheit der Axiome. So ist beispielsweise das Paradox von Russell als Evidenz für die Falschheit des Grundgesetzes V zu verstehen. Frege war sich sicher, daß je-

[1]Dieser Abschnitt ist als kurze Zusammenfassung von Kapitel 4 aufzufassen.

de Funktion einen logischen Gegenstand, einen Wertverlauf bestimmt. Das Paradox weist diese Annahme als einen Irrtum auf. Während wir uns in der Physik in bezug auf die Existenz von besonderen Partikeln irren können, so besteht laut Russell in der Logik die Möglichkeit, sich in bezug auf die Existenz logischer Gegenstände zu irren. Wie aus dem Zitat auf Seite 68 zu entnehmen ist, war er selbst besonders über die Frage im unklaren, ob es Klassen gibt.

Eine Generalisation der *Theory of Description* ermöglichte Russell in *Principia* Klassen als unvollständige Symbole, d.h. als logische Konstruktionen einzuführen. Russells Anwendung unvollständiger Symbole spiegelt seine Auffassung der Devise Occams wieder: Ist eine Reduktion in der Anzahl ontologischer Größen möglich, indem einige der Größen als unvollständige Symbole aufgefaßt werden, so ist die Durchführung der Reduktion von Vorteil, weil durch sie die Frage nach der Richtigkeit der jeweiligen Theorie von der Existenz der reduzierten Größen unabhängig wird. So ist z.B. die Richtigkeit der Theorie in *Principia* von der Existenz der Klassen unabhängig: durch die Einführung der Klassen als unvollständige Symbole erweist sich der Glauben an ihr Bestehen als überflüssige Hypothese. Wir können uns bezüglich der Logik der Welt irren. Unsere Axiome bzw. Hypothesen können sich als falsch erweisen. Die Methode der unvollständigen Symbole erlaubt uns, die Anzahl der Axiome bzw. Hypothesen zu reduzieren, und somit die Anzahl möglicher Irrtümer zu minimieren.

7.2 Wittgensteins Auffassung der Logik als Logik der Sprache

Die Auffassung der Logik und Mathematik Russells ist laut Wittgenstein grundlegend verwirrt. Russells Konfusionen kommen teils in den dargelegten Verwechslungen des vorigen Kapitels zum Ausdruck: Er verwechselte interne mit externen Eigenschaften und Relationen und logische Konnektive mit Namen logischer Gegenstände. Diese Verwechslungen sind aus der Sicht Wittgensteins Symptone; Symptome eines verwirrten und falschen Verständnisses der Logik und Mathematik: Russells Logizismus.

So ist beispielsweise die reduzierte Anzahl bestehender Größen, welche Russell in *Principia* zuließ, Wittgenstein nicht minimal genug. Infolge der Auffassung des Österreichers gibt es überhaupt keine logischen Gegenstände im Sinne Russells (*TLP* 5.4), d.h. weder Logik noch Mathematik haben Bestandteile der Welt als ihren Gegenstand. Im *Tractatus* zeigt uns Wittgenstein, wie Russells Zeichen für logische Konnektive zu reduzieren sind.[2] Wittgensteins Anwendung der Devise Occams spiegelt dabei eine ganz andere Auffassung der Logik bzw. Mathematik als die Russells wieder. Über sein Verständnis der Devise Occams schreibt Wittgenstein im *Tractatus*:

> "Um das Symbol am Zeichen zu erkennen, muß man auf den sinnvollen Gebrauch achten.
> Das Zeichen bestimmt erst mit seiner logisch-syntaktischen Verwendung zusammen eine logische Form.
> Wird ein Zeichen *nicht gebraucht*, so ist es bedeutungslos. Das ist der Sinn der Devise Occams"(*TLP* 3.326–8).

> "Occams Devise ist natürlich keine willkürliche, oder durch ihren praktischen Erfolg gerechtfertigte Regel: Sie besagt, daß *unnötige* Zeicheneinheiten nichts bedeuten. Zeichen, die *Einen* Zweck erfüllen, sind logisch äquivalent, Zeichen, die *keinen* Zweck erfüllen, logisch bedeutungslos"(*TLP* 5.47321).[3]

In den zitierten Zeilen wird von Wittgenstein der Zusammenhang zwischen dem Gebrauch der Sprache und Occams Devise erläutert: Erst die Art und Weise, wie ein Zeichen gebraucht wird, bestimmt, welche logische Funktion ein Zeichen hat, welches Symbol ein Zeichen ist. Nur wenn ein Zeichen nicht gebraucht wird; nur wenn das Zeichen nichts zum Satz-Sinn beiträgt, kann es eliminiert werden.[4]

Die Konfusion Russells wird in dieser Verbindung offensichtlich. Er schaute sozusagen laut Wittgenstein in eine völlig verkehrte Richtung in seinen Versuchen, die Logik zu begründen. Statt auf den Gebrauch der Sprache zu achten, sprach Russell in *Principles* von einer logischen Wahrnehmung bzw. von einem Einleuchten. Wittgenstein kritisierte Russell in diesem Zusammenhang dafür, daß er die Implikationen des *Linguistic Turn* nicht verstanden hatte:

[2]Siehe den folgenden Abschnitt 9.2.

[3]Der Übergang vom frühen zum späten Wittgenstein wird oft als ein Übergang von einer realistischen Sprachtheorie zu einer Sprachtheorie des Gebrauchs dargestellt; siehe Fogelin (1976), Stenius (1981), Malcolm (1986), Pears (1987) und Hacker (1997). Solch eine Interpretation verzerrt jedoch den Unterschied zwischen der Auffassung Wittgensteins im *Tractatus* und seinem späteren Verständnis der Sprache: *Erstens* spricht Wittgenstein wie z.B. aus den zitierten Zeilen hervorgeht auch im *Tractatus* vom Gebrauch bzw. der Verwendung der Sprache und *zweitens* sind weder das Frühwerk noch die späteren Werke als Sprach*theorien* aufzufassen; siehe Ishiguro (1969), Diamond (1991b) und Stern (1995).

[4]Wie dieser Beitrag laut Wittgenstein bestimmt ist wird in Kapitel 8 erörtert.

> “Das Einleuchten, von dem Russell so viel sprach, kann nur dadurch in der Logik entbehrlich werden, daß die Sprache selbst jeden logischen Fehler verhindert”(*TLP* 5.4731).

Die Logik ist laut Russell außerhalb der Sprache; sie ist die vom Menschen unabhängige Logik der Welt. Im Gegensatz zu Russell ist die Logik laut Wittgenstein nicht außerhalb sondern in der Sprache, weshalb nur die Sprache logische Fehler verhindern kann: logische Fehler können nur durch die Klärung der logisch-syntaktischen Verwendungweise der jeweiligen Zeichen vermieden werden. Wittgensteins Vorgehensweise zeigt sich bezüglich der Elimination logischer Gegenstände: In unserer Sprache gibt es keine Namen für logische Gegenstände. Die logischen Konnektive haben gar nicht den Zweck, welche Russell ihnen zuspricht. Sie werden nicht als Namen logischer Gegenstände verwendet.

7.3 Philosophie als Tätigkeit

In *Principles* teilte Russell der Philosophie die Aufgabe zu, uns das Wesen der Undefinierbarkeiten so recht vor Augen zu führen. Der Weg zum Erkennen der logischen Gegenstände führte über das Einleuchten. Später war Russell der Ansicht, die Philosophie könne ihre Aufgabe lösen – das Erkennen der Logik der Welt – indem sie die Methode der Physik bzw. Naturwissenschaft übernimmt. Russells Auffassung der Philosophie wird von Wittgenstein auf der Grundlage der Schriften von Hertz und Boltzmann verworfen:

> Die Philosophie ist keine der Naturwissenschaften [...] Der Zweck der Philosophie ist die logische Klärung der Gedanken. Die Philosophie ist keine Lehre, sondern eine Tätigkeit. Ein philosophisches Werk besteht wesentlich aus Erläuterungen. Das Resultat der Philosophie sind nicht »philosophische Sätze«, sondern Klarwerden von Sätzen. Die Philosophie soll die Gedanken, die sonst, gleichsam, trübe und verschwommen sind, klar machen und scharf abgrenzen”(*TLP* 4.111–2).

Die Philosophie ist keine Wissenschaft, weshalb der *Tractatus* keine Lehre ist, beispielsweise keine *Theorie* der Sprache enthält. Der Zweck der Philosophie ist nicht das Erkennen einer der Sprache externen Logik, sondern das Klarwerden von Sätzen, das Klarwerden der Logik der Sprache. Zwar war Russells Ziel mit seiner *Theory of Description* die Elimination von bedeutungslosen Begriffen, d.h. die Reduktion von sprachlichen Elementen denen in der logischen Welt nichts entspricht, so bewies seine Vorgehensweise infolge Wittgenstein jedoch ein Verständnis für die Logik der Sprache bzw. das

Wesen des Satzes. Russells Art der Analyse ist ein Beispiel für die logische Klärung von Sätzen, ein Beispiel für Philosophie als Tätigkeit. Das Resultat philosophischer Tätigkeit sind nicht philosophische Sätze bzw. Theorien, sondern Sätze in Einklang mit sich selbst, d.h. Sätze, die ihre logische Struktur klar aufweisen. Was in den Zeichen nicht zum Ausdruck kommt, das zeigt laut Wittgenstein ihre Anwendung. Was die Zeichen verschlucken, das spricht ihre Anwendung aus (*TLP* 3.262). Mit anderen Worten verschlucken die Zeichen des Satzes nichts, sind Zeichen und Anwendung im Satze miteinander in Übereinstimmung, so ist der Satz in Einklang mit sich selbst. Eben jenes haben wir erreicht, falls wir im Besitz einer Begriffschrift sind, die der logischen Syntax gehorcht:

> "Jetzt verstehen wir auch unser Gefühl: daß wir im Besitze einer richtigen logischen Auffassung seien, wenn nur einmal alles in unserer Zeichensprache stimmt"(*TLP* 4.1213).

7.4 Tautologie und das Axiom der Reduzierbarkeit

Die Sprachlogik muß mit anderen Worten für sich selber sorgen (*TLP* 5.473). So hat sie beispielsweise keine Grundlagen: es gibt keine Grundgesetze im Sinne Freges und Russells, sondern alle Sätze der Logik sind gleichberechtigt. Es gibt unter ihnen nicht wesentliche Grundgesetze und abgeleitete Sätze, sondern jeder logische Satz zeigt selbst, daß er ein logischer Satz ist:

> "Es ist das besondere Merkmal der logischen Sätze, daß man am Symbol allein erkennen kann, daß sie wahr sind [...] Und so ist es auch eine der wichtigsten Tatsachen, daß sich die Wahrheit oder Falschheit der nichtlogischen Sätze *nicht* am Satz allein erkennen läßt"(*TLP* 6.113).

Der eigentliche (nichtlogische) Satz drückt einen Sinn aus, ist ein Bild der Wirklichkeit, stellt eine Sachlage dar. Die Wahrheit oder Falschheit des eigentlichen Satzes läßt sich nur durch das Ansehen der Welt feststellen. So muß man die Welt ansehen, um zu sehen, ob die Aussage 'Es regnet' wahr oder falsch ist. Ein Satz der Logik ist eine *Tautologie* (*TLP* 6.1): Er ist kein Bild der Wirklichkeit, stellt keine Sachlage dar sondern ist bedingungslos wahr: In der Tautologie heben die Bedingungen der Übereinstimmung mit der Welt – die darstellenden Beziehungen – einander auf, so daß sie in keiner darstellenden Beziehung zur Wirklichkeit steht. Die Tautologie läßt sozusagen der Wirklichkeit den ganzen logischen Raum. Sie kann daher nicht die

Wirklichkeit irgendwie bestimmen (*TLP* 4.463), sagt über die Wirklichkeit nichts aus sondern ist bedingungslos wahr. So weiß man z.B. nichts über das Wetter, wenn man sich sicher ist, daß es regnet oder nicht regnet. Der andere extreme Fall ist die *Kontradiktion*, welche statt bedingungslos wahr bedingungslos falsch ist. Beispielsweise ist der Satz ‘Es regnet und es regnet nicht’ eine Kontradiktion. Während die Tautologie der Wirklichkeit den ganzen logischen Raum läßt, so erfüllt die Kontradiktion den ganzen logischen Raum und läßt der Wirklichkeit keinen Punkt (*TLP* 4.463). Wie die Tautologie kann die Kontradiktion daher nicht die Wirklichkeit irgendwie bestimmen, stellt die Kontradiktion keine mögliche Sachlage dar. Sind Tautologie und Kontradiktion zwar sinnlos, so sind sie “aber nicht unsinnig; sie gehören zum Symbolismus, und zwar ähnlich wie die »o« zum Symbolismus der Arithmetik”(*TLP* 4.4611). Die Wahrheit der Tautologie ist gewiß, des Satzes möglich, der Kontradiktion unmöglich (*TLP* 4.464). Kommen wir deshalb in die Lage, ein Problem der Logik durch Ansehen der Welt beantworten zu müssen, so zeigt dies laut Wittgenstein, daß wir auf grundfalscher Fährte sind (*TLP* 5.551). Nicht nur muß ein Satz der Logik durch keine mögliche Erfahrung widerlegt werden können, sondern er darf auch nicht durch eine solche bestätigt werden können. Ein logischer Satz ist nicht zufälligerweise wahr. Das Anzeichen des logischen Satzes ist somit nicht die Allgemeingültigkeit, denn “[a]llgemein sein, heißt ja nur: Zufälligerweise für alle Dinge gelten.”(*TLP* 6.1231), weshalb beispielsweise das Axiom der Reduzierbarkeit kein logischer Satz ist:

> “Die logische Allgemeingültigkeit könnte man wesentlich nennen, im Gegensatz zu jener zufälligen, etwa des Satzes »alle Menschen sind sterblich«. Sätze, wie Russells »Axiom of reducibility« sind nicht logische Sätze, und dies erklärt uns unser Gefühl: Daß sie, wenn wahr, so doch nur durch einen günstigen Zufall wahr sein könnten”(*TLP* 6.1232).

Ein Satz wie ‘Alle Menschen sind sterblich’ drückt einen Sinn aus: Der Satz behauptet die Sterblichkeit aller Menschen. Die Wahrheit des Satzes kann deshalb nicht logisch sondern nur zufällig sein. Das Axiom der Reduzierbarkeit behauptet für jede Funktion $\phi\hat{x}$ die Existenz einer umfangsgleichen prädikativen Funktion $\psi\hat{x}$:[5]

$$(\exists\psi).\ \phi x \equiv_x \psi ! x$$

Prädikative Funktionen sind besondere Aussagefunktionen, d.h. bezeichnen eigentliche Eigenschaften (Abschnitt 6.1). Deshalb müssen wir die Welt an-

[5] Es handelt sich hier genau genommen nur um die eine Hälfte des Axioms der Reduzierbarkeit, dem Axiom der Klassen (siehe Abschnitt 4.4.6).

schauen, um zu sehen, ob sich für jede Funktion eine umfangsgleiche prädikative Funktion finden läßt. Die Logik hat jedoch nichts mit der Frage zu tun, ob unsere Welt wirklich so ist oder nicht. Die Sätze der Logik sind sinnlos. Das Axiom stellt eine mögliche Sachlage dar, drückt einen Sinn aus, und ist somit kein logischer Satz.

7.5 Das Unendlichkeitsaxiom und die logische Identität

Wittgenstein übt außer am Axiom der Reduzierbarkeit Kritik am Unendlichkeitsaxiom. In *Principia* wurde das Unendlichkeitsaxiom für den Typ der Gegenstände,[6] die Behauptung der Existenz unendlich vieler Gegenstände, als nicht-logische Prämisse bzw. empirische Annahme zugelassen. Laut Russell sei die Behauptung der Existenz nur endlich vieler Gegenstände viel komplizierter als das Unendlichkeitsaxiom, und zudem bestünden a priori überhaupt keine Gründe, statt dem Axiom die finite Hypothese zu behaupten. Vor diesem Hintergrund wäre anzunehmen, Wittgenstein kritisiere Russells Annahme eines sinnvollen Satzes als Axiom. Dies ist jedoch nicht der Fall. Was er kritisiert ist Russells Glauben, daß der Satz überhaupt einen Sinn hat. Aus der Sicht des Österreichers ist das Axiom weder sinnvoll noch sinnlos sondern schlichtweg unsinnig. In Abschnitt 6.1 sind wir kurz auf Wittgensteins Gründe für die Unsinnigkeit des Axioms eingegangen. Der Begriff 'Gegenstand' ist laut Wittgenstein kein eigentlicher sondern ein formaler Begriff, und somit der Satz 'Es gibt Gegenstände' unsinnig. Folglich ist auch das Unendlichkeitsaxiom, die Behauptung 'Es gibt unendlich viele Gegenstände', Unsinn. Wir haben Sätzen wie 'Dies ist eine Eigenschaft, die ich bewundere' oder '$(\exists\psi).\, \phi x \equiv_x \psi ! x$' Sinn gegeben, nicht aber Ausdrücken wie 'Ist dies ein Gegenstand oder eine Funktion?' oder 'Es gibt unendlich viele Gegenstände'. Letztere sind einfach unsinnig.[7] Im Symbolismus der *Principia* wurde 'Es gibt Gegenstände' von Russell als '$(\exists x).x = x$' wiedergegeben. Die formale Wiedergabe ist jedoch infolge Wittgenstein ebenso problematisch, weil Russells Definition des logischen Gleichheitszeichens ungenügend ist:

> "Russells Definition von »=« genügt nicht; weil man nach ihr nicht sagen kann, daß zwei Gegenstände alle Eigenschaften gemeinsam haben. (Selbst wenn dieser Satz nie richtig ist, so hat

[6] Ab hier einfach als Unendlichkeitsaxiom abgekürzt.

[7] Weshalb solche Sätze laut Wittgenstein unsinnig sind, wird im folgenden Abschnitt näher erörtert.

> er doch *Sinn.*)
> Beiläufig gesprochen: Von *zwei* Dingen zu sagen, sie seien identisch, ist ein Unsinn, und von *Einem* zu sagen, es sei identisch mit sich selbst, sagt gar nichts"(*TLP* 5.5302–3).

Zwei Dinge sind laut Russells Definition gleich, falls sie alle prädikativen Eigenschaften gemein haben:[8]

$$x = y \,.\!\equiv_{Df}.\, (\phi).\phi!x \equiv \phi!y$$

Die Theorie der Typen erlaubt es Russell nicht über alle Eigenschaften sondern nur über die prädikativen zu verallgemeinern, weshalb sich in *Principia* nicht sagen läßt, daß zwei Gegenstände alle Eigenschaften gemeinsam haben. Es läßt sich nur behaupten, daß zwei Gegenstände alle prädikativen Eigenschaften gemein haben. Diese Tatsache ist es jedoch nicht, die Wittgenstein im Zitat kritisiert, weshalb er sich erst gar nicht bemüht, Russells Einschränkung des Wertebereiches der Variablen zu erwähnen bzw. zu berücksichtigen.

Was er kritisiert ist, daß *zwei* Gegenstände, welche alle ihre (prädikativen) Eigenschaften gemein haben, infolge der obigen Definition *ein* Gegenstand sind, d.h. die Behauptung, daß zwei unterschiedliche Gegenstände alle (prädikativen) Eigenschaften gemeinsam haben ($\sim .\, x = y : (\phi).\phi!x \equiv \phi!y$), erweist sich in *Principia* kraft Russells Definition der Identität als eine Kontradiktion:

$$\sim .\, x = y : (\phi).\phi!x \equiv \phi!y \,.:\equiv:.\, \sim .\, x = y : x = y$$

Dieser Satz ist laut Wittgenstein vielleicht nie wahr sondern immer falsch, aber allein die Möglichkeit der Wahrheit oder Falschheit des Satzes zeigt uns schon, daß der Satz nicht bedingunglos falsch ist sondern nur zufälligerweise falsch wäre, d.h. der Satz ist keine Kontradiktion sondern stellt eine mögliche Sachlage dar. Der Satz ist nicht sinnlos sondern sinnvoll. Ergo folgt Russells Definition der Identität nicht der logischen Syntax unserer Sprache, weshalb die Definition aus der Sicht Wittgensteins ungenügend bzw. unzweckmäßig ist.[9] Das Zeichen für die logische Identität erfüllt keinen Zweck, weshalb Wittgenstein im *Tractatus* ohne es auskommen kann, indem er die Gleichheit des Gegenstandes durch die Gleichheit des Zeichens ausdrückt und die Verschiedenheit der Gegenstände durch die Verschiedenheit der Zeichen (*TLP* 5.53). So schreibt er beispielsweise im Gegensatz zu

[8] Siehe Abschnitt 4.4.2.

[9] Russell schrieb in seiner Einleitung zur bilingualen Ausgabe des *Tractatus* des Jahres 1922: "the concept of identity is subjected by Wittgenstein to a destructive criticism from which there seems no escape"(Wittgenstein, 1961, Intro, S. 16).

Russell nicht '$f(a,b).\, a = b$', sondern '$f(a,a)$' (oder '$f(b,b)$'). Und nicht '$(\exists x,y).\, f(x,y) \,.\, x = y$', sondern '$(\exists x).f(x,x)$' und statt '$(x) : fx \,.\supset .\, x = a$' beispielsweise '$(\exists x).\, fx \,.\supset .\, fa : \sim(\exists x,y).\, fx \,.\, fy$'. Sätze wie '$a = a$', '$a = b \,.\, b = c \supset a = c$' und '$(x).\, x = x$' sind Scheinsätze und können nicht umformuliert werden, d.h. lassen sich im Symbolismus des *Tractatus* nicht mehr hinschreiben. Hier sind infolge Wittgenstein schon die Probleme gelöst, welche Russells Unendlichkeitsaxiom mit sich bringt: Es läßt sich erst gar nicht im Symbolismus formulieren.

7.6 Die Theorie der Typen

Vor dem Hintergrund des Unterschiedes zwischen der Auffassung Russells der Logik als Logik der Welt und Wittgensteins Auffassung der Logik als Logik der Sprache kann nicht nur Wittgensteins Kritik der beiden Axiome verstanden werden, sondern läßt sich auch seine kurzgefaßte Kritik an der Theorie der Typen erläutern.[10] Der Österreicher schreibt im *Tractatus* wie folgt über diese Theorie Russells:

> "In der logischen Syntax darf nie die Bedeutung eines Zeichens eine Rolle spielen; sie muß sich aufstellen lassen, ohne daß dabei von der *Bedeutung* eines Zeichens die Rede wäre [...] Von dieser Bemerkung sehen wir in Russells »Theory of types« hinüber: Der Irrtum Russells zeigt sich darin, daß er bei der Aufstellung der Zeichenregeln von der Bedeutung der Zeichen reden mußte"(*TLP* 3.33–3.331).

Im Zitat wird die Theorie der Typen als ein Ausdruck der realistischen Auffassung der Logik Russells kritisiert, nach welcher die Logik außerhalb der Sprache und unabhängig vom Menschen besteht. Russell hatte beispielsweise in der Theorie der Typen erklärt: "A function, in fact, is not a definite object, which could be or not be a man; it is a mere ambiguity awaiting determination"(Whitehead und Russell, 1910–3, Bd. 1, S. 50). Und um zu vermitteln, was eine Aussagefunktion erster Ordnung ist, mußte er folgende Erklärung abgeben: "this function presupposes the totality of individuals"(Whitehead und Russell, 1910–3, Bd. 1, S. 57), d.h. er mußte mit den Worten Wittgensteins "bei der Aufstellung der Zeichenregeln von der Bedeutung der Zeichen reden."

Folglich ist Russells Theorie der Typen laut Wittgenstein Ausdruck des folgenden verwirrten Bildes: Gegenstände (*individuals*) und Funktionen un-

[10]Dieser Abschnitt ist von Diamonds Artikeln Diamond (1991a), Diamond (1991f) und Diamond (1991e) inspiriert, welche hauptsächlich Frege und Unsinn als Thema behandeln.

terschiedlichen Typs sind Bestandteile der Welt. Ist etwas ein Gegenstand, so ist es eben deshalb zweckmäßig, daß die jeweilige Bezeichnung das logische Merkmal eines Namens hat, d.h. gesättigt ist. Ist etwas eine prädikative Funktion erster Ordnung, so ist es eben deshalb zweckmäßig, daß das jeweilige Zeichen das Merkmal eines Prädikats hat, d.h. ungesättigt ist: eine oder mehrere Lücken für Argumentausdrücke aufweist. Allgemein ist es zweckmäßig, daß unsere Bezeichnungen die Merkmale aufweisen, welche den jeweiligen Bedeutungen aufgrund ihrer von den Zeichen unabhängig bestimmten logischen Typen zukommen. Der logische Typ gehört zur Bedeutung unabhängig von der Bezeichnung, weshalb wir bei der Aufstellung der Regeln für unsere Zeichen es aus der Sicht Russells sozusagen richtig oder falsch hinbekommen können. Die Möglichkeit der Bildung von '$\phi(\phi\hat{x})$' in Freges Begriffschrift ist beispielsweise logisch unzulässig: Wird das Zeichen '$\phi\hat{x}$' für die Funktion $\phi\hat{x}$ im Symbolismus mit sich selbst zum Ausdruck '$\phi(\phi\hat{x})$' zusammengesetzt, so erhalten wir einen Scheinausdruck, *weil* Funktionen nicht ihr eigenes Argument sein können. Durch einen zweckmäßigen Symbolismus kann die Bildung von unzulässigen Scheinausdrücken verhindert werden, da wir durch sie an den Zeichen den logischen Typ der jeweiligen Bedeutung erkennen können und somit darüber im klaren sind, welche Zeichen, auf bestimmte Art und Weise miteinander zusammengesetzt, einen Ausdruck bilden, der einer Bedeutung entspricht. Wir können beispielsweise an der Bezeichnung '$\phi\hat{x}$' den logischen Typ ihrer Bedeutung erkennen: Das Zeichen bezeichnet eine Funktion erster Ordnung (einer Argumentstelle).

Nebst der Fehler, welche wir bei der Aufstellung der Zeichenregeln begehen können, besteht aus der Sicht Russells die Möglichkeit, bei der Anwendung der Theorie der Typen Fehler zu begehen, d.h. wir können bei der Klassifikation der Bedeutungen Fehler begehen. So können wir uns laut Russell fragen, ob Sokrates beispielsweise ein Gegenstand oder eine Funktion erster Ordnung ist. Ist die Bedeutung des Wortes 'Sokrates' ein Gegenstand, so bezeichnen wir diese Bedeutung im Symbolismus Russells beispielsweise mit 's'. Steht das Wort dagegen für eine Funktion, d.h. ist Sokrates eine Funktion, so bezeichnen wir die Bedeutung z.B. mit '$s\hat{x}$'.

Die Logik ist laut Russell außerhalb der Sprache und in der Welt: Der Engländer ist der Ansicht mit dem Satz, Sokrates ist ein Gegenstand, etwas richtiges gesagt bzw. gedacht zu haben. Er glaubt, die Welt bestünde unter anderem aus Gegenständen und Funktionen; letztere selbst unterschiedlicher Art. Und von diesen Dingen unterschiedlicher Art glaubt er, denken zu können: Es gehört diesem oder jenem logischen Typ an, d.h. es hat Sinn, einen Begriff für einen logischen Typ auf eine Größe eines anderen Typs anzuwenden. Das Wesentliche der realistischen Auffassung Russells ist, daß 'Es ist ein Gegenstand' fälschlicherweise über einige Größen ausgesagt werden kann; es ist wesentlich, daß Begriffe für logische Typen eigentliche Begriffe sind.

Eben jener wesentliche Glauben Russells wird jedoch von Wittgenstein als Ausdruck einer Konfusion kritisiert: der Verwechslung von formalen mit eigentlichen Begriffen. Begriffe für logische Typen wie die Begriffe Gegenstand und Funktion sind nicht eigentliche sondern formale Begriffe. Bezüglich eines eigentlichen Begriffs hat es Sinn zu fragen, ob *jenes* unter den Begriff fällt oder nicht, d.h. nur durch Anschauen der Welt kann die Frage beantworten werden. So kann man fragen, ob jener Stein weiß oder rot ist. Bezüglich eines formalen Begriffs ist die enstprechende Frage jedoch unsinnig, weshalb es auch keinen Sinn hat, die Welt anzuschauen. Warum die Frage unsinnig ist, wird im folgenden erläutert.

Die Logik ist laut Wittgenstein innerhalb der Sprache, weshalb die Sprache selbst jeden logischen Fehler verhindern muß. Wir können deshalb einem Zeichen nicht den unrechten Sinn geben, d.h. wir können einem Zeichen nicht einen Sinn geben, der nicht mit dem logischen Typ seiner Bedeutung übereinstimmt. Ein Zeichen kann im Gegensatz zur Auffassung Russells laut Wittgenstein nicht auf unrechte Art und Weise mit anderen Zeichen zusammengesetzt werden. Ein Zeichen kann nicht aufgrund seiner Bedeutung mit anderen Zeichen unrichtig kombiniert werden, d.h. die Theorie der Typen erfüllt überhaupt keinen Zweck. Diese Auffassung Wittgensteins wird im *Tractatus* am deutlichsten bei der Klärung von Russells Paradox ausgedrückt:

> "Eine Funktion kann darum nicht ihr eigenes Argument sein, weil das Funktionszeichen bereits das Urbild seines Arguments enthält und es sich nicht selbst enthalten kann.
> Nehmen wir nämlich an, die Funktion F(fx) könnte ihr eigenes Argument sein; dann gäbe es also einen Satz: »F(F(fx))« und in diesem müssen die äußere Funktion F und die innere Funktion F verschiedene Bedeutungen haben, denn die innere hat die Form ϕ(fx), die äußere die Form $\psi(\phi(\mathrm{fx}))$. Gemeinsam ist den beiden Funktionen nur der Buchstabe »F«, der aber allein nichts bezeichnet.
> Dies wird sofort klar, wenn wir statt »F(F(u))« schreiben »$(\exists\phi)$:F(ϕu).ψ u = Fu«. Hiermit erledigt sich Russells Paradox"(*TLP* 3.333).

Wittgenstein und Russell sind bezüglich des Prinzips des Circulus vitiosus einig: Eine Funktion kann nicht ihr eigenes Argument sein. Ihre jeweiligen Argumente für die Annahme des Prinzips sind jedoch unterschiedlich. Laut Russell ist das Prinzip Ausdruck einer Wahrheit über Bedeutungen. Wittgensteins Argument ist das im Zitat enthaltene Reduktio ad absurdum: Wird angenommen, eine Funktion kann ihr eigenes Argument sein, d.h. können wir den Satz '$F(F(fx))$' bilden, so haben die äußere Funktion F und die innere Funktion F zwar die Bezeichnung bzw. den Buchstaben gemeinsam. Sie sind aber unterschiedliche Funktionen, denn die innere hat die Form $\phi(fx)$ und die äußere die Form $\psi(\phi(fx))$, d.h. die Ordnung der inneren Funktion ist eine Stufe niedriger als die der äußeren Funktion.

Die Bedeutung eines Zeichens läßt sich infolge Russell außerhalb bzw. unabhängig vom Satz fixieren. So ist beispielsweise die Bedeutung des Buchstabens 'F' im Satz '$F(F(fx))$' unabhängig vom Satz aufzufassen, weshalb im Satz innere und äußere Funktion gleich sind. Dieser Glauben an die Bedeutungsgleichheit der inneren und äußeren Funktion ist laut Wittgenstein eine Konfusion. Ein Zeichen kann allein nichts bedeuten. Dies ist eine Einsicht Freges, welche in der Sprachphilosohpie als das sogenannte Kontextprinzip bekannt ist, und der Wittgenstein sich anschließt:

> "Nur der Satz hat Sinn; nur im Zusammenhang des Satzes hat ein Name Bedeutung"(*TLP* 3.3).

Nur innerhalb eines Satzes können wir am Wort ein Symbol erkennen, d.h. erst im Zusammenhang des Satzes hat das Wort eine logische Funktion. Und nur als logischer Bestandteil eines Satzes hat ein Wort diese oder jene Bedeutung. Außerhalb eines solchen Vorkommens können wir nicht einmal sagen, jenes Wort sei ein Name oder ein Begriff bzw. bedeutet einen Gegenstand oder eine Eigenschaft. So können wir aus dem Zusammenhang bzw. der logischen Form des Satzes '$F(F(fx))$' ersehen, daß innere und äußere Funktion zu unterscheiden sind. Aus dem Zusammenhang ist zu ersehen, daß innerer und äußerer Buchstabe im Satz logisch unterschiedliche Zwecke erfüllen und somit Unterschiedliches bedeuten. Vor diesem Hintergrund erweist sich die Frage, was ein Zeichen bzw. ein Buchstabe an sich bedeutet, als Scheinfrage, die nicht durch Anschauen der Welt zu beantworten, sondern einfach als unsinnig zu erkennen ist. Begriffe für logische Typen sind nicht eigentliche Begriffe sondern formale Begriffe. Durch den Satz 'Sokrates ist ein Gegenstand' wird weder etwas richtiges noch etwas falsches sondern gar nichts ausgesagt. Der Satz ist Unsinn. Die meisten von uns mögen das Wort Sokrates außerhalb des Zusammenhanges eines Satzes mit dem Namen für eine bestimmte historische Person Griechenlands verbinden. Welche Vorstellungen bzw. mentalen Bilder uns beim Lesen eines Wortes vorschweben, ist jedoch von der Frage unabhängig, welche logische Funktion das Wort im Satz erfüllt. Die Frage nach den Vorstellungen, welche unsere Wörter begleiten, ist nicht eine Frage der Logik sondern der Psychologie. Als Beispiel können wir den Satz 'Es ist wenig Sokrates über die Philosophie der Neuzeit' betrachten. In diesem Satz wird das Wort Sokrates nicht als Name sondern als

Begriff verwendet. Wir mögen zwar das Wort niemals als Begriffswort verwendet haben. Trotzdem verstehen wir, was es heißen will, es auf solche Art zu verwenden. Dabei würden wir den Sinn des Satzes jedoch eher durch den Satz 'Die Philosophie der Neuzeit ist wenig sokratisch' ausdrücken. Letzterer Satz bringt den Sinn des vorigen Satzes zweckmäßiger zum Ausdruck, weil wir nicht mehr das Wort Sokrates, das normalerweise als Name gebraucht wird, auf eine andere Weise verwenden, d.h. wir können nicht mehr den Fehler begehen, das Wort Sokrates als Namen aufzufassen.

Allgemein ist es laut Wittgenstein der Zweck der Begriffschrift, Sätze unserer Sprache zweckmäßig darzustellen. Die Begriffschrift soll die Qualen unseres Geistes beenden, indem es in der Schrift nicht möglich sein soll, Zeichen auf solche Art zusammenzusetzen, daß wir aufgrund irreführender Analogien mit anderen Zeichen entweder nicht erkennen können, was wir meinen (falls wir z.B. glauben, über einen Begriff nachzudenken, aber über etwas anderes nachdenken, oder falls wir glauben, zweimal über eine Sache geredet zu haben, aber über zwei verschiedene Sachen gesprochen haben), oder nicht imstande sind zu erkennen, daß wir wie im Falle der Theorie der Typen Russells überhaupt nichts denken (wenn wir z.B. sagen, Sokrates sei ein Gegenstand).

Wie der Beitrag eines Wortes zum Sinn des Satzes bestimmt ist, erläutert Wittgenstein anhand der Analogie zwischen Sätzen und Bildern. Der Auffassung des Satzes als Bild widmen wir dem folgenden Kapitel. Bevor wir jedoch zum nächsten Kapitel schreiten wird kurz dargestellt, welche Teile der *Principia* aufgrund der dargestellten Kritik von Wittgenstein implizit verworfen werden.

7.7 Implizite Kritik

Vor dem Hintergrund von Kapitel 4, der Darstellung des Logizismus Russells, ist es möglich Teile der *Principia* zu bestimmen, die implizit von der Kritik Wittgensteins betroffen sind. So kann Russell ohne das Unendlichkeitsaxiom nicht die Gültigkeit arithmetischer Gleichungen beweisen (Abschnitt 4.4.5). Und ohne das Axiom der Reduzierbarkeit fehlen in *Principia* beispielsweise Beweise für das Leibnizsche Gesetz und die mathematische Induktion (Abschnitt 4.4.6).

Darüber hinaus führt Wittgensteins Kritik an Russells Definition der logischen Identität zur Verwerfung von Russells Definition der natürlichen Zahlen. Im besonderen ist Russells Definition der Zahlen 0, 1 und 2 unzulässig:[11]

$$\begin{aligned}
&0 =_{Df} \iota`\Lambda = \widehat{x}(x \neq x)\\
&1 =_{Df} \widehat{\alpha}\{(\exists x).\alpha = \iota`x\}\\
&2 =_{Df} \widehat{\alpha}\{(\exists x, y).x \neq y\,.\,\alpha = \iota`x \cup \iota`y\}
\end{aligned}$$

Im allgemeinen ist Russells Einführung der Relation $\vec{R}$ der Klasse der Bezieher von y zu y bzw. der Relation $\overleftarrow{R}$ der Relata von x zu x auf der Grundlage einer (variablen) Relation R unzulässig:[12]

$$\vec{R}\,.{=_{Df}}.\,\widehat{\alpha}\widehat{y}\{\alpha = \widehat{x}(xRy)\},$$

Folglich kann aus der Sicht Wittgensteins durch die (bestimmte) Relation sm nicht die deskriptive Funktion $Nc =_{Df} \ \vec{sm}$ und somit nicht die Anzahl $Nc`\alpha$ einer Klasse α definiert werden (Abschnitt 4.4.5).[13] Hiermit ist Russells allgemeine Definition der natürlichen Zahlen verworfen.

---

[11] Siehe Abschnitt 4.4.3 und 4.4.5.

[12] Siehe Abschnitt 4.4.4.

[13] Es mag sein, daß schon die Definition der Äquipotenz, d.h. der Relation sm, aus der Sicht Wittgensteins zu verwerfen wäre.

Teil III

Der *Tractatus*

Kapitel 8

Sätze als Bilder

8.1 Die Frage nach dem Sinn

Ein wesentlicher Zweck der Philosophie ist es, den generativen Charakter unserer Sprache zu erläutern: Menschen können Sätze verstehen, die sie vorher nie gehört haben.[1] Im *Tractatus* folgt Wittgenstein Freges Erläuterung dieses Umstandes: 'Neue Sätze' sind bloß neue Zusammensetzungen 'alter Wörter'. Sind einem beispielsweise die Wörter 'Sokrates', 'jaulender' und 'Hund' bekannt, so ist einem der Satz 'Sokrates ist kein jaulender Hund' unmittelbar verständlich. Diese Erläuterung steht jedoch scheinbar mit dem erwähnten Kontextprinzip im Widerspruch: Einerseits scheint der generative Charakter der Sprache auf der Tatsache zu beruhen, daß in der Sprache zu einem gegebenen Zeitpunkt eine Menge von Wörtern existiert, deren Bedeutung im voraus bestimmt ist, aber andererseits scheinen Wörter nur im Satzzusammenhang etwas zu bedeuten. Daß die einzelnen Wörter etwas bedeuten, besagt jedoch nur, daß es im voraus bestimmt ist, wie die Wörter zum Sinn derjenigen Sätze beitragen, in denen sie sinnvoll vorkommen können. Folglich ist das Problem zu erörtern, wie diese Beiträge bestimmt sind.

Dieses Problem ließe sich verhältnismäßig einfach durch die Annahme der Existenz einiger Basissätze lösen, deren Sinn im voraus bestimmt wäre, wobei die Bestimmung des Sinnes dieser Sätze nicht davon abhängen darf, wie die in den Basissätzen vorkommenden Wörter zum Sinn anderer Sätze, in denen sie vorkommen können, beitragen. Darüber hinaus müßte jeder Ausdruck unserer Sprache mindestens in einem Basissatz vorkommen. Anhand solcher Basissätze wäre es möglich, die Bedeutung aller Ausdrücke unserer Sprache zu erläutern, wodurch der Sinn aller möglichen Sätze bestimmt wäre.

[1] Dieses Kapitel stellt eine dem Zwecke dieser Arbeit angepaßten Paraphrase von (Brock, 1986) dar.

Ganz so einfach läßt sich die Fragestellung jedoch nicht lösen. Denn wie ist es möglich, ohne Verwendung eines allgemeinen Begriffs des Satzsinnes den Sinn der Basissätze festzulegen? Letzteres wäre unzulässig, weil es das erklärte Ziel ist zu erläutern, wie es *überhaupt* möglich ist, einem Satz einen bestimmten Sinn zu geben. D.h. bestünde das Problem bezüglich des Satzsinnes nur in der Erläuterung des Sinnes der Sätze einer Sprache (Metasprache) mit Hilfe der Sätze einer *zweiten* Sprache (Objektsprache), so ließe es sich verhältnismäßig einfach lösen. Das Problem ist aber tiefergehend.

8.2 Elementarsätze

Im *Tractatus* wird keines der beiden Prinzipien verworfen, die zusammen zum obigen Problem Anlaß geben, sondern es wird der Versuch unternommen, das Problem durch die Einführung der Kategorie der *Elementarsätze* zu lösen. Diese Sätze sollen die Rolle einnehmen, welche den Basissätzen zugedacht war, indem ihr Sinn jedoch im Unterschied zu den Basissätzen nicht durch einen deskriptiven Sprachgebrauch sondern qua einer Kenntnis logischer Strukturen bestimmt ist.

Der Elementarsatz besteht laut Wittgenstein aus Namen. "Er ist ein Zusammenhang, eine Verkettung, von Namen" (*TLP* 4.22). Wie schon erwähnt werden Sätze mit Bildern verglichen. Eingeleitet wird der *Tractatus* mit der Bemerkung, die Welt sei alles, was der Fall ist. Sie ist die Gesamtheit der Tatsachen (*TLP* 1–1.1), welche wiederum durch das Bestehen von Sachverhalten bestimmt sind (*TLP* 2). In den Paragraphen 2.1 erläutert Wittgenstein das Abbilden. Ein Bild besteht darin, daß sich seine Elemente in bestimmter Art und Weise zueinander verhalten. Im Falle der Elementarsätze sind die Namen die Elemente des Bildes. In *Tractatus* 2.15 schreibt Wittgenstein: "Daß sich die Elemente des Bildes in bestimmter Art und Weise zu einander verhalten, stellt vor, daß sich die Sachen so zu einander verhalten." Dieser Zusammenhang der Elemente des Bildes wird als seine Struktur bezeichnet und "die Möglichkeit, daß sich die Dinge so zu einander verhalten, wie die Elemente des Bildes"(*TLP* 2.51), heißt seine Form der Abbildung. Die abbildende Beziehung besteht aus den Zuordnungen der Elemente des Bildes und der Objekte. An dieser Stelle des *Tractatus* wird aus der Sicht vieler Interpretationen angewiesen, wie die Sprache mit der Welt Fühlung bekommt, und darauf aufmerksam gemacht, daß diese Fühlung einzig und allein durch die Festsetzung einer Reihe von Zuordnungen von Namen und Objekten etabliert wird.[2] Durch die Festsetzung der Zuordnungen ist der

[2]Siehe beispielsweise Harrison (1979, Kap. 13), Hacker (1997, Kap. III) Pears (1987, Kap. 5).

Sinn der Elementarsätze bestimmt, so heißt es laut dieser Auffassung, weil Namen und zugeordnete Objekte im voraus gewisse strukturelle bzw. kombinatorische Möglichkeiten besitzen. Wittgenstein beantwortet mit anderen Worten aus der Sicht dieser Interpretation nicht die Frage, wie durch eine bloße Zuordnung von Namen mit Objekten eine Übereinstimmung zwischen der Art und Weise, wie Namen zu sinvollen Sätzen zusammengesetzt werden können, und der Art und Weise, wie Objekte in Sachverhalte einhergehen können, sichergestellt ist.

Die Elementarsätze sind laut dieser Aufassung von ganz anderer Art als gewöhnliche Sätze, weil Wörter gewöhnlicher Sätze sich nicht auf gleiche Art und Weise zueinander verhalten, wie die Dinge in den dargestellten Sachverhalten. Beispielsweise ist die formale Wiedergabe des (gewöhnlichen) Satzes 'Die Katze ist auf der Matte' 'aRb', wobei 'a' die Katze und 'b' die Matte bedeutet. Der dargestellte Sachverhalt besteht nur aus diesen beiden Objekten, weshalb im Satz das Zeichen 'R' keine Relation bzw. Beziehung vertritt, welches im *Tractatus* folgendermaßen zum Ausdruck gebracht wird:[3]

> "Nicht: »Das komplexe Zeichen >aRb< sagt, daß a in der Beziehung R zu b steht«, sondern: *Daß* »a« in einer gewissen Beziehung zu »b« steht, sagt, *daß* aRb"(*TLP* 3.1432).

Deshalb wird in den Paragraphen 2.16 durch die Einführung einer Distinktion zwischen Form der Abbildung und logischer Form von Wittgenstein angewiesen, daß eine völlige Übereinstimmung zwischen der Art und Weise, wie Namen sich in Sätzen zueinander verhalten, und der Art und Weise, wie Objekte sich in Sachverhalten zueinander verhalten, keine notwendige Bedingung für das Vermögen des Satzes, den Sachverhalt darzustellen, sein kann. Somit erweist sich die obige Interpretation als ungenügend: Wird die Identität zwischen den Kombinationsmöglichkeiten der Namen und der Objekte als Bedingung der Abbildung verworfen, so scheint mehr als eine bloße Zuordnung von Namen mit Objekten nötig zu sein, um aus einer Zusammensetzung von Namen eine Darstellung eines Sachverhaltes zu machen.

Die Zuordnungen, von den in den Paragraphen 2.15 die Rede ist, sind also nicht bloß Zuordnungen: Damit Namen in Sätzen Objekte vertreten können, muß bestimmt sein, welche Möglichkeiten der Namenkombination zu Sätzen welche Möglichkeiten der Objektkombination zu Sachverhalten darstellen. Keine bloße Zuordnung von Namen mit Objekten vermag in der Abwesenheit einer Zuordnung der Möglichkeiten der Kombination, Namen zu Vertretern von Objekten zu machen. Beziehungen zwischen Sätzen und dargestellten Sachverhalten können nicht unabhängig von ähnlichen Beziehungen

[3] Anders ausgedrückt: Es gibt in der Welt keine Relations-Terme.

zwischen anderen Sätzen und Sachverhalten etabliert werden: Die kleinste Einheit, wodurch die Sprache mit der Wirklichkeit Fühlung bekommt, ist deshalb immer eine ganze Möglichkeitsstruktur; eine Gruppe von Möglichkeiten der Zeichenkombination wird *so* auf eine Gruppe von Möglichkeiten der Objektkombination bezogen, *daß* eine bijektive Zuordnung zwischen den einzelnen Möglichkeiten der beiden Gruppen besteht.

8.3 Der logische Raum

Es ist als Bedingung angegeben worden, die Bestimmtheit des Sinnes der Elementarsätze ohne Hilfe eines deskriptiven Sprachgebrauchs zu erläutern. Ein Verweis auf solch eine Art des Sprachgebrauchs würde einen Begriff des Satzsinnes voraussetzen, welches in diesem Zusammenhang unzulässig wäre, weil es die Aufgabe ist zu erläutern, was es heißen will, daß ein Satz einen bestimmten Sinn hat. Stattdessen wird im *Tractatus* der Versuch unternommen, das Problem zu lösen, indem auf unser Vermögen verwiesen wird, eine unsagbare Kenntnis bestimmter Strukturen zu besitzen; d.h. Strukturen, die wir nicht in dem Sinne kennen, daß wir sie beschreiben können. Die Vorkommnisse der Welt sind uns durch ihre gegenseitige Unterschiedlichkeit bekannt. Wir können Unterschiede kennen, ohne sie beschreiben zu können, weil wir Unterschiede kennzeichnen können, ohne sagen zu können, worin der Unterschied besteht. Als Beispiel kann man an die Erdkugel denken. Durch Angabe von Längen- und Breitengrad lassen sich alle unterschiedlichen Möglichkeiten der Position auf dem Erdball kennzeichnen. Die Möglichkeit, auf diese Art und Weise eine Position zu kennzeichnen, führt jedoch nicht die Möglichkeit der Beschreibung der Position mit sich.

Die Anfangsparagraphen des *Tractatus* (*TLP* 1–2.063) lassen sich vor diesem Hintergrund interpretieren: In diesem Teil des Werkes wird ein Zug der Wirklichkeit gekennzeichnet, welcher es ermöglicht, in Übereinstimmung mit der angegebenen Bedingung die Bestimmtheit des Satzsinnes zu erläutern. Folgendes wird in diesen Paragraphen gekennzeichnet: Die Möglichkeit zu erkennen, *daß* bestimmte Strukturen in der Welt bestehen, ist vor der Möglichkeit gegeben zu wissen, *wie* diese Strukturen sind:

> “Die »Erfahrung«, die wir zum Verstehen der Logik brauchen, ist nicht die, daß sich etwas so und so verhält, sondern, daß etwas *ist*: aber das ist eben *keine* Erfahrung.
> Die Logik ist *vor* jeder Erfahrung – daß etwas *so* ist. Sie ist vor dem Wie, nicht vor dem Was”(*TLP* 5.552).

Was in den Paragraphen 1–2.063 gekennzeichnet bzw. entfaltet wird, ist der

Begriff des logischen Raumes, einer Gruppe von Möglichkeiten für Objekte hervorzutreten. Dieser Begriff ist nicht aus Wittgensteins eigenem Geiste entsprungen, sondern ein Begriff aus der theoretischen Physik. Es war unter anderem Lagrange und Hamilton gelungen, eine Reformulation der Newtonschen Mechanik durchzuführen, wodurch sich eine neue Methodologie der Darstellung physikalischer Phänomene ergeben hatte, welche von Hertz und Boltzmann angewendet wurde: der Begriff des Phasenraums.[4] Ein Phasenraum ist die Angabe sämtlicher verschiedener, möglicher Zustände, in denen sich ein bestimmtes physikalisches System befinden kann. Der Zustand des Systems kann zeitlich innerhalb dieser Möglichkeiten variieren, d.h. es kann eine Bewegung des Zustandes im Phasenraum stattfinden, weshalb z.B. Hertz in diesem Zusammenhang von dynamischen Modellen physikalischer Systeme sprach. Wittgenstein erweiterte den Begriff des Modells der Physik, den er in den Werken von Hertz und Boltzmann vorfand, zu einem allgemeinen Begriff der Wirklichkeitsdarstellung, indem er Sätze als Bilder bzw. Modelle auffaßte.[5]

8.3.1 Die Ballistik

Ein illustratives Beispiel der Art und Weise, wie wir die Wirklichkeit modellieren, bietet die Ballistik. Die praktische Notwendigkeit, Methoden zur genauen Bestimmung der Bewegung eines Projektils wie einer Kanonenkugel zu entwickeln, hatte zur Folge, daß dieser Zweig der Mechanik zur eigenen Disziplin wurde (Knudsen und Pedersen, 1969, S. 5). Es ist nicht unmittelbar gegeben, wie die Bewegung eines Projektils aufzufassen ist. Erst mit Hilfe eines Modells des Sachverhalts läßt sich eine eindeutig bestimmte Bewegegung darstellen. So wird in unserem Falle normalerweise im voraus angenommen, daß das Projektil der Masse m sich in einer Ebene bewegt, dessen Positionen durch Koordinaten der Länge x und Höhe y gekennzeichnet werden. Zudem wird für jeden Zeitpunkt t der Bewegung eine bestimmte Position (x, y) angegeben, wobei $t_0 = 0$ als Zeitpunkt des Abschusses und $\vec{r_0} = (x_0, y_0) = (0, 0)$ als Abschußort festgesetzt wird. Eine ballistische Bewegung besteht somit in der Angabe einer Reihe von zusammengehörigen Zeiten und Positionen und wird im (x, y)-Koordinatensystem dargestellt (siehe Abbildung 8.1).

Dieses Koordinatensystem ist der Phasenraum der Ballistik bzw. der logische Raum der Ballistik. Den möglichen Bewegungen ist auf diese Art und Weise im voraus eine bestimmte Form gegeben: Jeder möglichen Bewegung

[4]In den *Prinzipien der Mechanik* von Hertz ist vom Begriff des Konfigurationsraum die Rede. Der Unterschied ist in diesem Zusammenhang jedoch uninteressant.

[5]Wittgenstein verweist in Paragraph 4.04 auf "Hertz's Mechanik, über Dynamische Modelle". Dieser Paragraph wurde auf Seite 58 vollständig zitiert.

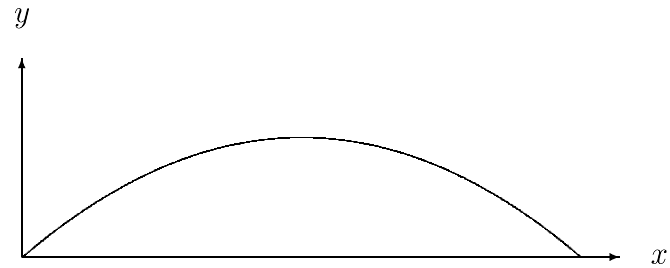

Abbildung 8.1: Logischer Raum der Ballistik

entspricht eine geometrische Konfiguration – eine Bahn – im Koordinatensystem. Zwar können die ballistischen Bewegungen anders dargestellt werden, d.h. diese Form der Darstellung ist eine Konvention, die uns jedoch erlaubt, etwas über die Wirklichkeit zu erfahren: Wir haben nicht festgelegt, daß die Bewegungsbahnen als bestimmte geometrische Kurven hervortreten.

Durch Anwendung der Newtonschen Gesetze und mit Hilfe der Annahme, daß das Projektil der Masse m nur unter dem Einfluß der Schwerkraft $m \cdot \vec{g}$ steht, lassen sich die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = 0$$
$$\ddot{y} = -g$$

für das Projektil aufstellen. Das Lösen des Gleichungssystems ergibt die Bewegungsbahn als Funktion der Zeit t:

$$x = x_0 + v_{0x}t = v_{0x}t$$
$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

wobei $\vec{v_0} = (v_{0x}, v_{0y})$ der Geschwindigkeitsvektor des Projektils zum Zeitpunkt des Abschusses ist. Wird der Winkel zwischen $\vec{v_0}$ und x-Achse mit α bezeichnet und t aus den Gleichungen eliminiert, so läßt sich die Bahngleichung auf folgende Form bringen:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha} \cdot x^2 + x\, tg\, \alpha$$

d.h. die Bewegungsbahn eines Geschosses im homogenen Schwerefeld ist eine Parabel, die durch den Abschußort $(0, 0)$ verläuft. Darüber hinaus schneidet diese Parabel die x-Achse im Punkt $(R, 0)$, wobei die Schußweite R durch die Gleichung

$$R = \frac{v_0^2\, sin\, 2\alpha}{g}$$

bestimmt ist.[6]

Während die Form der Darstellung nur nach ihrer Zweckmäßigkeit zu bewerten ist, müssen die Newtonschen Gesetze darüber hinaus die Forderung der Richtigkeit erfüllen, d.h. anhand der Gesetze muß es möglich sein, Vorhersagungen über Phänomene in der Natur zu machen.[7] So können wir beispielsweise durch Versuche überprüfen, ob der experimentelle Wert der Schußweite eines Projektils R beträgt. Sollte dies nicht der Fall sein, werden jedoch nicht die Newtonschen Gesetze sondern es wird die Annahme verworfen, daß auf das Projektil nur die Schwerkraft wirkt. Eine Gesetzmäßigkeit ist also keine Erfahrungssache, sondern durch Gesetzmäßigkeiten werden Bedingungen aufgestellt, die es uns ermöglichen, etwas über die Wirklichkeit zu erkennen.[8] So können wir beispielsweise durch die Abweichung der Bewegungsbahn eines Geschosses von einer parabolischen Bahn das Bestehen der Wirkung einer zweiten Kraft – dem Luftwiderstand – erkennen. Wittgenstein spricht hier davon, daß die Newtonsche Mechanik wie ein Netz ist, das wir in die Welt werfen (*TLP* 6.341–6.361). Durch ein Netz ist die Weltbeschreibung auf eine einheitliche Form gebracht. Die Erfahrung, die wir uns anhand des Netzes machen, ist, daß bestimmte Positionen des Netzes in bestimmten Situationen erfüllt sind und andere es nicht sind, d.h. bestimmte Sätze sind wahr und andere falsch. Die Newtonsche Mechanik ist in diesem Zusammenhang "ein Versuch, alle *wahren* Sätze, die wir zur Weltbeschreibung brauchen, nach Einem Plane zu konstruieren"(*TLP* 6.343). Die Newtonsche Form der Weltbeschreibung ist jedoch beliebig, d.h. die Newtonsche Mechanik ist nur ein mögliches Netz unter vielen. Durch unterschiedliche Netze können verschiedene Züge der Wirklichkeit eingefangen werden; ohne Gebrauch irgendeines Netzes kann man gar nichts einfangen. Ein logischer Raum nimmt somit die gleiche Rolle wie die Kantschen Kategorien ein, d.h. der Raum ist selbst keine Erfahrungssache sondern setzt Bedingungen, die erst Erfahrungen einer bestimmten Form ermöglichen. Im folgenden Abschnitt wird Wittgensteins Begriff des logischen Raumes mit Hilfe eines weiteren Beispiels aus der Physik – Coulombs Gesetz – näher erläutert.

8.3.2 Sachlage, Sachverhalt und Tatsache

Die Kraft $\vec{F}_{21}$ mit der eine elektrische Punktladung q_1 auf eine Punktladung q_2 wirkt ist infolge Coulombs Gesetz durch die Formel

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2 q_1}{r_{21}^3}\vec{r}_{21}$$

[6] Siehe Knudsen und Pedersen (1969, S. 5–6) für Details.

[7] Es wird also *nicht* nach der Wahrheit bzw. Richtigkeit der Gesetze gefragt.

[8] Hier erweist sich die Frage nach der Wahrheit der Gesetze als unsinnig.

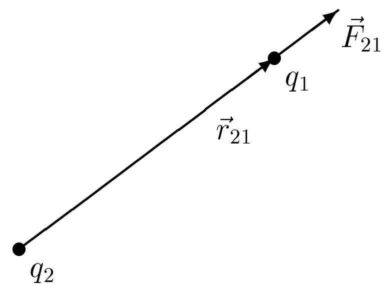

Abbildung 8.2: Die Kraft zwischen zwei Punktladungen

bestimmt, wobei durch den Vektor $\vec{r}_{21}$ die Linie von q_2 nach q_1 angegeben wird.[9] Der gesetzmäßige Zusammenhang zwischen den Punktladungen q_1 und q_2 ist in Abbildung 8.2 dargestellt. Diese Abbildung stellt eine sogenannte Sachlage dar: eine bestimmte Möglichkeit des Zusammenhanges von (zwei) Gegenständen einer bestimmten logischen Form. Die Gegenstände selbst sind im Zusammenhang unbestimmt, d.h. nur ihre Form ist bestimmt. In unserem Beispiel ist die Form der Gegenstände durch den Ausdruck 'Punktladung einer bestimmten Größe' gegeben. Wären partikuläre Gegenstände bestimmt, so würde die Abbildung stattdessen einen Sachverhalt darstellen: eine bestimmte Möglichkeit des Verbandes zwischen bestimmten Gegenständen. Die Struktur des Sachverhaltes ist die Art und Weise, wie die an sich strukturlosen Gegenstände im Sachverhalt zusammenhängen (*TLP* 2.02, 2.032). Der Sachverhalt ist eine Möglichkeit, die entweder der Fall ist oder nicht der Fall ist. Ein bestehender Sachverhalt wird als Tatsache bezeichnet (*TLP* 2). Der Zusammenhang zwischen diesen Begriffen und dem Begriff des logischen Raumes läßt sich anhand von Abbildung 8.3 erläutern.[10]

Die Abbildung stellt einen logischen Raum dar. Jede Position des logischen Raumes, jeder logische Ort, wird von einer Sachlage ausgemacht (*TLP* 3.4, 4.031). Jede Achse des Raumes entspricht einer bestimmten logischen Form von Gegenständen, d.h. die Punkte einer Achse enstprechen allen Möglichkeiten des Verbandes in Sachverhalten eines Gegenstandes einer bestimmten Form (*TLP* 2.0123, 2.013, 2.0141). Die Form des Gegenstandes ist die Möglichkeit seines Vorkommens in Sachverhalten (*TLP* 2.0141), d.h. jeder Gegenstand ist "in einem Raume möglicher Sachverhalte"(*TLP* 2.013). Beispiele solcher Räume wären der Farbenraum und der logische Raum der Ballistik, wobei die Gesamtheit dieser Räume aus der Sicht Wittgensteins

[9]Siehe Grant und Phillips (1995, S. 3). Die Größen sind in SI-Einheiten angegeben.
[10]Die (geringfügig veränderte) Abbildung 8.3 ist aus Brock (1986, S. 209) entnommen.

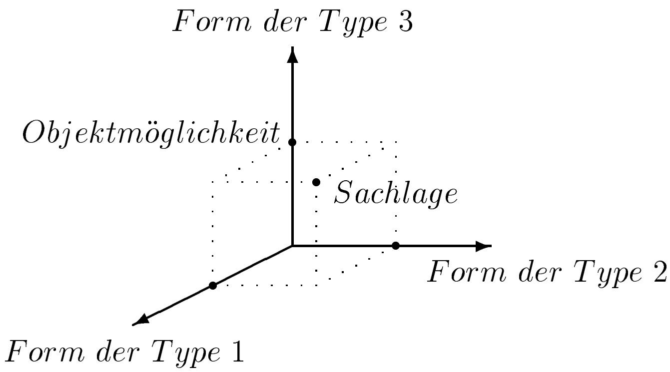

Abbildung 8.3: Logischer Raum

den logischen Raum ausmacht.

8.3.3 Logische Form als Bedingung des Abbildens

Entscheidend ist, daß vor diesem Hintergrund das Abbilden bzw. die Bestimmtheit des Satzsinnes zu verstehen ist: Das Bild (der Satz) stellt eine mögliche Sachlage im logischen Raum dar (*TLP* 2.202), wobei der Inhalt bzw. die Bestimmtheit des Bildes (Satzes) durch folgende Tatsache ausgemacht wird:

> "Was jedes Bild, welcher Form immer, mit der Wirklichkeit gemein haben muß, um sie überhaupt – richtig oder falsch – abbilden zu können, ist die logische Form, das ist, die Form der Wirklichkeit.
> Ist die Form der Abbildung die logische Form, so heißt das Bild das logische Bild"(*TLP* 2.18–2.181).

Um überhaupt ein Bild des Abgebildeten sein zu können, müssen die logische Struktur des Bildes (Satzes) und des Abgebildeten als identisch aufgefaßt werden können. Bild (Satz) und Abgebildetes müssen beide Wert einer bestimmten Möglichkeit der Struktur sein (*TLP* 2.202, 2.203); beide müssen die gleiche (mögliche) Sachlage darstellen können. Ist zwar übereinstimmende logische Form eine notwendige Bedingung für das Vermögen des Bildes, Bild des Abgebildeten zu sein, so ist sie, wie aus Abschnitt 8.4 hervorgehen wird, jedoch nicht hinlänglich.

8.3.4 Räume als Voraussetzung der Verneinung

Es wurde auf Seite 89 angesprochen, daß es aus der Sicht des *Tractatus* unmöglich ist, Sachverhalte isoliert voneinander zu kennen, d.h. ich kenne einen

Sachverhalt nur innerhalb eines logischen Raumes. Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir beispielsweise nicht das Verneinen erläutern: Die Verneinung eines Sachverhaltes ist kein anderer Sachverhalt, sondern eine Aufhebung des Sachverhaltes. Eine Aufhebung, die voraussetzt, daß außer des (verneinten) Sachverhaltes andere Möglichkeiten bestehen (*TLP* 3.42, 2.0122). Ein Satz weist auf einen Ort im logischen Raume hin. Dem logischen Ort entspricht ein Sachverhalt, d.h. eine mögliche aber nicht unbedingt realisierte Struktur. Den Satz verneinen heißt den Ort ausschließen. Der mögliche Sachverhalt wird sozusagen durch die Angabe eines Lochs im logischen Raume ausgeschlossen. Löcher setzen jedoch Umgebung voraus, in denen sie Loch sind. Das Ausschließen eines bestimmten Verhältnisses setzt die Bestimmtheit der übrigen möglichen Sachverhalte voraus. Was die Alternativen zum Ausgeschlossenen sind, darf nicht unbestimmt sein, weshalb logische Räume für Sachverhalte wesentlich bzw. notwendig sind (*TLP* 2.05, 1.12, 1.13, 3.42).

8.4 Das Beispiel des Autounfalls

In Abschnitt 8.3.3 wurde erläutert, weshalb übereinstimmende logische Form zwischen Bild und Abgebildetem eine notwendige Bedingung ausmacht. Um verstehen zu können, weshalb diese Bedingung vom Standpunkt Wittgensteins nicht hinlänglich ist, wird dem Rat des Paragraphen 3.1431 gefolgt:

> "Sehr klar wird das Wesen des Satzzeichens, wenn wir es uns, statt aus Schriftzeichen, aus räumlichen Gegenständen (etwa Tischen, Stühlen, Büchern) zusammengesetzt denken. Die gegenseitige räumliche Lage dieser Dinge drückt dann den Sinn des Satzes aus"(*TLP* 3.1431).

Im Zitat wird folgende Art Modell hervorgehoben, um das Wesen des Satzes zu verdeutlichen: Die Verwendung der Anordnung von Bauklötzen auf einer Ebenen zur Darstellung der gegenseitigen räumlichen Lagen einer Gruppe von Gegenständen – z.B. Autos an einem Unfallort, um an ein Beispiel aus Wittgensteins Tagebücher der Jahre 1914–16 anzuknüpfen (Wittgenstein, 1997b, 29.9.14, S. 94–95). Wir können eine allgemeine Regel angeben, welche Anordnungen von Bauklötzen auf den Unfallort projiziert, indem den Autos Klötze zugeordnet werden und festgesetzt wird, daß die gegenseitige räumliche Lage der Klötze darstellen soll, wie die Autos sich zum Zeitpunkt des Unfalls zueinander verhalten haben.[11] Daß der rechts von Klotz 1 gelegene Klotz 2 entlang einer Geraden doppelt so weit von Klotz 1 entfernt ist wie

[11] Die folgenden Erläuterungen sind vor dem Hintergrund von Ricketts (1996, S. 76–9) gefertigt.

der von Klotz 1 links gelegene Klotz 3 kann beispielsweise darstellen, daß das Auto 2 entlang einer Geraden doppelt so weit zur rechten von Auto 1 entfernt ist wie das von Auto 1 links gelegene Auto 3. Obwohl diese Regel der Projektion zwar einleuchtet, so ist sie jedoch nicht die einzige. So kann die Anordnung der Bauklötze auch verwendet werden, um darzustellen, daß die Autos sich wie das Spiegelbild der Klötze zueinander verhalten. Daß der rechts von Klotz 1 gelegene Klotz 2 entlang einer Geraden doppelt so weit von Klotz 1 entfernt ist wie der von Klotz 1 links gelegene Klotz 3 stellt beispielsweise dar, daß das Auto 2 entlang einer Geraden doppelt so weit zur *linken* von Auto 1 entfernt ist wie das von Auto 1 *rechts* gelegene Auto 3.

Beide Regeln zur Projektion von Anordnungen von Klötzen auf den Unfallort machen von der folgenden Voraussetzung gebrauch: Jeder Klotz kann sich *so* zu den übrigen Klötzen verhalten, wie jedes Auto sich zu den übrigen Autos verhalten kann. Ergo kann jede allgemeine Regel der Projektion, welche bijektiv jeder möglichen Anordnung von Klötzen eine mögliche Anordnung von Autos zuweist, verwendet werden, um Anordnungen von Klötzen auf den Unfallort zu projizieren. Die Möglichkeit der gleichen räumlichen Anordnungen ist die Form der Abbildung, welche es den Anordnungen der Klötze qua einer der beiden Projektionsregeln ermöglicht, die räumliche Anordnung der Autos zu modellieren. Durch eine Übereinstimmung in der Form der Abbildung ist nicht festgelegt, wie das Bild mit der abgebildeten Wirklichkeit zu vergleichen ist. Die Übereinstimmung ist stattdessen eine Bedingung für das Vermögen des Bildes die Wirklichkeit so darzustellen, wie dies eben der Fall ist. Sie ist die Bedingung für das Aufstellen einer der Regeln aus einer Familie von Regeln der Projektion.

Übereinstimmende Form der Abbildung garantiert (normalerweise) verschiedene Möglichkeiten der Projektion von Anordnungen der Bild-Elemente auf die abgebildete Wirklichkeit. Außerdem kann ein Bereich von Sachverhalten durch Bilder unterschiedlicher Form der Abbildung auf unterschiedliche Weise dargestellt werden. Die Bilder können mehr oder weniger mit dem Abgebildeten gemein haben. Die logische Form ist die minimale formale Ähnlichkeit zwischen den Möglichkeiten der Kombination der Bild-Elemente und den Möglichkeiten der Kombination der Dinge, die notwendig ist, um erstere und letztere bijektiv verknüpfen zu können. Folglich sind Übereinstimmung in der logischen Form und die Angabe der angewendeten Regel der Projektion bzw. Abbildung beides notwendige Bedingungen, die nur zusammen hinlänglich sind, um durch eine Anordnung von Bild-Elementen bzw. einer Sequenz von Zeichen einen Sachverhalt vorzeigen zu können.

8.5 Der Sinn des Satzes

Aus dem obigen Beispiel geht hervor, daß Sätze Sequenzen von Zeichen sind, die auf eine bestimmte Art und Weise mit möglichen Sachverhalten verknüpft werden, d.h. Sätze können als Abbildungen möglicher Verhältnisse aufgefaßt werden. Wie man die Photographie eines Sachverhaltes verwenden kann, um dieses Verhältnis vorzuzeigen, so kann der Satz verwendet werden, um einen bestimmten möglichen Sachverhalt vorzuzeigen. Der Sinn des Satzes ist infolge des *Tractatus* der Sachverhalt, den wir mit dem Satz vorzeigen können. Dieses Verhältnis braucht nicht der Fall sein, sondern ist nur eine Möglichkeit. Wenn der Sinn des Satzes der Fall ist, sagen wir, daß der Satz wahr ist. Wenn der Sinn nicht der Fall ist, sagen wir, der Satz sei falsch. Der Satz hat also ob wahr oder falsch den gleichen Sinn, weshalb der Sinn des Satzes von der Wahrheit oder Falschheit des Satzes unabhängig ist. Bevor die Frage nach der Wahrheit oder Falschheit des Satzes gestellt werden kann, muß dem Satz ein Sinn gegeben sein. Folglich vertritt der Satz nicht seinen Sinn wie beispielsweise die Namen, die im Satz ihre Bedeutung vertreten. Denn ist der Satz falsch, so hat er zwar noch immer den gleichen Sinn, aber es gibt in der Welt nichts, was als Sinn des Satzes vorgezeigt werden kann. Der Satz ist mit anderen Worten kein komplexer Name: Es ist unmöglich, auf einen vom Satz externen Sinn zu zeigen. Eben jene Tatsache soll Wittgensteins Vergleich von Satz und Bild erläutern. Wie das durch ein Bild geschilderte Stilleben *im* Bild ist, so ist der Sinn des Satzes *im* Satz. Auch wenn das dargestellte Stilleben vom Maler frei ersonnen ist, mag es vorkommen, daß in der Welt auf Gegenstände gezeigt werden kann, denen Bestandteile des Bildes wie beispielsweise Äpfel oder Bananen entsprechen. Es kann aber auf nichts in der Welt gezeigt werden, welches dem Bild als Ganzes entspricht. Trotzdem stellt das Bild ein Stilleben dar, einen möglichen Sachverhalt. Das dargestellte Stilleben besteht jedoch nicht irgendwo außerhalb des Bildes sondern im Bild selbst bzw. in der Anordnung der Elemente des Bildes (*TLP* 3.1431). Die Relation zwischen Satzsinn und Satz ist mit anderen Worten nicht extern sondern intern. Der Sinn des Satzes besteht in der gegenseitigen Anordnung der Satzzeichen und ist kein etwas, keine unabhängige Größe, welche dieser Anordnung enspricht.

In diesem Kapitel wurde erläutert, wie aus der Sicht Wittgensteins der Sinn der Elementarsätze bestimmt ist. Im folgenden Kapitel wird dargestellt, wie Wittgenstein die anderen Sätze unserer Sprache als Wahrheitsfunktionen der Elementarsätze bestimmt.

Kapitel 9

Sätze als Wahrheitsfunktionen

9.1 Sinn und Wahrheitswertigkeit

Es ging aus dem vorigem Kapitel hervor, daß der Sinn des Satzes nicht etwas ist, was dem Satz entspricht, sondern ein Satz hat Sinn, wenn er – "wie ein lebendes Bild"(*TLP* 4.0311) – einen möglichen Sachverhalt vorzeigt. Ein Satz ist wahr, "wenn es sich so verhält, wie wir es durch ihn sagen"(*TLP* 4.062). Umgekehrt kann man sagen, daß wenn ein Satz wahr ist, das Satzzeichen einen Sinn vorzeigt, der der Fall ist. Wenn der Satz falsch ist, so zeigt er einen Sinn vor, der nicht der Fall ist. Folglich heißt einen Satz verstehen bzw. den Sinn des Satzes kennen, "wissen was der Fall ist, wenn er wahr ist"(*TLP* 4.024). Wissen, was der Fall ist, wenn der Satz wahr ist, heißt jedoch auch Wissen, was der Fall ist, wenn er falsch ist. Ergo besteht eine interne Relation zwischen der Wahrheitswertigkeit des Satzes, dem Vermögen des Satzes, entweder wahr oder falsch zu sein, und dem Sinn des Satzes. Denn hat der Satz einen Sinn, so ist er wahrheitswertig. Ist der Satz andererseits wahrheitswertig, so können wir den Sinn des Satzes bestimmen, indem wir angeben, was den Satz wahr machen würde im Gegensatz zu dem, was ihn falsch machen würde. Wittgenstein spricht in diesem Zusammenhang davon, daß ein Satz zwei Wahrheitsmöglichkeiten besitzt, zwei Pole hat: einen Wahr-Pol und einen Falsch-Pol. Wie sich anhand der Pole der Elementarsätze zusammengesetzte Sätze bilden lassen, wird im nächsten Abschnitt geschildert.

9.2 Wahrheitsfunktionen, -operationen und -tabellen

Die Sätze unserer Umgangssprache verschleiern aus der Sicht des *Tractatus* ihre eigene logische Form. Durch logische Klärung bzw. Analyse der Sätze kann jedoch die logische Form der Sätze zum Vorschein gebracht werden. Das Beispiel *par excellence* für logische Klärung von Sätzen, für Philosophie als Tätigkeit, bietet laut Wittgenstein Russells *Theory of Description*: "Russells Verdienst ist es, gezeigt zu haben, daß die scheinbare logische Form des Satzes nicht seine wirkliche sein muß"(*TLP* 4.0031). Die grammatische Form des Satzes scheint nur seine logische Form zu sein. So wird durch die grammatische Form verschleiert, daß Sätze aus Elementarsätzen zusammengesetzt sind. Die Elementarsätze sind nicht weiter analysierbar, weil sie die kleinsten Einheiten ausmachen, durch welche die Sprache mit der Wirklichkeit Fühlung bekommt (Kapitel 8). Gibt Wittgenstein zwar kein konkretes Beispiel für einen Elementarsatz, so weist er jedoch auf, welche Beziehung zwischen einem zusammengesetzten Satz und den Elementarsätzen, aus denen der Satz zusammengesetzt ist, besteht:

> "Der Satz ist eine Wahrheitsfunktion der Elementarsätze. (Der Elementarsatz ist eine Wahrheitsfunktion seiner selbst.)"(*TLP* 4.53).

Eine Wahrheitsfunktion der Elementarsätze wird durch eine Wahrheitsoperation an den Wahrheitsmöglichkeiten bzw. den Wahr- und Falsch-Polen der Elementarsätze gebildet: Der Sinn der Wahrheitsfunktion, die Bedingungen der Wahrheit oder Falschheit der Wahrheitsfunktion, sind durch die Wahrheitsoperation anhand der Wahrheitsmöglichkeiten der Elementarsätze bestimmt. Die Verneinung ist beispielsweise eine Wahrheitsoperation, die den Sinn eines Satzes umkehrt: Die Verneinung eines Satzes ist nur dann wahr, stimmt nur dann mit der Wirklichkeit überein, falls der verneinte Satz nicht wahr ist, nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Und die Konjunktion mehrerer Sätze stimmt nur mit der Wirklichkeit überein, falls jeder der konjungierten Sätze wahr ist. Aus diesen Formulierungen ist zu ersehen, daß die Anwendbarkeit der Wahrheitsoperationen nicht auf Elementarsätze begrenzt ist. Wahrheitsoperationen können fortgesetzt angewendet werden, d.h. aus Wahrheitsfunktionen der Elementarsätze können wiederum Wahrheitsfunktionen derselben gebildet werden (*TLP* 5.31). Es ist mit anderen Worten von Wittgenstein erläutert worden, wie der Sinn der (komplexen) Sätze durch den Sinn der Elementarsätze bestimmt ist. Wittgensteins Verwendung der heutzutage wohlbekannten Wahrheitstabellen in den Paragraphen 4.4 ist darauf ausgerichtet, die logische Form der zusammengesetzten Sätze, in welchen keine Allgemeinheitsbezeichnungen vorkommen, zum Vorschein zu bringen.[1] Die Wahrheitstabellen von Wittgenstein sind als Alternative zu den jeweiligen Notationsweisen von Frege und Russell gedacht. Stellen letztere zwar Sätze zweckmäßiger vor als die Umgangssprache, so verschleiern sie jedoch aus der Sicht Wittgensteins im Gegensatz zu den Tabellen noch immer die logische Form der Sätze, weshalb der Symbolismus des *Tractatus* in dieser Hinsicht zweckmäßiger als die Begriffschriften von Frege und Russell ist. Die Zweckmäßigkeit des *Tractatus*-Symbolismus wird in Abschnitt 9.3 erörtert.

Sind ‘p’ und ‘q’ Elementarsätze, so bezeichnet Russell beispielsweise die Disjunktion von ‘p’ mit der Verneinung von ‘q’ durch ‘$p \vee \sim q$’, während Frege diesen Satz in seiner Begriffschrift durch ‘$\vdash\!\!\!\begin{array}{l} \overline{\quad\;\;} p, \\ \quad\llcorner\, q \end{array}$’ wiedergibt. Durch Verwendung einer Wahrheitstabelle ersetzt Wittgenstein diese komplexen Zeichen der Begriffschriften von Frege und Russell durch das Satzzeichen:

p	q	
W	W	W
F	W	F
W	F	W
F	F	W

In der Tabelle bedeutet ‘W’ ‘wahr’ und ‘F’ ‘falsch’. Die Reihen der ‘W’ und ‘F’ unter der Reihe der Elementarsätze bedeuten deren Wahrheitsmöglichkeiten. So stellt beispielsweise die dritte Reihe die Möglichkeit vor, daß der durch den Satz ‘p’ dargestellte Sachverhalt der Fall und der durch ‘q’ dargestellte Sachverhalt nicht der Fall ist. Zusammen stellen die vier Reihen der ‘W’ und ‘F’ alle Wahrheitsmöglichkeiten der beiden Elementarsätze dar. Die letzte Kolonne der Tabelle, die Zuordnung des Zeichens ‘W’ oder ‘F’ zu den Wahrheitsmöglichkeiten, drückt die Wahrheitsbedingungen und folglich den Sinn des zusammengesetzten Satzes aus: Ist einer Wahrheitsmöglichkeit das Zeichen ‘W’ bzw. ‘F’ zugeordnet, so stimmt bzw. stimmt der Satz nicht mit der Wirklichkeit überein, falls die Möglichkeit der Fall ist. Beispielsweise stimmt der Satz mit der Wirklichkeit überein, falls die dritte Wahrheitsmöglichkeit der Fall ist, d.h. falls ‘p’ wahr und ‘q’ falsch ist. Ergo ist der Satz unseres Beispiels wie jeder andere Satz auch ein “Ausdruck der Übereinstimmung und Nichtübereinstimmung mit den Wahrheitsmöglichkeiten der

[1] Welche Wahrheitsfunktionen die allgemeinen Sätze ‘$(x).fx$’ und ‘$(\exists x).fx$’ laut Wittgenstein sind, wird in Kapitel 10 erörtert. Wenn im folgenden von zusammengesetzten Sätzen die Rede ist, so sind zusammengesetzte Sätze ohne Allgemeinheitsbezeichnung gemeint.

Elementarsätze"(*TLP* 4.4). Im *Tractatus* ist die Reihenfolge der Wahrheitsmöglichkeiten der Elementarsätze in der Wahrheitstabelle durch eine Kombinationsregel ein für alle mal festgesetzt (*TLP* 4.31, 4.442), weshalb die letzte Kolonne der Tabelle schon ein Ausdruck der Wahrheitsbedingungen des Satzes ist. Diese Kolonne schreibt Wittgenstein als Reihe hin, wodurch das Satzzeichen unseres Beispiels zu ‘$(WFWW)(p,q)$’ wird.

9.3 Die Zweckmäßigkeit des *Tractatus*

Ob das Satzzeichen ‘$\vdash\!\!\begin{array}{l} p, \\ q \end{array}$’ Freges, ‘$p \vee \sim q$’ Russells oder ‘$(WFWW)(p,q)$’ Wittgensteins, alle sind sie Zeichen des gleichen Satzes, alle drücken sie den gleichen Sinn aus. Durch die Wahrheitstabellen werden jedoch laut Wittgenstein logische Form und Sinn zusammengesetzter Sätze zweckmäßiger vorgestellt als bei Frege und Russell. So lassen sich anhand der Tabellen auf übersichtliche Art und Weise die Wahrheitsbedingungen des komplexen Satzes ersehen, welche infolge des obigen Abschnittes 9.2 den Sinn des Satzes ausmachen. Hierbei ist entscheidend, daß Wittgenstein aus eigener Sicht aufgrund der Zweckmäßigkeit seines Symbolismus bzw. seiner logischen Klärung des Satzes philosophische Probleme und Fragestellungen, welche er in den Werken von Frege und Russell vorfand, nicht zu beantworten, sondern aufzulösen vermochte. In den Kapiteln 6 und 7 wurde vor dem Hintergrund der Schriften von Boltzmann und Hertz auf Wittgensteins Kritik an Frege und Russell aufmerksam gemacht, ohne jedoch diese Kritik Wittgensteins immer gleich vollständig darzustellen. Folgend werden die Auslassungen vor dem Hintergrund des Begriffs des Satzes als Wahrheitsfunktion der Elementarsätze nachgeholt.

9.3.1 Der *Grundgedanke*

Sätze werden von Frege als komplexe Namen der logischen Gegenstände *das Wahre* und *das Falsche* aufgefaßt. In Abschnitt 6.2 wurde geschildert, weshalb Freges Auffassung laut Wittgenstein verwirrt ist: Sätze vertreten nicht logische Gegenstände, sondern bilden mögliche Sachverhalte ab. Ging zwar aus Russells *Theory of Description* hervor, daß er Sätze nicht als komplexe Namen auffaßte, und er deshalb einen besseren Blick für das Wesen des Satzes hatte als Frege, so war jedoch laut Wittgenstein Russells Auffassung noch immer verfehlt, weil er die logischen Konnektive nicht als unvollständige Symbole (*incomplete symbols*) bzw. *leergehende Nebenräder* verstand, die durch Analyse wegzuanalysieren sind, sondern als Namen logischer Gegenstände (Abschnitt 6.3), die im analysierten Satz diese Gegenstände vertreten.

Eben jene Auffassung der logischen Rolle der Konnektive wird von Wittgenstein vor dem Hintergrund des Begriffs des Satzes als Wahrheitsfunktion der Elementarsätze verworfen. Auf der Grundlage der Satzzeichen Russells wie '$\sim f(a)$' oder '$f(a) \vee g(a)$' scheinen Zeichen wie '$\sim$' und '$\vee$' die gleiche logische Rolle zu erfüllen wie das Zeichen 'a', womit Hertz folgend erklärt wäre, weshalb Russell sich irren konnte. Daß er sich irrt, ist aus der Sicht Wittgensteins anhand der Wahrheitstabellen zu ersehen, die so angefertigt sind, daß sie ein logisches Bild des (komplexen) Satzes sind. So enthalten die Tabellen zwar Zeichen 'W' und 'F'. Diese Zeichen vertreten jedoch keine logischen Gegenstände sondern drücken Wahrheitsmöglickeiten und Wahrheitsbedingungen aus. In diesem Zusammenhang wird laut Wittgenstein auch die wahre Funktion der Zeichen '$\sim$', '$\vee$', '$.$' und '$\supset$' offenbart: Sie bezeichnen Wahrheitsoperationen. Welche Operationen beispielsweise '$\sim$' und '$\vee$' bezeichnen, d.h. welche Operation die Negation und welche die Konjunktion ist, wurde in Abschnitt 9.2 erläutert. Mit Hilfe der Wahrheitstabellen kann diese Erläuterung übersichtlich dargestellt werden. Besonders aufschlußreich ist dabei ein direkter Vergleich mit dem Symbolismus Russells: Durch Negation wird der Satz '$(WF)(p)$' bzw. 'p' zum Satz '$(FW)(p)$' bzw. '$\sim p$', durch Konjunktion der Sätze '$(WF)(p)$' bzw. 'p' und '$(WF)(q)$' bzw. 'q' der Satz '$(WWWF)(p,q)$' bzw. '$p \vee q$' gebildet. Der Vergleich verdeutlicht, daß Zeichen für logische Operationen nicht auf gleiche Art und Weise wie die Namen in den Elementarsätzen bezeichnen. Insbesondere benötigt ihre Anwendung außer den Zuordnungen von Namen und Gegenständen, welche Elementarsätze zu Bildern der Wirklichkeit machen, keine zusätzlichen Zuordnungen. Operationszeichen sind deshalb keine Namen logischer Gegenstände, sondern eine Art Interpunktion (*TLP* 5.4611), womit Russells Frage nach dem Wesen der Bedeutungen logischer Konnektive aus der Sicht Wittgensteins als unsinnig erkannt wäre.

9.3.2 Logische Folgerungen

Logische Folgerungen werden laut Frege und Russell auf der Grundlage von Schlußgesetzen gezogen, d.h. logische Beziehungen zwischen Sätzen sind *extern* bestimmt. So besteht beispielsweise infolge dieser Ansicht aufgrund des *Modus Ponendo Ponens* zwischen 'q' und '$p \supset q \,.\, p$' eine externe Beziehung, weshalb sich 'q' aus '$p \supset q \,.\, p$' folgern läßt. In Abschnitt 6.1 wurde Wittgensteins Kritik dieser Auffassung von Frege und Russell erörtert: Schlußgesetze sind überflüssig, weil logische Folgerungen nicht externe sondern interne Relationen ausdrücken. Folglich erfüllen die Gesetze keinen Zweck und können eliminiert werden (*TLP* 5.132), d.h. folgt ein Satz aus einem anderen, so ist dies allein aus den beiden Sätzen zu entnehmen. Beispielsweise wurde in Abschnitt 6.1 dargestellt, wie aus der Sicht Wittgensteins das Folgern von 'q' aus '$p \supset q \,.\, p$' zu verstehen ist: Der Sinn von '$p \supset q \,.\, p$' ist eine Funktion von 'p' und 'q'. Folglich heißt den Sinn des Satzes '$p \supset q \,.\, p$' verstehen den Sinn von 'p' und von 'q' kennen und wissen, welche Funktion von 'p' und 'q' der Satz ist. Dadurch weiß man auch, daß der Sinn von 'q' im Sinn von '$p \supset q \,.\, p$' enthalten ist und somit 'q' aus '$p \supset q \,.\, p$' gefolgert werden kann.

Frege und Russell übersahen laut Wittgenstein, daß logische Folgerungen auf internen Beziehungen zwischen Sätzen beruhen, weil diese internen Beziehungen durch die jeweiligen Bezeichnungsweisen von Frege und Russell verschleiert werden:[2]

> "Wenn wir von p ∨ q und ∼p auf q schließen, so ist hier durch die Bezeichnungsweise die Beziehung der Satzformen von »p ∨ q« und »∼p« verhüllt"(*TLP* 5.1311).

Die Satzzeichen des *Tractatus* beheben durch ihre Zweckmäßigkeit diesen Mangel, will heißen interne Beziehungen zwischen Sätzen treten durch die Tabellen deutlich hervor. So sind aus den Tabellen diejenigen Wahrheitsmöglichkeiten zu ersehen, welche den Satz bewahrheiten. Diese Möglichkeiten, Wahrheitsgründe benannt, erlauben es Wittgenstein das Folgern intern bzw. anhand der Satzzeichen allein zu erläutern: "Sind die Wahrheitsgründe, die einer Anzahl von Sätzen gemeinsam sind, sämtlich Wahrheitsgründe eines bestimmten Satzes, so sagen wir, die Wahrheit dieses Satzes folge aus der Wahrheit jener Sätze"(*TLP* 5.11). Sind insbesondere alle Wahrheitgründe eines Satzes Wahrheitsgründe eines zweiten, so folgt die Wahrheit des zweiten Satzes aus der Wahrheit des ersten, d.h. der zweite Satz folgt aus dem ersten (*TLP* 5.12–5.121). Der Satz ist wahr heißt jedoch, daß sein Sinn der Fall ist, weshalb folgender Zusammenhang besteht: "Folgt p aus q, so ist der Sinn von »p« im Sinne von »q« enthalten"(*TLP* 5.122).

Ersetzen wir in den beiden obigen Beispielen logischer Folgerungen Russells Symbolismus durch Wittgensteins, so sind Wittgensteins Erläuterungen leicht zu verstehen: Fassen wir die Wahrheitsmöglichkeiten von 'p' und 'q' als Basis auf, so ist 'q' die Wahrheitsfunktion '$(WWFF)(p,q)$' und '$p \supset q \,.\, p$' die Funktion '$(WFFF)(p,q)$'. Hieraus ersehen wir, daß alle Wahrheitsgründe von '$p \supset q \,.\, p$' Wahrheitsgründe von 'q' sind, weshalb 'q' aus '$p \supset q \,.\, p$' folgt, der Sinn von 'q' im Sinne von '$p \supset q \,.\, p$' enthalten ist. Die Sätze '$p \vee q$', '$\sim p$' bzw. 'q' aus Wittgensteins eigenem Beispiel sind die Wahrheitsfunktionen '$(WWWF)(p,q)$', '$(FWFW)(p,q)$' bzw. '$(WWFF)(p,q)$'.

[2] Im Zitat kritisiert Wittgenstein zwar nur Russells Symbolismus. Die Kritik gilt jedoch auch bezüglich Freges Notation, wie aus dem Zusammenhang von Paragraph 5.1311 und 5.132 zu entnehmen ist.

Nur das zweite Wahrheitsargument ist ein gemeinsamer Wahrheitsgrund von '$(WWWF)(p,q)$' und '$(FWFW)(p,q)$'. Dieser gemeinsame Wahrheitsgrund ist auch ein Wahrheitsgrund von '$(WWFF)(p,q)$', weshalb '$(WWFF)(p,q)$' aus den Sätzen '$(WWWF)(p,q)$' und '$(FWFW)(p,q)$' folgt, d.h. 'q' folgt aus '$p \vee q$' und '$\sim p$'.

Hiermit erweist sich Freges und Russells Fragestellung bezüglich des Wesens der Schlußgesetze aus der Sicht Wittgenstein als ein Scheinproblem: Schlußgesetze im Sinne Freges und Russells sind überflüssig, weil logische Relationen zwischen Sätzen nicht extern sondern intern bestimmt sind. Die Relationen bestehen darin, daß die Wahrheitsbedingungen der Sätze sich auf bestimmte Arten und Weisen zueinander beziehen. So können laut Wittgenstein beispielsweise keine logischen Relationen zwischen Elementarsätzen bestehen: Elementarsätze sind nicht zusammengesetzt, weshalb zwei (unterschiedliche) Elementarsätze keine Wahrheitsbedingungen gemeinsam haben.

In diesem Zusammenhang ist darüber hinaus bezüglich der Zweckmäßigkeit des *Tractatus* folgendes anzumerken: Haben zwei notationsmäßig unterschiedliche Sätze der Begriffschrift Freges bzw. Russells die gleichen Wahrheitsgründe, so sind sie die gleiche Wahrheitsfunktion, d.h. sie sind notationsmäßige Varianten des gleichen Satzes. Abbildung 9.1 stellt zwei Beispiele vor. In den beiden Beispielen sind jeweils vier Satzzeichen Russells und zwei Satzzeichen Freges angegeben, welche die gleiche Wahrheitsfunktion, d.h. den gleichen Satz bezeichnen. Durch Verwendung der Wahrheitstabellen werden im *Tractatus* notationsmäßige Varianten ein und desselben Satzes ausgeschlossen: Unterschiedliche Wahrheitstabellen bezeichnen unterschiedliche Wahrheitsfunktionen. In dieser Hinsicht kann man folglich wiederum durch Verwendung der Hertzschen Terminologie einen Vergleich der drei Begriffschriften aufstellen: Die Bezeichnungsweise des *Tractatus* ist einfacher und somit zweckmäßiger als die von Frege und Russell. Die Hauptursache für deren Unzweckmäßigkeit aus der Sicht Wittgensteins wird in Kapitel 10 beantwortet.

9.4 Beweis der Sätze der Logik

Unter den Wahrheitsfunktionen einer Gruppe von Elementarsätzen gibt es zwei extreme Fälle. In dem einen Fall ist die Wahrheitsfunktion für sämtliche Wahrheitsmöglichkeiten der Elementarsätze wahr. Im zweiten Fall ist die Wahrheitsfunktion für sämtliche Wahrheitsmöglichkeiten falsch. Im ersten Fall nennt Wittgenstein die Wahrheitsfunktion eine Tautologie, im zweiten Fall eine Kontradiktion (*TLP* 4.46). In Abschnitt 7.4 wurde erläutert, weshalb die Wahrheit der Tautologie gewiß, des (eigentlichen) Satzes mög-

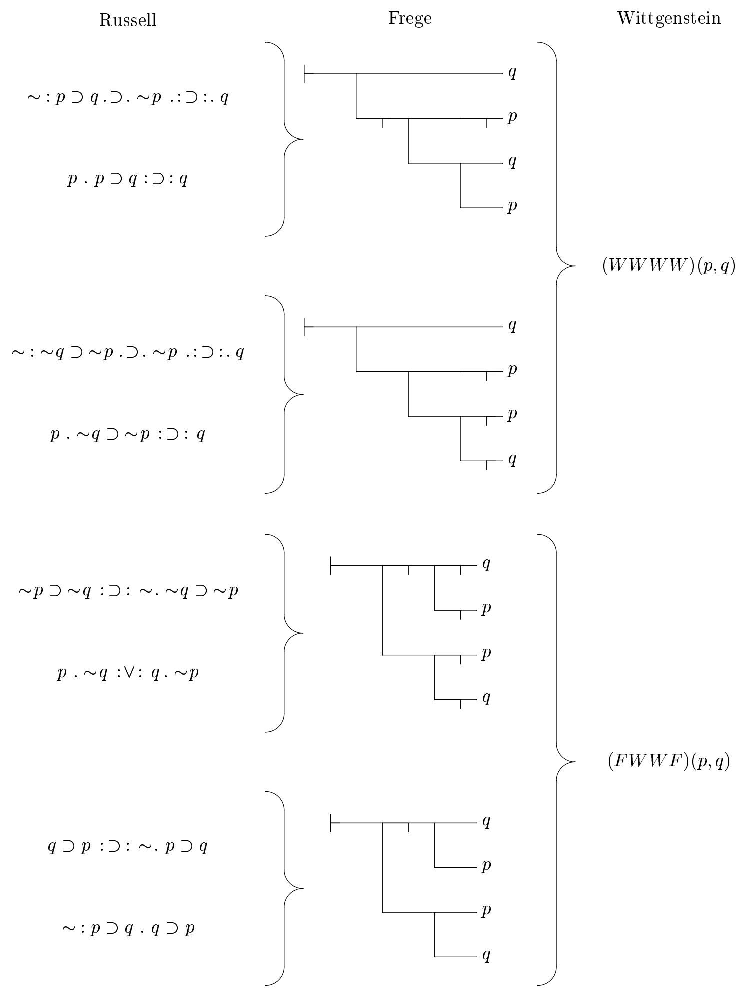

Abbildung 9.1: Vergleich bezüglich der Zweckmäßigkeit

lich, der Kontradiktion unmöglich ist. Darüber hinaus wurde gesagt, daß die Sätze der Logik laut Wittgenstein Tautologien sind (*TLP* 6.1), weshalb sie ein besonderes Merkmal aufweisen: Ihre Wahrheit kann am Symbol allein erkannt werden (*TLP* 6.113).

Vor dem Hintergrund des in diesem Kapitel dargestellten Inhalts des *Tractatus* kann Wittgenstein in den Fällen, in welchen die logischen Sätze keine Allgemeinheitsbezeichnungen beinhalten, erläutern, wie die Wahrheit dieser Sätze am Symbol allein zu ersehen ist. Seine Erläuterungen sind dabei Ausdruck einer Methode zur Übersetzung eines Satzzeichens Russells bzw. Freges in ein Wahrheitsdiagramm, das klärt bzw. beweist, ob der durch das

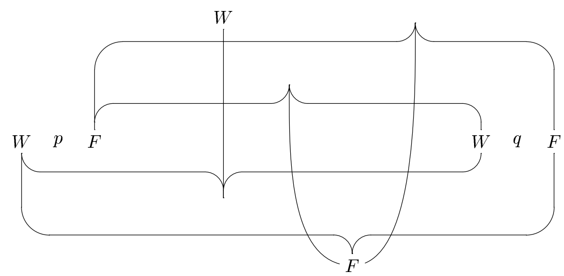

Abbildung 9.2: Wahrheitsdiagramm von '$p\,.\,q$'

Satzzeichen dargestellte Satz eine Tautologie ist:[3] Statt einen eigentlichen Satz mit 'p' zu bezeichnen, schreibt er ihn '$W p F$', wobei das Zeichen 'W' den Wahr-Pol und das Zeichen 'F' den Falsch-Pol des Satzes darstellt. '$\sim p$' schreibt er im neuen Symbolismus 'F–$W p F$–W': Die linke Seite zeigt, daß wenn 'p' wahr, 'F–$W p F$–W' bzw. '$\sim p$' falsch ist, während durch die rechte Seite angezeigt wird, daß wenn 'p' falsch, 'F–$W p F$–W' bzw. '$\sim p$' wahr ist. Die anderen Satzzeichen Russells bzw. Freges können auf entsprechende Art und Weise durch Wahrheitsdiagramme dargestellt werden, indem Klammern Wahrheitsmöglichkeiten und die Zuordnung der Zeichen 'W' oder 'F' zu den Klammern Wahrheitsbedingungen ausdrücken. So stellt beispielsweise die Abbildung 9.2 den Satz '$p\,.\,q$' und die Abbildung 9.3 den Satz '$\sim : p\,.\,\sim q$' dar. Wie man anhand des Diagrammes der Abbildung 9.3 den Satz '$\sim : p\,.\,\sim p$' daraufhin untersuchen kann, ob er eine Tautologie ist, erläutert Wittgenstein folgendermaßen:

> "Setzen wir statt »q« »p« ein und untersuchen die Verbindung der äußeren W und F mit den innersten, so ergibt sich, daß die Wahrheit des ganzen Satzes *allen* Wahrheitskombinationen seines Argumentes, seine Falschheit keiner der Wahrheitskombinationen zugeordnet ist"(*TLP* 6.1203).

Folgen wir Wittgensteins Angaben: Erstens ersetzen wir 'q' durch 'p'. Danach untersuchen wir im Diagramm die Verbindung der äußeren 'W' und 'F' mit den innersten: 'p' ist entweder wahr oder falsch. Ist 'p' wahr, so ist '$\sim p$' falsch, weshalb '$p\,.\,\sim p$' falsch und somit '$\sim : p\,.\,\sim p$' wahr ist. Ist 'p' andererseits falsch, so ist '$\sim p$' wahr, '$p\,.\,\sim p$' falsch und somit '$\sim : p\,.\,\sim p$' wahr. Folglich ist '$\sim : p\,.\,\sim q$' eine Tautologie. Wittgenstein nennt sein Verfahren Nullmethode, weil es klärt, wie die Sätze der Logik eigentliche Sätze

[3] Wäre der Satz uns als Wahrheitstabelle gegeben, brauchen wir natürlich keinen Beweis, um sehen zu können, ob der Satz tautologisch ist.

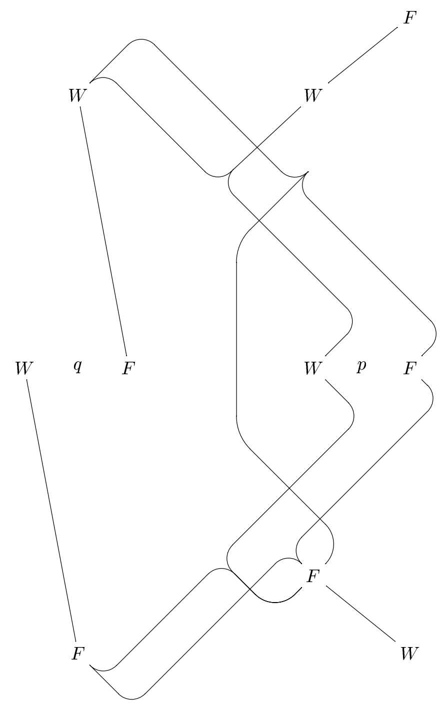

Abbildung 9.3: Wahrheitsdiagramm von '$\sim : p \,.\, \sim q$'

zu *nichts*sagenden Sätzen verbindet (*TLP* 6.121). Wie das logische Folgern (Abschnitt 9.3.2) als besonderer Fall der Nullmethode aufgefaßt werden kann, erläutert er in Paragraph 6.1221:

> "Ergeben z.B. zwei Sätze »p« und »q« in der Verbindung »p ⊃ q« eine Tautologie, so ist klar, daß q aus p folgt.
> Daß z.B. »q« aus »p ⊃ q . p« folgt, ersehen wir aus diesen beiden Sätzen selbst, aber wir können es auch *so* zeigen, indem wir sie zu »p ⊃ q . p : ⊃ : q« verbinden und nun zeigen, daß dies eine Tautologie ist"(*TLP* 6.1221).

Die Implikation '$p \supset q$' zweier Sätze 'p' und 'q' ist nur falsch, wenn 'p' wahr und 'q' falsch ist, d.h. ergeben 'p' und 'q' in dieser Verbindung eine Tautologie, so besteht diese Möglichkeit nicht. Ergo sind sämtliche Wahrheitsgründe von 'p' Wahrheitgründe von 'q', will heißen aus 'p' folgt 'q'.

Kapitel 10

Die allgemeine Form des Satzes

10.1 Der Shefferstrich

Die Zweckmäßigkeit des *Tractatus* im Vergleich zu den Begriffschriften Freges und Russells wurde im vorigen Kapitel erörtert. Folgend wird der Grund für die Unzweckmäßigkeit der Begriffschriften von Frege und Russell erklärt: Frege und Russell benutzen laut Wittgenstein unnötig viele logische Konnektive als Urzeichen. Frege verwendete Negation (‘—┬—’) und Implikation (‘—┬— ’), Russell Negation (‘$\sim$’) und Disjunktion (‘$\vee$’). Im Gegensatz zu Frege definierte Russell anhand seiner beiden Urzeichen zudem die Konnektive Implikation (‘$\supset$’) und Konjunktion (‘.’), d.h. Russells Symbolismus hat Zeichen für vier Konnektive, Freges für zwei. Folglich kann man den gleichen Satz in Russells Begriffschrift auf mehr Arten und Weisen darstellen als dies in Freges der Fall ist. In Abschnitt 9.3.1 sahen wir, daß auch Freges Symbolismus die Bildung notationsmäßiger Varianten des gleichen Satzes ermöglicht. So erscheint im zweiten Beispiel der Abbildung 9.1 *eine* logische Operation an den Sätzen ‘p’ und ‘q’ bei Frege als zwei Operationen, bei Russell als vier. Ergo verhüllen beide Begriffschriften, so Wittgenstein, die logische Form der Sätze. Es ist deshalb der Forderung der Zweckmäßigkeit willen ein Symbolismus anzustreben, in welchem eine Operation der Logik nur auf eine Weise bezeichnet wird. Aus der obigen Darstellung ist zu ersehen, daß dieses Ideal nicht in einem Symbolismus verwirklicht ist, welcher mehrere logische Konnektive beinhaltet.

Während Wittgenstein Vorarbeiten des *Tractatus* schrieb, bewies Henry Maurice Sheffer, daß es möglich ist, die logischen Konnektive durch eine Konstante, dem sogenannten Shefferstrich (*Sheffer stroke*), zu ersetzen (Sheffer, 1913). In Paragraph 5.1311 weist Wittgenstein auf diese Tatsache hin:

> “Wenn wir von p $\vee$ q und $\sim$p auf q schließen, so ist hier durch die

> Bezeichnungsweise die Beziehung der Satzformen von »p ∨ q« und »∼p« verhüllt. Schreiben wir aber z.B. statt »p ∨ q« »p|q .|. p|q« und statt »∼p« »p|p« (p|q = weder p, noch q), so wird der innere Zusammenhang offenbar"(*TLP* 5.1311).

Im Zitat wird gezeigt, wie die Urzeichen Russells sich als Shefferstrich schreiben lassen, d.h. wie anhand des Strichs die Pluralität logischer Konnektive zu eliminieren ist, und folglich logische Operationen auf eine einheitliche Form zu bringen sind, welche laut Wittgenstein interne Relationen zwischen Sätzen zweckmäßiger als bei Frege und Russell zum Vorschein bringt. So werden beispielsweise '$p \vee q$' und '$\sim : \sim p \,.\, \sim q$' auf die einheitliche Form '$p|q \,.|.\, p|q$' gebracht.

Wesentlich ist diese Ersetzbarkeit der logischen Konnektive durch eine Konstante, diese einheitliche Form der Wahrheitsoperationen, weil sie laut Wittgenstein vor dem Hintergrund des Satzes als Wahrheitsfunktion der Elementarsätze eine Klärung des Satzwesens mitsichführt: Sätze sind Wahrheitsfunktionen, welche durch Wahrheitsoperationen an den Wahrheitsmöglichkeiten der Elementarsätze gebildet werden. Diese Operationen können wie geschildert wiederum durch eine Konstante ersetzt werden. Folglich gibt es laut Wittgenstein eine Operation, die allen anderen Operationen zugrunde liegt. Diese grundlegende Operation, durch welche alle Sätze anhand der Elementarsätze gebildet werden, nennt Wittgenstein die allgemeine Satzform. Diese Form ist das (einzige), was alle Sätze miteinander gemein haben. Sie ist das Wesen des Satzes. Um diese formale Eigenschaft des Satzes verstehen zu können, ist es nötig den genauen Sinn zu erläutern, in welchem Wittgenstein von einer Operation spricht. Der folgende Abschnitt ist dieser Erläuterung gewidmet.

10.2 Operationen

Die Strukturen der Sätze stehen nicht in eigentlichen sondern in internen Beziehungen zueinander. Diese internen Relationen zwischen Sätzen können laut Wittgenstein mit Hilfe von Operationen hervorgehoben werden:

> "Wir können diese internen Beziehungen dadurch in unserer Ausdrucksweise hervorheben, daß wir einen Satz als Resultat einer Operation darstellen, die ihn aus anderen Sätzen (den Basen der Operation) hervorbringt.
> Die Operation ist der Ausdruck einer Beziehung zwischen den Strukturen ihres Resultats und ihrer Basen.

> Die Operation ist das, was mit dem einen Satz geschehen muß, um aus ihm den anderen zu machen"(*TLP* 5.2–5.23).

Die Operation ist der Ausdruck einer internen Beziehung zwischen den Strukturen ihres Reslutats und ihrer Basen, d.h. sie bringt den Unterschied der Formen zum Ausdruck, kennzeichnet aber im Gegensatz zur Funktion wie 'x ist rot' keine Form. Daß Operationen nicht mit Funktionen zu verwechseln sind, ist laut Wittgenstein entscheidend. Denn eine "Funktion kann nicht ihr eigenes Argument sein, wohl aber kann das Resultat einer Operation ihre eigene Basis werden"(*TLP* 5.251).[1] Beispielsweise ist '$\{x$ ist rot$\}$ ist rot' Unsinn. Die Funktion kennzeichnet eine Form und wird verwendet, um etwas eigentliches zu *sagen*. Ich habe etwas wahres oder falsches über Peter gesagt, falls ich *behaupte*, daß seine Haare blond sind. Sage ich 'Die Katze ist auf der Matte', so ist eine eigentliche (externe) Beziehung zwischen der Katze und der Matte behauptet, die entweder der Fall oder nicht der Fall ist. Dagegen wird duch Operationen nichts gesagt bzw. behauptet, sondern nur gekennzeichnet, daß eine interne Beziehung zwischen Sätzen besteht, d.h. zwischen Basen und Resultat. Folglich sind Operationen in diesem Sinne an sich überflüssig. Im Sinne der Zweckmäßigkeit ist ihre Verwendung jedoch zentral: Sie werden von Wittgenstein eingeführt, um sogenannte Formenreihen zweckmäßig darstellen zu können.

Formenreihen sind Reihen, welche durch eine interne Relation geordnet sind (*TLP* 4.1252). Die interne Relation, die eine Reihe ordnet, ist dabei laut Wittgenstein äquivalent mit der Operation, durch welche ein Glied aus dem anderen entsteht (*TLP* 5.232). Ein Beispiel des *Tractatus* einer durch eine interne Relation geordneten Reihe ist die Reihe der Sätze

aRb,
$(\exists x) : aRx \,.\, xRb$,
$(\exists x, y) : aRx \,.\, xRy \,.\, yRb$,
$(\exists x, y, z) : aRx \,.\, xRy \,.\, yRz \,.\, zRb$,
u.s.f.

Steht b in einer dieser Beziehungen zu a, so nennt Wittgenstein b einen Nachfolger von a. Hiermit will er betonen, daß es möglich ist, das Fortschreiten von Glied zu Glied in einer Formenreihe als Operation aufzufassen, welche ihr eigenes Resultat als Basis nehmen kann (*TLP* 5.251–2). Folglich kann man die Reihe von einem beliebigen Glied ab immer fortsetzen. Ist 'a' kein Resultat der Operation 'O'ξ'', so stellt der Ausdruck 'O'a'' das Resultat *einer* Anwendung der Operation dar ('O' ist das Zeichen für die variable Relation bzw. Operation; das Komma, auf welches wir zurückkommen werden,

[1] Siehe Abschnitt 7.6 für Wittgensteins Auflösung des Paradoxes '$F(F(fx))$'.

bezeichnet das Resultat der Anwendung der Operation, während 'ξ' das Zeichen für ein beliebiges Glied der Reihe ist). Wird die Operation wiederum auf dieses Resultat angewandt, so entsteht der Ausdruck 'O'O'a', u.s.f.. Wittgenstein nennt die fortgesetzte Anwendung einer Operation auf ihr eigenes Resultat ihre sukzessive Anwendung. So ist 'O'O'O'a' das Resultat der dreimaligen sukzessiven Anwendung von 'O'ξ' auf 'a' (*TLP* 5.2521). Folglich ergibt sukzessive Anwendung der Operation 'O'ξ' auf die Basis 'a' die Formenreihe

$$a, O\text{'}a, O\text{'}O\text{'}a, O\text{'}O\text{'}O\text{'}a, O\text{'}O\text{'}O\text{'}O\text{'}a, \ldots$$

Wittgenstein drückt dies so aus: "Der Begriff der successiven Anwendung der Operation ist äquivalent mit dem Begriff »und so weiter«"(*TLP* 5.2523). Und weil die "Operation [...] sich in einer Variablen [zeigt]; sie zeigt, wie man von einer Form von Sätzen zu einer anderen gelangen kann"(*TLP* 5.24), so läßt sich die Variable '$[a, x, O\text{'}x]$' einführen (*TLP* 5.2522), wobei das erste Glied des Klammerausdrucks der Anfang der Formenreihe ist, das zweite die Form eines beliebigen Gliedes 'x' der Reihe und das dritte die Form desjenigen Gliedes der Reihe, welches auf 'x' unmittelbar folgt. Wie wir aus den beiden folgenden Abschnitten ersehen werden, ist die allgemeine Satzform aus der Sicht Wittgensteins eine Variable eines solchen Typs.

10.3 Der N-Operator

Um zur allgemeinen Satzform zu gelangen, führt Wittgenstein den sogenannten N-Operator ein, welcher eine der technischen Innovationen des *Tractatus* ist und einer Art Verallgemeinerung des Shefferstrichs ausmacht:

> "Jede Wahrheitsfunktion ist ein Resultat der successiven Anwendung der Operation $(- - -W)(\xi, \ldots)$ auf Elementarsätze.
> Diese Operation verneint sämtliche Sätze in der rechten Klammer, und ich nenne sie die Negation dieser Sätze"(*TLP* 5.5).

Während die linke Klammer eine Wahrheitstabelle vorstellt, wo die Zeichen 'F' ausgelassen sind, stellen die Glieder der rechten Klammer – $\xi, \ldots$ – eine bestimmte Auswahl von Elementarsätzen dar. Da im Falle der obigen Operation die Reihenfolge der Glieder der rechten Klammer gleichgültig ist, deutet Wittgenstein den Klammerausdruck durch ein Zeichen von der Form '$(\bar{\xi})$' an, wobei 'ξ' eine Variable ist, deren Werte die Glieder des Klammerausdrucks sind, und der Strich über der Variablen andeutet, daß sie ihre sämtlichen Werte in der Klammer vertritt (*TLP* 5.501). Festgesetzt werden die Werte der Variablen durch eine Beschreibung der Werte, welche die Variable vertritt. Wittgenstein unterscheidet drei Arten der Beschreibung:

1. Die direkte Aufzählung.

2. Die Angabe einer Funktion fx.

3. Die Angabe einer Operation.

Im ersten Fall können wir statt der Variablen einfach ihre Werte setzen. Im zweiten Fall sind die Werte von 'fx' für alle Werte von 'x' die zu beschreibenden Sätze. Im dritten Fall sind die Glieder des Klammerausdrucks sämtliche Glieder einer anhand sukzessiver Anwendung der angegebenen Operation gebildeten Formenreihe. Vor diesem Hintergrund schreibt Wittgenstein die Negation sämtlicher Werte einer Satzvariablen 'ξ' statt '$(- - -W)(\xi, \ldots)$' '$N(\bar{\xi})$' (*TLP* 5.502); daher der Name N-Operator. Hat 'ξ' beispielsweise nur einen Wert 'p', so ist $N(\bar{\xi}) = \sim p$, hat die Variable zwei Werte 'p' und 'q', so ist $N(\bar{\xi}) = \sim p \,.\, \sim q$. Die Beziehung zum Shefferstrich ist somit ersichtlich: Im Falle einer Variable 'ξ' nur eines Wertes 'p' entspricht das Resultat der Anwendung des N-Operators auf '$\bar{\xi}$' '$p|p$', im Falle zweier Werte 'p' und 'q' '$p|q$'.

Sind die Werte von 'ξ' anhand der Angabe einer Funktion 'fx' bestimmt, d.h. sind die Werte von 'ξ' sämtliche Werte von 'fx', so wird laut Wittgenstein $N(\bar{\xi}) = \sim(\exists x) \,.\, fx$ (*TLP* 5.52). Wie der Satz '$(x).fx$' zu bilden ist, wird im *Tractatus* nicht erwähnt, ergibt sich jedoch implizit auf der Grundlage der Einführung des $\exists$-Quantors: Sind die Werte von 'ξ' sämtliche Werte von '$\sim fx$', so wird $N(\bar{\xi}) = \sim(\exists x). \sim fx = (x).fx$. Darüber hinaus schreibt Wittgenstein in Paragraph 5.521 über seine Auffassung der Allgemeinheit:

> "Ich trenne den Begriff *Alle* von der Wahrheitsfunktion.
> Frege und Russell haben die Allgemeinheit in Verbindung mit dem logischen Produkt oder der logischen Summe eingeführt. So wurde es schwer, die Sätze »(∃x).fx« und »(x).fx«, in welchen beide Ideen beschlossen liegen, zu verstehen"(*TLP* 5.521).

Im Gegensatz zu Frege und Russell bezieht Wittgenstein das Wesen der Allgemeinheit statt auf den Begriff des Quantors auf den der Variable, d.h. die Allgemeinheit geht mit der Festsetzung der Werte der Variablen einher. Vor diesem Hintergrund unterscheidet Wittgenstein in seiner Kritik an Russell gen Ende des *Tractatus* zwischen zwei Arten der Allgemeinheit, worauf wir in Kapitel 11 zurückkommen. Folgend wird die allgemeine Satzform dargestellt.

10.4 Die allgemeine Satzform

Die allgemeine Satzform führt Wittgenstein im *Tractatus* folgendermaßen ein:

> "Die allgemeine Form der Wahrheitsfunktion ist: $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$.
> Dies ist die allgemeine Form des Satzes.
> Dies sagt nichts anderes, als daß jeder Satz ein Resultat der successiven Anwendung der Operation N'$(\bar{\xi})$ auf die Elementarsätze ist"(*TLP* 6–6.001).

Im Zitat ist 'p' die Variable, deren Werte die Elementarsätze sind, während '$\bar{\xi}$' alle komplexen Sätze vertritt. Wir ersahen im vorigen Abschnitt, daß der Shefferstrich ein Sonderfall des N-Operators ist, und wie durch Anwendung des Operators allgemeine Sätze gebildet werden, d.h. wir ersahen laut Wittgenstein, daß jeder (komplexe) Satz ein Resultat der sukzessiven Anwendung des N-Operators auf eine Auswahl von Elementarsätzen ist: '$[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$'. Die allgemeine Satzform entspricht folglich nicht ganz dem Typ der Variablen '$[a, x, O\text{'}x]$', denn während '$[a, x, O\text{'}x]$' Ausdruck einer Formenreihe ist, stellt die allgemeine Satzform sozusagen einen Formenbaum dar, d.h. die resultierenden Sätze sind nicht in einer einzelnen Reihe geordnet, sondern es treten Verzweigungen auf.

Es wurde in Abschnitt 6.2 erläutert, was Russell uns laut Wittgenstein mit der *Theory of Description*, der Analyse von Sätzen, welche eine bestimmte Beschreibung enthalten, über das Wesen des Satzes näher brachte: Ein Satz ist eine Art Zeichen, das nicht ohne das Vermögen unabhängig von der Wahr- oder Falschheit von Sätzen eines bestimmten Bereiches wahrheitswertig zu sein, gedacht werden kann. Darüber hinaus wurde gesagt, daß wir laut Wittgenstein völlig geklärt haben würden, welcher Satz ein Satz ist, was seine Funktionalität ist, wenn es gelingen würde, den Satz so zu analysieren bzw. darzustellen, daß die Unabhängigkeit seiner Wahrheitswertigkeit von der Wahr- oder Falschheit aller Sätze zu erkennen wäre. Durch solch eine Analyse wäre das Wesen des Satzes geklärt.

Und eben solch eine Analyse ist die allgemeine Satzform. Denn aus der allgemeinen Satzform ist zu ersehen, daß jeder Satz eine Wahrheitsfunktion der Elementarsätze ist. Die Wahrheitswertigkeit bzw. das Vermögen des Satzes einen Sinn auszudrücken, ist folglich von der Wahrheit oder Falschheit aller Sätze unabhängig, d.h. davon unabhängig, was in der Welt der Fall ist. Sind beispielsweise 'p' und 'q' Elementarsätze, so ist der Sinn des komplexen Satzes '$p \,.\, q$' eine Funktion der beiden Elementarsätze. Der Sinn des komplexen Satzes hängt aber nicht davon ab, ob die durch 'p' und 'q' dargestellten Sachverhalte der Fall sind oder nicht. Wie das Bild, so stellt der Satz, ob elementar oder komplex, unabhängig von dem Sosein der Welt einen Sachverhalt dar, d.h. hat ein Satz keinen Sinn, "so kann es nur daran liegen, daß wir einigen seiner Bestandteile keine *Bedeutung* gegeben haben"(*TLP* 5.4733). Anders ausgedrückt: "Wir können einem Zeichen nicht den unrechten Sinn geben"(*TLP* 5.4733); "Die Logik muß für sich selber sorgen"(*TLP* 5.473).

Kapitel 11

Zahlen als Exponenten einer Operation

11.1 Die Auffassungen der Zahl Freges und Russells

Dieses Kapitel widmet sich Wittgensteins Auffassung der Mathematik im allgemeinen und der Arithmetik im besonderen, d.h. der *Tractatus*-Definition der natürlichen Zahl und des *Tractatus*-Beweises der arithmetischen Gleichung '$2 \times 2 = 4$' (*TLP* 6.02–6.031, 6.2-6.241).[1] In diesem Zusammenhang ist besonders wichtig, daß Wittgensteins Ausführungen als Kritik an Frege und Russell zu verstehen sind. So hatte Frege beispielsweise in *Grundlagen der Arithmetik* (1884) erklärt, daß Zahlen als (vom Menschen) unabhängig existierende logische Gegenstände aufzufassen sind:

> "Die einzelne Zahl erscheint eben dadurch, daß sie nur einen Teil der Aussage bildet, als selbständiger Gegenstand. Ich habe schon oben darauf aufmerksam gemacht, daß man »die 1« sagt und durch den bestimmten Artikel 1 als Gegenstand hinstellt. Diese Selbständigkeit zeigt sich überall in der Arithmetik, z.B. in der Gleichung $1+1=2$"(Frege, 1995, § 57).

Zwar war sich Frege bewußt, daß "im Sprachgebrauch des Lebens die Zahl auch attributiv erscheint". Jedoch "läßt sich [dies] immer vermeiden. Z.B. kann man den Satz »Jupiter hat vier Monde« umsetzen in »Die Zahl der Jupitersmonde ist vier«"(Frege, 1995, § 57). Im Gegensatz zum adjektivistischen ist der substantivistische Gebrauch der Zahlwörter aus der Sicht Freges

[1]Wittgensteins Erläuterungen der Mathematik lassen sich auf rund zwei Seiten a 2400 Anschläge niederschreiben. In diesem Kapitel werden fast alle Bemerkungen zitiert.

nicht irreführend: Durch den bestimmten Artikel, so Frege, werden Zahlen als Gegenstände hingestellt.

Freges Auffassung, daß ein bestimmter Artikel immer einen Gegenstand vertritt, wird jedoch von Russell mit seiner *Theory of Description* verworfen (Abschnitt 4.3). Russells Analyse von Sätzen mit bestimmten Beschreibungen zeigt, daß der bestimmte Artikel der Beschreibung irreführend ist: Die bestimmte Beschreibung vertritt keinen logischen Gegenstand. So ist in der Analyse des Satzes 'Der jetzige König Frankreichs ist glatzköpfig' der bestimmte Artikel weganalysiert:

$$(\exists x) : Fx \,.\, Gx \,.\, (y) : Fy \,.\supset .\, y = x,$$

wobei 'Fx' die Funktion 'x ist jetziger König Frankreichs' bezeichnet und 'Gx' die Funktion 'x ist glatzköpfig'. Folglich ist die bestimmte Beschreibung 'der jetzige König Frankreichs' kein logischer Eigenname, so Russell, sondern ein unvollständiges Symbol. Entsprechend gilt bezüglich der Zahlwörter, daß der Gebrauch eines bestimmten Artikels vor dem Zahlwort wie im Falle 'die 1' nicht mitsichführt, daß das Zahlwort einen logischen Gegenstand vertritt: Zahlwörter können stattdessen als unvollständige Symbole aufgefaßt werden. Letzteres tut Russell in *Principia*. Russells Definition der natürlichen Zahlen wurde in Abschnitt 4.4.5 dargestellt: Er faßte natürliche Zahlen als Klassen von Klassen und folglich als unvollständige Symbole auf.[2] Er definierte beispielsweise die(!) 0 als Klasse aller leeren Klassen und die(!) 1 als Klasse aller Einheitsklassen.

11.2 Die Überflüssigkeit der Klassen

Es ist Wittgensteins *Grundgedanke*, daß es überhaupt keine logischen Gegenstände gibt (Abschnitt 7.2). Insbesondere sind Zahlwörter keine logischen Eigennamen, will heißen Freges Auffassung der Zahlen ist laut Wittgenstein einem Irrtum unterlegen. Es wäre deshalb unmittelbar vorstellbar, daß er Russells Definition der Zahlen gutheißen könnte. Aus Kapitel 7 im allgemeinen und Abschnitt 7.7 im besonderen ist jedoch zu ersehen, daß dies nicht der Fall ist: Die Auffassung der Logik und Mathematik Russells ist, so Wittenstein, grundlegend verwirrt. Denn Russells Grundlegung der Mathematik bzw. Arithmetik durch die Theorie der Klassen benötigt Axiome wie das Axiom der Reduzierbarkeit und das Unendlichkeitsaxiom. Diese Axiome sind aber vor dem Hintergrund des *Tractatus* keine logischen Sätze. Während das Unendlichkeitsaxiom einfach Unsinn ist (Abschnitt 7.5), so sagt das

[2] In Abschnitt 4.4.3 wurde Russells Auffassung der Klassen als unvollständige Symbole behandelt.

Axiom der Reduzierbarkeit etwas aus, das zwar allgemein gültig sein mag. Die allgemeine Gültigkeit ist laut Wittgenstein jedoch nicht das Anzeichen des logischen Satzes:[3]

> "Das Anzeichen des logischen Satzes ist *nicht* die Allgemeingültigkeit.
> Allgemein sein, heißt ja nur: Zufälligerweise für alle Dinge gelten. Ein unverallgemeinerter Satz kann ja ebensowohl tautologisch sein als ein verallgemeinerter.
> Die logische Allgemeingültigkeit könnte man wesentlich nennen, im Gegensatz zu jener zufälligen, etwa des Satzes »alle Menschen sind sterblich«. Sätze, wie Russells »Axiom of reducibility« sind nicht logische Sätze, und dies erklärt uns unser Gefühl: Daß sie, wenn wahr, so doch nur durch einen günstigen Zufall wahr sein könnten"(*TLP* 6.1231–6.1232).

Anders ausgedrückt: Hätte Russell die rechte Auffassung, so wäre die Mathematik sozusagen den Launen der Welt ausgesetzt, was aus der Sicht Wittgensteins nicht der Fall ist. So hängt Russells Beweis arithmetischer Gleichungen vom Unendlichkeitsaxiom ab, d.h. von der (laut Wittgenstein unsinnigen) Hypothese der Existenz unendlich vieler Gegenstände in der Welt. Warum Mathematik wie Logik nichts mit der Frage zu tun hat, ob die Welt wirklich *so* ist oder nicht, wird in Paragraph 6.031 erläutert:

> "Die Theorie der Klassen ist in der Mathematik ganz überflüssig.
> Dies hängt damit zusammen, daß die Allgemeinheit, welche wir in der Mathematik brauchen, nicht die *zufällige* ist"(*TLP* 6.031).

Die Allgemeinheit, die wir in der Mathematik brauchen, so Wittgenstein, ist nicht die zufällige sondern – wie in der Logik – die wesentliche. Anders ausgedrückt: In der Mathematik gibt es keinen Zufall sondern nur Notwendigkeit.

11.3 Allgemeinheit: zufällige versus wesentliche

Erinnern wir uns an Wittgensteins Auffassung der Allgemeinheit, will heißen werfen wir wieder einen Blick auf die *Tractatus*-Einführung allgemeiner Sätze: Wittgenstein bezieht im Gegensatz zu Frege und Russell das Wesen der Allgemeinheit statt auf den Begriff des Quantors auf den der Variable, d.h.

[3] Siehe Kapitel 9 und Abschnitt 7.4.

die Allgemeinheit geht mit der Festsetzung der Werte der Variablen einher (Abschnitt 10.3). Festgesetzt werden die Werte der Variablen 'ξ' durch eine Beschreibung der Werte, welche die Variable vertritt. Wie gesagt unterscheidet Wittgenstein zwischen drei Arten der Beschreibung:

1. Die direkte Aufzählung.
2. Die Angabe einer Funktion fx.
3. Die Angabe einer Operation.

Uns interessiert hier der Unterschied zwischen zweitem und drittem Fall. Im zweiten Fall vertritt '$\bar{\xi}$' alle Werte eines eigentlichen Begriffs 'x ist f' bzw. der Funktion 'fx'. In diesem Fall ist die Allgemeinheit zufällig: Daß beispielsweise mein Stuhl und der Umschlag meiner *Tractatus*-Ausgabe beide rot (gefärbt) sind, ist ein Zufall. Es besteht aufgrund dieser Tatsache keine interne sondern nur eine externe (eigentliche) Beziehung zwischen meinem Stuhl und dem Umschlag meines Buches.[4] Im dritten Fall verhält es sich anders. Hier vertritt '$\bar{\xi}$' sämtliche Glieder einer durch sukzessive Anwendung einer angegebenen Operation gebildeten Formenreihe, d.h. vertritt sämtliche Werte eines formalen Begriffs '$[a, x, O\text{'}x]$'. In diesem Fall ist die Allgemeinheit wesentlich: Die Glieder der Reihe sind durch eine interne Relation bzw. eine Operation geordnet, will heißen sind einem zwei Glieder der Reihe gegeben, so läßt sich immer eines der beiden Glieder aus dem anderen durch sukzessive Anwendung der Operation bilden. Vor diesem Hintergrund läßt sich der Unterschied zwischen Wittgensteins Zahlbegriff und dem von Frege und Russell erläutern.

11.4 Der Zahlbegriff: eigentlich versus formal

Faßte Russell zwar Zahlen im Gegensatz zu Frege nicht als logische Gegenstände auf, so teilte er letztlich jedoch Freges realistische Auffassung der Mathematik bzw. Logik. So ist beiden gemein, daß sie die Frage 'Ist die 1 ein Gegenstand?' als sinnvoll betrachten. Nur ihre jeweilige Antwort ist unterschiedlich: Frege antwortet wie erwähnt mit ja, Russell mit nein. Beide sind der Ansicht mit dem Satz, die 1 ist ein Gegenstand, etwas gesagt bzw. gedacht zu haben (Frege etwas wahres, Russell etwas falsches). Das Wesentliche dieser realistischen Auffassung ist, daß 'Es ist ein Gegenstand'

[4] Der Satz 'Bill Clintons Haar ist rot', obwohl falsch, ist natürlich auch ein Wert der Funktion unseres Beispiels.

fälschlicherweise über Größen ausgesagt werden kann; es ist wesentlich, daß der Begriff Gegenstand ein eigentlicher Begriff ist. So sagt Frege aus der Sicht Russells fälschlicherweise von Zahlen, daß sie Gegenstände sind.

Eben jener Glaube, daß ein Satz wie 'Die 1 ist ein Gegenstand' etwas aussagt, ist laut Wittgenstein Ausdruck einer Konfusion: der Verwechslung formaler mit eigentlichen Begriffen (Abschnitt 7.6). Ein Begriff wie 'Gegenstand' ist kein eigentlicher sondern ein formaler Begriff. Entscheidend ist in diesem Zusammenhang, daß laut Wittgenstein auch der Zahlbegriff nicht eigentlich sondern formal ist (*TLP* 4.1272). Wie gesagt hängt dies damit zusammen, "daß die Allgemeinheit, welche wir in der Mathematik brauchen, nicht die *zufällige* ist"(*TLP* 6.031).

Freges und Russells Auffassung des Zahlbegriffs als eigentlicher Begriff ist aus der Sicht Wittgensteins die Auffassung, daß die Allgemeinheit in der Mathematik die zufällige ist. Denn angenommen der Zahlbegriff wäre eigentlich, so vertritt '$\bar{\xi}$' alle Werte des eigentlichen Begriffs 'x ist eine Zahl'. Folglich hätten wir es mit dem zweiten Fall der Festsetzung der Werte zu tun: Daß z.B. 2 und 4 beides Zahlen sind, wäre auf gleiche Art und Weise aufzufassen, wie die zufällige Tatsache, daß Stuhl und *Tractatus*-Umschlag beide rot sind. Wie zwischen Stuhl und Umschlag bestünde zwischen 2 und 4 keine interne sondern (nur) eine externe Beziehung (Frege spricht in diesem Zusammenhang in den zitierten Zeilen aus *Grundlagen* von der Selbständigkeit der Zahlen).

Diese Auffassung ist vom Standpunkt Wittgensteins grundlegend verkehrt: Beziehungen zwischen Zahlen sind nicht extern sondern intern, d.h. der Zahlbegriff ist kein eigentlicher sondern ein formaler Begriff. Dieses ist die Auffassung, daß wir es in der Mathematik mit der wesentlichen Allgemeingültigkeit zu tun haben: Der allgemeine Begriff der Zahl ist nicht durch Angabe einer Funktion sondern einer Operation bestimmt: '$\bar{\xi}$' vertritt sämtliche Glieder einer durch sukzessive Anwendung einer Operation gebildeten Formenreihe. Der Zahlbegriff ist folglich vom Typ '$[a, x, O'x]$'. *In concreto* bestimmt Wittgenstein den Zahlbegriff vor dem Hintergrund der allgemeinen Operationsform, der wir uns im folgenden Abschnitt zuwenden.

11.5 Die allgemeine Form der Operation

Direkt nach Introduktion der allgemeinen Satzform erklärt Wittgenstein in Paragraph 6.002: "Ist die allgemeine Form gegeben, wie ein Satz gebaut ist, so ist damit auch schon die allgemeine Form davon gegeben, wie aus einem Satz durch eine Operation ein anderer erzeugt werden kann"(*TLP* 6.002); "Die allgemeine Form der Operation $\Omega'(\bar{\eta})$ ist also:

$$[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]\text{'}(\bar{\eta}) (= [\bar{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]).$$

Das ist die allgemeinste Form des Überganges von einem Satz zum anderen"(*TLP* 6.01). Ersetzen wir '$\bar{\eta}$' durch das Zeichen '$\bar{p}$', welches alle Elementarsätze vertritt, so ergibt sich:

$$[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]\text{'}(\bar{p}) (= [\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})])$$

Rechts vom Gleichheitszeichen erkennen wir die allgemeine Satzform wieder. Folglich ist das Zeichen '$[\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]\text{'}(\bar{\eta})$' von Wittgenstein ausgedacht, um die Prozedur der sukzessiven Anwendung des N-Operators auf eine beliebig gewählte Basis von Sätzen zu bezeichnen. Das Zeichen stellt die allgemeine Form der Operation zweckmäßig dar, weil jede Operation eine Prozedur vorstellt durch deren Anwendung auf einen oder mehrere Sätze als Resultat ein Satz entsteht, der eine Wahrheitsfunktion dieser Sätze ist; und egal was diese Prozedur sein mag, so wird eine geeignete Iteration von N-Operationen diese Wahrheitsfunktion bilden. Um Wittgeinsteins Ausführungen bezüglich des Begriffs der Zahl verstehen zu können, ist an dieser Stelle hervorzuheben, daß die allgemeine Form der Operation in diesem Zusammenhang verwendet wird, um die allgemeine Form des Überganges von einem Glied zum folgenden einer Formenreihe zu kennzeichnen. Ein Beispiel einer Formenreihe Wittgensteins wurde in Abschnitt 10.2 gegeben. Ein Beispiel dieser Arbeit, das in Abschnitt 11.9 näher erläutert wird, ist folgende Formenreihe:

Ax,
$(\exists x).Ax$,
$(\exists x, y).Ax \,.\, Ay$,
$(\exists x, y, z).Ax \,.\, Ay \,.\, Az$,
$(\exists x, y, z, w).Ax \,.\, Ay \,.\, Az \,.\, Aw$,
usf.

Das Fortschreiten von einem Glied der Reihe zum folgenden ist gleichförmig, d.h. die Reihe ist durch eine interne Relation geordnet (*TLP* 4.1252). Die interne Relation, die eine Reihe ordnet, ist dabei laut Wittgenstein mit einer Operation äuqivalent, durch welche ein Glied aus dem anderen entsteht (Abschnitt 10.2). Bezeichnen wir in unserem Beispiel die Operation mit 'Z', so können wir die obige Reihe so schreiben:

$$Ax,\ Z\text{'}Ax,\ Z\text{'}Z\text{'}Ax,\ Z\text{'}Z\text{'}Z\text{'}Ax,\ Z\text{'}Z\text{'}Z\text{'}Z\text{'}Ax,\ \ldots$$

Vor diesem Hintergrund wird im folgenden Abschnitt Wittgensteins Definition der natürlichen Zahl interpretiert.

11.6 Die Definition der Zahl

Nach Einführung der allgemeinen Form der Operation fährt Wittgenstein mit folgender rekursiven Definition der natürlichen Zahl fort:[5]

> "Und *so* kommen wir zu den Zahlen: Ich definiere
> $x = \Omega^{0}{}'x$ Def. und
> $\Omega'\Omega^{\nu}{}'x = \Omega^{\nu+1}{}'x$ Def.
> Nach diesen Zeichenregeln schreiben wir also die Reihe
> $x,\ \Omega'x,\ \Omega'\Omega'x,\ \Omega'\Omega'\Omega'x,\ \ldots$
> so: $\Omega^{0}{}'x,\ \Omega^{0+1}{}'x,\ \Omega^{0+1+1}{}'x,\ \Omega^{0+1+1+1}{}'x,\ \ldots$
> Also schreibe ich statt »$[x, \xi, \Omega'\xi]$«:
> »$[\Omega^{0}{}'x, \Omega^{\nu}{}'x, \Omega^{\nu+1}{}'x]$«.
> Und definiere:
> $0 + 1 = 1$ Def.
> $0 + 1 + 1 = 2$ Def.
> $0 + 1 + 1 + 1 = 3$ Def.
> (usf.)
> Die Zahl ist der Exponent einer Operation"(*TLP* 6.02–6.03).

'Ω' bezeichnet die variable Operation, während 'x' die Form eines Gliedes darstellt, welches nicht durch Anwendung der Operation entstanden ist, für welche 'Ω' die Variable ist. Und das Komma soll die Form des Resultats einer Anwendung der Operation bezeichnen, für welche 'Ω' die Variable ist. Folglich zeigt die Reihe

$$x,\ \Omega'x,\ \Omega'\Omega'x,\ \Omega'\Omega'\Omega'x,\ \ldots$$

die allgemeine Form einer jeden Reihe, die durch sukzessive Anwendung einer bestimmten Operation auf eine bestimmte Basis gebildet ist (In unserem Beispiel des vorigen Abschnittes die bestimmte Operation Z und die bestimmte Basis Ax). Folgen wir Wittgenstein und definieren $\Omega^{0}{}'x = x$, $\Omega^{0+1}{}'x = \Omega'x$, $\Omega^{0+1+1}{}'x = \Omega'\Omega'x$, usf. und setzen '1' mit '$0 + 1$' gleich, '2' mit '$0 + 1 + 1$', '3' mit '$0 + 1 + 1 + 1$', usf., so läßt sich die allgemeine Form einer Reihe in der Form

$$\Omega^{0}{}'x,\ \Omega^{1}{}'x,\ \Omega^{2}{}'x,\ \Omega^{3}{}'x,\ \ldots$$

schreiben, d.h. die (natürliche) "Zahl ist der Exponent einer Operation": Die Zahl ist die Kennzeichnung (der formalen Eigenschaft), *wie oft* eine Operation sukzessiv auf eine Basis angewandt wurde. So kennzeichnet '0' keine bzw.

[5] Wittgenstein schreibt *Definiendum* rechts und *Definiens* links.

Null sukzessive Anwendungen, '1' die einmalige Anwendung, '2' die zweimalige Anwendung, usf.. Von hier zum Begriff der Zahl ist es nur ein kleiner Schritt. Über den Zahlbegriff schreibt Wittgenstein in Paragraph 6.022:

> "Der Zahlbegriff ist nichts anderes als das Gemeinsame aller Zahlen, die allgemeine Form der Zahl.
> Der Zahlbegriff ist die variable Zahl"(*TLP* 6.022).

Ein Blick auf die Zahlenreihe $0, 0+1, 0+1+1, 0+1+1+1$, usf. läßt ersehen, daß die Relation zwischen Glied und nachfolgendem Glied gleichförmig ist. Anders ausgedrückt: Die Zahlenreihe ist nach einer internen Relation geordnet. Folglich entspricht der Reihe ein formaler Begriff. Dieser Begriff ist der Zahlbegriff bzw. die variable Zahl '$[0, \xi, \xi+1]$' (*TLP* 6.03).

11.7 Die Sätze der Mathematik

Nach der Erörterung des Begriffs der Zahl als Exponent einer Operation fährt Wittgenstein mit einem Vergleich von Logik und Mathematik fort, wobei er seine Erläuterungen über die Mathematik auf die Gleichungen der Arithmetik einschränkt. So schreibt er in Paragraph 6.22: "Die Logik der Welt, die die Sätze der Logik in den Tautologien zeigen, zeigt die Mathematik in den Gleichungen"(*TLP* 6.22). Anders ausgedrückt: Sind Gleichungen zwar keine Tautologien, so haben sie jedoch mit den Tautologien gemein, daß sie nichts über die Welt aussagen. "Der Satz der Mathematik drückt keinen Gedanken aus"(*TLP* 6.21). Die Tautologie läßt der Wirklichkeit den ganzen logischen Raum. Sie ist sinnlos bzw. die Grenze des Sagbaren. Die Gleichung ist jedoch weder ein eigentlicher noch ein sinnloser Satz sondern, so Wittgenstein, ein Scheinsatz (*TLP* 6.2). Die Distinktion zwischen sinnlosen Sätzen der Logik und Scheinsätzen der Mathematik wird erst verständlich, wenn wir Wittgensteins Ausführungen über Gleichungen vor dem Hintergrund des Begriffs der Zahl als Exponent einer Operation interpretieren: Zahlen treten *zweckmäßig* nur im Exponenten von Ausdrücken wie 'Z^{3}'Ax' vor.[6] Fahren wir fort:

> "Wenn zwei Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen verbunden werden, so heißt das, sie sind durch einander ersetzbar. Ob dies der Fall ist, muß sich an den beiden Ausdrücken selbst zeigen. [...] Und, daß die Sätze der Mathematik bewiesen werden können, heißt ja nichts anderes, als daß ihre Richtigkeit einzuse-

[6] In Abschnitt 11.9 wird gezeigt, wie Sätze unserer Umgangssprache – z.B. 'Es sind 2×2 Äpfel' – so zu analysieren sind, daß Zahlen nur im Exponenten auftreten.

> hen ist, ohne daß das, was sie ausdrücken, selbst mit den Tatsachen auf seine Richtigkeit hin verglichen werden kann"(*TLP* 6.23–6.2321).

Zahlen sind Exponenten einer Operation. Eine Gleichung wie '$2+3=4+1$' beweisen heißt zeigen, daß rechter und linker Zahlen-Term ('$2+3$' und '$4+1$') einander als Exponent ersetzen können:

> "Die Methode der Mathematik, zu ihren Gleichungen zu kommen, ist die Substitutionsmethode.
> Denn die Gleichungen drücken die Ersetzbarkeit zweier Ausdrücke aus, und wir schreiten von einer Anzahl von Gleichungen zu neuen Gleichungen vor, indem wir, den Gleichungen entsprechend, Ausdrücke durch andere ersetzen"(*TLP* 6.24).

Diese Ausführungen wollen folgendes besagen: Sind 'μ' und 'ν' zwei Zahlen-Terme, so zeigt '$\mu=\nu$', daß

$$\Omega^{\mu}\text{'}x = \Omega^{\nu}\text{'}x$$

'Ω' bezeichnet Abschnitt 11.6 folgend die variable Operation, während 'x' wiederum die Form eines Gliedes darstellt, welches nicht durch Anwendung der Operation entstanden ist, für welche 'Ω' die Variable ist. (Würden wir 'Ω' als eine bestimmte Operation auffassen, beispielsweise als die Negation, so könnten wir von $\sim\sim p = p$ folgern, daß 2 gleich 0 ist.) Wie laut Wittgenstein vor diesem Hintergrund Beweise auszuführen sind, wird im nächsten Abschnitt erläutert.

11.8 Der Beweis der Gleichung

Wittgenstein beweist im *Tractatus* nur eine Gleichung (*TLP* 6.241):[7]

> "So lautet der Beweis des Satzes $2\times 2=4$:

$$\begin{aligned}
(\Omega^{\nu})^{\mu}\text{'}x &= \Omega^{\nu\times\mu}\text{'}x \qquad \text{Def.},\\
\Omega^{2\times 2}\text{'}x &= (\Omega^{2})^{2}\text{'}x = (\Omega^{2})^{1+1}\text{'}x\\
&= \Omega^{2}\text{'}\Omega^{2}\text{'}x = \Omega^{1+1}\text{'}\Omega^{1+1}\text{'}x\\
&= (\Omega\text{'}\Omega)\text{'}(\Omega\text{'}\Omega)\text{'}x = \Omega\text{'}\Omega\text{'}\Omega\text{'}\Omega\text{'}x\\
&= \Omega^{1+1+1+1}\text{'}x = \Omega^{4}\text{'}x\text{''}.
\end{aligned}$$

[7]Dieser Abschnitt entstand zum Teil auf der Grundlage von (Frascolla, 1994, S. 8–23). Es gilt in diesem Zusammenhang zu bemerken, daß hier im Gegensatz zur Ausführung von Frascolla keine Distinktion zwischen Metasprache und Objektsprache eingeführt wird. Dieser Unterschied wird in Abschnitt 11.9 kurz erläutert.

Was das Symbol 'Ω^ν' in der runden Klammer der *Definiens* bzw. das Symbol '$(\Omega\text{'}\Omega)$' in der vierten Zeile bedeutet, wird von Wittgenstein nicht explizit erklärt, läßt sich jedoch aus dem Zusammenhang des Beweises und mit Hilfe der Paragraphen 5.253–5.3 ersehen: "Eine Operation kann die Wirkung einer anderen rückgängig machen. Operationen können einander aufheben [...] Das Resultat jeder Wahrheitsoperation mit den Resultaten von Wahrheitsoperationen mit Elementarsätzen ist wieder das Resultat *Einer* Wahrheitsoperation mit Elementarsätzen"(*TLP* 5.253–5.3). Operationen lassen sich, so Wittgenstein, zusammensetzen, d.h. '$(\Omega\text{'}\Omega)$' ist die allgemeine Form der Zusammensetzung einer Operation mit sich selbst, 'Ω^ν' die allgemeine Form der ν'ten Zusammensetzung bzw. Iteration einer Operation mit sich selbst:

$$\begin{aligned}
&\Omega^2 = \Omega^{1+1} = (\Omega\text{'}\Omega),\\
&\Omega^3 = \Omega^{1+1+1} = (\Omega\text{'}(\Omega\text{'}\Omega)),\\
&\Omega^4 = \Omega^{1+1+1+1} = (\Omega\text{'}(\Omega\text{'}(\Omega\text{'}\Omega))),\\
&\quad \text{usf.}
\end{aligned}$$

Nun fehlt nur die Klärung der Ersetzbarkeit der Ausdrücke in der vierten Zeile des Beweises. Zu diesem Zweck ist der Paragraph 6.231 hilfreich:

> "Es ist eine Eigenschaft der Bejahung, daß man sie als doppelte Verneinung auffassen kann.
> Es ist eine Eigenschaft von »1 + 1 + 1 + 1«, daß man es als »$(1+1)+(1+1)$« auffassen kann"(*TLP* 6.231).

Wittgenstein richtet unsere Aufmerksamkeit auf die Gleichung

$$(1+1)+(1+1) = 1+1+1+1$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der vierten Zeile unseres Beweises

$$(\Omega\text{'}\Omega)\text{'}(\Omega\text{'}\Omega)\text{'}x = \Omega\text{'}\Omega\text{'}\Omega\text{'}\Omega\text{'}x$$

so wird eine Ähnlichkeit der Struktur offensichtlich. Daß es möglich ist '$(1+1)+(1+1)$' als '$1+1+1+1$' aufzufassen, kann auch folgend ausgedrückt werden: Man kann die Klammern entfernen. Werden die beiden Klammerpaare in '$(1+1)+(1+1)$' in zwei Schritten bzw. Operationen entfernt, so erhalten wir die Gleichungen:

$$(1+1)+(1+1) = (1+1)+1+1 = 1+1+1+1$$

Bezüglich der Struktur verhalten diese Gleichungen sich zu

$$(\Omega\text{'}\Omega)\text{'}(\Omega\text{'}\Omega)\text{'}x = (\Omega\text{'}\Omega)\text{'}\Omega\text{'}\Omega\text{'}x = \Omega\text{'}\Omega\text{'}\Omega\text{'}\Omega\text{'}x$$

wie '$(1+1)+(1+1)$' zur Zeile des Beweises. Die neue Zeile läßt sich folgendermaßen verstehen: Sie zeigt in zwei Schritten die Ersetzbarkeit des Ausdrucks '$(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x$' durch '$\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x$'. Hieraus ersehen wir, daß die beiden Schritte als Anwendung der gleichen syntaktischen Regel interpretiert werden können:

$$(\Omega'\Omega)'\xi = \Omega'\Omega'\xi, \tag{11.1}$$

wobei 'Ω' die variable Operation und 'ξ' ein variables Glied bezeichnet. Anders ausgedrückt: Die Zusammensetzung einer Operation mit sich selbst ist assoziativ, d.h. das Resultat der Anwendung der Zusammensetzung $(\Omega'\Omega)$ auf ξ ist das Resultat der Anwendung von Ω auf das Resultat der Anwendung von Ω auf ξ. Es ist aus der Sicht dieser Interpretation entscheidend, daß Wittgensteins Anwendung der Assoziativität nicht als Behauptung über die Zusammensetzung von Operationen mit sich selbst aufgefaßt wird,[8] sondern eher als Trivialität, die sich aus der Sicht Wittgensteins von selbst verstehen soll: Man schreitet auf dem einen Wege in *einer* Operation und auf dem anderen Wege in zwei Operationen zum übernächsten Glied der Formenreihe, welche durch die Operation geordnet ist. Fassen wir zusammen:

$$\begin{aligned}
\Omega^{2\times 2}{}'x &= (\Omega^2)^{2}{}'x && \text{Def. von '}\Omega^{\nu\times\mu}{}'x\text{'}\\
&= (\Omega^2)^{1+1}{}'x && \text{Def. von '2'}\\
&= \Omega^{2}{}'\Omega^{2}{}'x && \text{rekur. Def. in 6.02 mit '}\Omega^2\text{' statt '}\Omega\text{'}\\
&= \Omega^{1+1}{}'\Omega^{1+1}{}'x && \text{Def. von '2'}\\
&= (\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x && \text{Def. von '}\Omega^{1+1}{}\text{'}\\
&= \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x && \text{zweifache Anw. von (11.1)}\\
&= \Omega^{1+1+1+1}{}'x && \text{rekur. Def. in 6.02}\\
&= \Omega^{4}{}'x && \text{Def. von '4'}
\end{aligned}$$

Bevor wir den allgemeinen Beweis an einem Beispiel erklären, wäre noch zu bemerken, daß Wittgenstein die Addition im *Tractatus* nicht definiert. Wie die Addition zu definieren ist, ersahen wir jedoch anhand unseres Vergleichs der Struktur:

$$\Omega^{\mu}{}'\Omega^{\nu}{}'x = \Omega^{\nu+\mu}{}'x \qquad \text{Def.}$$

(*Definiens* links und *Definiendum* rechts. 'μ' und 'ν' haben rechts die Plätze getauscht, um mit der Definition in Paragraph 6.02, d.h. mit '$\Omega'\Omega^{\nu}{}'x = \Omega^{\nu+1}{}'x$ Def.', konsistent zu sein.) Vor diesem Hintergrund ist es möglich, Gleichungen wie '$5+2=7$' und '$4\times(3+1) = 4+12$' zu beweisen. Ein Beweis der Gleichung '$2+2=4$' findet sich laut Potter in einem der *Tractatus*-Manuskripte (Potter, 2000, S. 185).

[8]Wie dies beispielsweise bei Frascolla (1994, S. 8–23) der Fall ist.

11.9 Das Zählen von Äpfeln

Folgendes Beispiel dient zur Erläuterung: Das Zählen von Äpfeln anhand des *Tractatus*-Symbolismus. Das Beispiel zeigt nach dem Wissen dieser Arbeit erstmals, wie man im *Tractatus zählt* und *rechnet*, d.h. es stellt die erste semantische Interpretation des allgemeinen Beweises der Gleichung '$2 \times 2 = 4$' dar. Die Stärke dieser Interpretation ist, daß im Gegensatz zu Frascolla (1994, S. 8–23) und Marion (1998, S. 21–9) *überhaupt* keine Rekonstruktion von *Tractatus*-Paragraphen nötig ist.[9] Im Gegenteil: Durch das Beispiel werden die an sich zum Teil schwer nachvollziehbaren Ausführungen Wittgensteins verständlich. Die Interpretation von Frascolla, die von Marion übernommen wird, führt dagegen eine Distinktion zwischen Metasprache (Arithmetik) und Objektsprache ("language of the general theory of logical operations") ein und rekonstruiert vor diesem Hintergrund die *Tractatus*-Paragraphen, welche die Arithmetik behandeln:

> "The ambiguity of the text of the *Tractatus* [...] originates from Wittgenstein's erroneous use of the numerical variable "ν", which conceals his true intentions in supplying the inductive definition at the beginning of 6.02. To fulfil them correctly, it has to be construed as a definition framed in a metalanguage which has the language of the theory of logical operations as its object-language. If my interpretation is right, the variable "ν" should be regarded as a schematic letter for an expression of the form $\mathit{0} + \mathit{1} + \mathit{1} + \ldots + \mathit{1}$. Expressions of this form belong to the language of the theory of operations and each of them is used in it as an exponent attached to "Ω" to represent a specific formal property common to the elements of a definite, wide class of linguistic (non-mathematical) constructs [...] I believe this is the only way in which the reduction of arithmetic to the general theory of logical operations, outlined by Wittgenstein in the *Tractatus*, can be effected"(Frascolla, 1994, S. 6).

Frascollas Interpretation ist infolge dieser Arbeit verfehlt: In Kapitel 8 im allgemeinen und Abschnitt 8.1 im besonderen wurde dargestellt, weshalb eine Distinktion zwischen Metasprache und Objektsprache unzulässig ist: Das Ziel der *Tractatus*-Auffassung des Satzes als Bild bzw. des Begriffs des

[9] Frascolla (1994, S. 1–7) zeigt, daß einflußreiche Wittgenstein-Exegeten – z.B. Anscombe (1959), Black (1964), Fogelin (1976) und Ayer (1985) – die Paragraphen des *Tractatus*, welche die Arithmetik behandeln, unzulänglich interpretiert haben. Deshalb werden folgend nur Frascolla (1994, S. 8–23) und Marion (1998, S. 21–9) berücksichtigt.

logischen Raumes ist es, ohne Verwendung eines allgemeinen Begriffs des Satzsinnes den Sinn der Elementarsätze zu bestimmen. Anders ausgedrückt: Die Rekonstruktion ist aus der Sicht dieser Arbeit mit dem Selbstverständnis des *Tractatus* im Widerspruch. So schreibt Frascolla beispielsweise wie folgt:

> "If we allow ourselves to violate Wittgenstein's prohibition of speaking of what is shown by language and, in particular, of speaking of formal properties of linguistic expressions [...]"(Frascolla, 1994, S. 11).

Wie Wittgensteins Auffassung der Arithmetik als Teil des *Tractatus* als Ganzheit, d.h. insbesondere ohne Rekonstruktionen, aufgefaßt werden kann, wird sich aus Abschnitt 11.10 und dem nächsten Kapitel vor dem Hintergrund des folgenden Beispiels ergeben:

Wir bezeichnen 'x ist ein Apfel' mit 'Ax' und schreiben folgende Formenreihe nieder:

Ax,
$(\exists x).Ax$,
$(\exists x, y).Ax \,.\, Ay$,
$(\exists x, y, z).Ax \,.\, Ay \,.\, Az$,
$(\exists x, y, z, w).Ax \,.\, Ay \,.\, Az \,.\, Aw$,
usf.

Benennen wir die Operation, welche diese Reihe ordnet, Z-Operator, so können wir (Paragraph 6.02 folgend) die Reihe so schreiben:

$Z^{0}\text{'}Ax$, $Z^{1}\text{'}Ax$, $Z^{2}\text{'}Ax$, $Z^{3}\text{'}Ax$, $Z^{4}\text{'}Ax$, usf.

Auf dieser Grundlage wird folgender *Tractatus*-Paragraph verständlich: "Tautologie und Kontradiktion sind aber nicht unsinnig; sie gehören zum Symbolismus, und zwar ähnlich wie die »o« zum Symbolismus der Arithmetik"(*TLP* 4.4611). Tautologie und Kontradiktion sind die Grenze des Sagbaren, d.h. sie sind keine eigentlichen sondern sinnlose Sätze. Die Zahl 0 ist in unserer Formenreihe (nur) im Glied '$Z^{0}\text{'}Ax$' enthalten, wobei $Z^{0}\text{'}Ax = Ax$. Folglich gilt für Tautologie bzw. Kontradiktion und die 0 ähnliches: 'Ax' ist kein eigentlicher Satz, denn die Variable x in 'Ax' ist nicht gebunden. Erinnern wir uns als nächstes an Wittgensteins Interpretation der Variablen (Abschnitt 7.5):

> "Gleichheit des Gegenstandes drücke ich durch Gleichheit des Zeichens aus, und nicht mit Hilfe eines Gleichheitszeichens. Verschiedenheit der Gegenstände durch Verschiedenheit der Zeichen"(*TLP* 5.53).

Es ist vor diesem Hintergrund zu ersehen, welche Sätze unserer Umgangssprache Wittgenstein durch die Glieder unserer Formenreihe logisch geklärt sah:

$$\begin{aligned}
Ax &= Z^{0}\text{'}Ax = \text{Es sind 0 Äpfel}\\
(\exists x).Ax &= Z^{1}\text{'}Ax = \text{Es ist 1 Apfel}\\
(\exists x, y).Ax\,.\,Ay &= Z^{2}\text{'}Ax = \text{Es sind 2 Äpfel}\\
(\exists x, y, z).Ax\,.\,Ay\,.\,Az &= Z^{3}\text{'}Ax = \text{Es sind 3 Äpfel}\\
(\exists x, y, z, w).Ax\,.\,Ay\,.\,Az\,.\,Aw &= Z^{4}\text{'}Ax = \text{Es sind 4 Äpfel}\\
&\text{usf.}
\end{aligned}$$

Folglich ist unser Z-Operator die logische Operation *Zählen*. Wenden wir den allgemeinen Beweis von $2 \times 2 = 4$ für die Werte unseres Beispiels an, so ist zu ersehen, wie man im *Tractatus*-Symbolismus *berechnen* kann, daß 2×2 Äpfel gleich 4 Äpfel sind:

$$\begin{aligned}
\text{Es sind } 2 \times 2 \text{ Äpfel} &= Z^{2\times 2}\text{'}Ax\\
&= (Z^{2})^{2}\text{'}Ax = (Z^{2})^{1+1}\text{'}Ax\\
&= Z^{2}\text{'}Z^{2}\text{'}Ax = Z^{1+1}\text{'}Z^{1+1}\text{'}Ax\\
&= (Z\text{'}Z)\text{'}(Z\text{'}Z)\text{'}Ax = Z\text{'}Z\text{'}Z\text{'}Z\text{'}Ax\\
&= Z^{1+1+1+1}\text{'}Ax = Z^{4}\text{'}Ax\\
&= \text{Es sind 4 Äpfel}
\end{aligned}$$

Die Sätze dieses Beweises klären die logische Struktur folgender Sätze unserer Umgangssprache:

$$\begin{aligned}
\text{Es sind } 2 \times 2 \text{ Äpfel} &= Z^{2\times 2}\text{'}Ax = (Z^{2})^{2}\text{'}Ax\\
\text{Es sind } 2 \times (1+1) \text{ Äpfel} &= (Z^{2})^{1+1}\text{'}Ax\\
\text{Es sind } 2 + 2 \text{ Äpfel} &= Z^{2}\text{'}Z^{2}\text{'}Ax\\
\text{Es sind } (1+1) + (1+1) \text{ Äpfel} &= Z^{1+1}\text{'}Z^{1+1}\text{'}Ax = (Z\text{'}Z)\text{'}(Z\text{'}Z)\text{'}Ax\\
\text{Es sind } 1+1+1+1 \text{ Äpfel} &= Z^{1+1+1+1}\text{'}Ax = Z\text{'}Z\text{'}Z\text{'}Z\text{'}Ax\\
\text{Es sind 4 Äpfel} &= Z^{4}\text{'}Ax
\end{aligned}$$

In den Zeilen, welche zwei Sätze des *Tractatus*-Symbolismus enthalten, ist der Zusammenhang zwischen den beiden Sätzen, daß der linke Satz anhand des rechten definiert ist. Folglich würden wir den Beweis normalerweise so schreiben:

$$\begin{aligned}\text{Es sind } 2 \times 2 \text{ Äpfel} &= \text{Es sind } 2 \times (1+1) \text{ Äpfel}\\ &= \text{Es sind } 2+2 \text{ Äpfel}\\ &= \text{Es sind } (1+1)+(1+1) \text{ Äpfel}\\ &= \text{Es sind } 1+1+1+1 \text{ Äpfel}\\ &= \text{Es sind } 4 \text{ Äpfel}\end{aligned}$$

Fahren wir nach diesem Beispiel mit den Paragraphen des *Tractatus* fort, die sich der Mathematik bzw. Arithmetik widmen.

11.10 Die Mathematik eine logische Methode

Im Lichte des Beispiels werden die Paragraphen des *Tractatus* verständlich, welche die Mathematik behandeln. So schreibt Wittgenstein beispielsweise in Paragraph 6.2:

> "Die Mathematik ist eine logische Methode.
> Die Sätze der Mathematik sind Gleichungen, also Scheinsätze.
> Der Satz der Mathematik drückt keinen Gedanken aus.
> Im Leben ist es ja nie der mathematische Satz, den wir brauchen, sondern wir benützen den mathematischen Satz *nur*, um aus Sätzen, welche nicht der Mathematik angehören, auf andere zu schließen, welche gleichfalls nicht der Mathematik angehören.
> (In der Philosophie führt die Frage »wozu gebrauchen wir eigentlich jenes Wort, jenen Satz« immer wieder zu wertvollen Einsichten.)"(*TLP* 6.2–6.211).

In der Mathematik bzw. Arithmetik führen wir (logische) Operationen aus. Im Beispiel werden Äpfel *gezählt*. Wir haben es folglich nicht mit der zufälligen sondern der wesentlichen Allgemeinheit zu tun. Gleichungen sind laut Wittgenstein Scheinsätze, weil die Zahl *zweckmäßig* nur als Exponent einer Operation auftritt, d.h. Gleichungen sind logisch gesehen auf einem anderen Niveau als sinnvolle bzw. sinnlose Sätze: Auf Gleichungen selbst können im Gegensatz zu sinnvollen bzw. sinnlosen Sätzen keine logischen Operationen angewendet werden. Sätze wie 'Es sind 4 Äpfel' bzw. 'Die Zahl der Äpfel ist 4' scheinen die Zahl 4 zu enthalten, weshalb Frege sich aus der Sicht Wittgensteins irren konnte. Dies ist jedoch nur Schein, denn beide Sätze wären nach unserer Interpretation als abgekürzte Schreibweisen des Satzes

$$(\exists x, y, z, w).Ax\,.\,Ay\,.\,Az\,.\,Aw$$

aufzufassen. Dieser Satz wäre wie gezeigt *zweckmäßig* als 'Z^4'Ax' zu schreiben, d.h. die Zahl 4 *kennzeichnet*, wie oft wir *einen* Apfel gezählt haben. Und '$(Z^2)^2$'Ax' drückt aus, daß zwei mal zwei (bzw. 2×2) Äpfel gezählt wurden. Daß es im "Leben [...] ja nie der mathematische Satz [ist], den wir brauchen" will heißen, daß wir Sätze der Mathematik nicht gebrauchen, um etwas zu *sagen*, sondern um etwas zu kennzeichnen bzw. *zeigen*. So zeigt die Gleichung '$2 \times 2 = 4$' beispielseweise, daß falls ich mich zwei mal zwei Schritte nach vorne bewege, insgesamt vier Schritte vorwärts komme. Zahlen antworten deshalb laut Wittgensteins im Gegensatz zu Russell nicht auf die Frage 'Wie viele?' sondern auf die Frage 'Wie oft?'. Anders ausgedrückt: Wittgensteins Auffassung der Zahl ist nicht die Auffassung der Zahl als Anzahl bzw. Kardinalzahl sondern die Auffassung der Zahl als Ordinalzahl: Die Auffassung der Zahl als Kardinalzahl ist laut Wittgenstein die Auffassung, daß wir es in der Mathematik mit der zufälligen Allgemeinheit zu tun haben, während die Auffassung der Zahl als Ordinalzahl, als Exponent einer Operation, die Auffassung ist, daß wir es in der Mathematik mit der wesentlichen Allgemeinheit zu tun haben. Fahren wir fort:

> "Das Wesentliche an der Gleichung ist aber, daß sie nicht notwendig ist, um zu zeigen, daß die beiden Ausdrücke, die das Gleichheitszeichen verbindet, dieselbe Bedeutung haben, da sich dies aus den beiden Ausdrücken selbst ersehen läßt"(*TLP* 6.232).

Was Wittgenstein hiermit sagen möchte läßt sich auf verständliche Art und Weise anhand des Beispiels erklären: Um zu zeigen, daß 2×2 Äpfel gleich 4 Äpfel sind, wurde (überhaupt) nicht die Gleichung $2 \times 2 = 4$ sondern folgendes gebraucht:

> "Die Frage, ob man zur Lösung der mathematischen Probleme die Anschauung brauche, muß dahin beantwortet werden, daß eben die Sprache hier die nötige Anschauung liefert.
> Der Vorgang des *Rechnens* vermittelt eben diese Anschauung.
> Die Rechnung ist kein Experiment"(*TLP* 6.233).

Im Lichte des Beispiels werden diese an sich obskuren Sätze begreiflich. Denn der Vorgang des *Rechnens* mit Äpfeln zeigt, was Wittgenstein meint, wenn er sagt, daß “die Sprache die nötige Anschauung liefert”:

$$
\begin{aligned}
\text{Es sind } 2 \times 2 \text{ Äpfel} &= Z^{2\times 2}\text{'}Ax \\
&= (Z^2)^{2}\text{'}Ax = (Z^2)^{1+1}\text{'}Ax \\
&= Z^{2}\text{'}Z^{2}\text{'}Ax = Z^{1+1}\text{'}Z^{1+1}\text{'}Ax \\
&= (Z\text{'}Z)\text{'}(Z\text{'}Z)\text{'}Ax = Z\text{'}Z\text{'}Z\text{'}Z\text{'}Ax \\
&= Z^{1+1+1+1}\text{'}Ax = Z^{4}\text{'}Ax \\
&= \text{Es sind 4 Äpfel}
\end{aligned}
$$

Der Vorgang des Rechnens vermittelt die nötige Anschauung: Das Beispiel offenbart auf *übersichtliche* bzw. *zweckmäßige* Art und Weise die logische Struktur bzw. Form des Rechnens, des Lösens eines mathematischen Problems. Die Rechnung ist kein Experiment: Durch das Rechnen wird die Richtigkeit der Sätze der Mathematik eingesehen, “ohne daß das, was sie ausdrücken, selbst mit den Tatsachen auf seine Richtigkeit hin verglichen werden muß”(*TLP* 6.2321). Und weiter:

> “Das Wesentliche der mathematischen Methode ist es, mit Gleichungen zu arbeiten. Auf dieser Methode beruht es nämlich, daß jeder Satz der Mathematik sich von selbst verstehen muß.
> Die Methode der Mathematik, zu ihren Gleichungen zu kommen, ist die Substitutionsmethode”(*TLP* 6.2341–6.24).

Russells Auffassung der Mathematik ist die Auffassung der Mathematik als Experiment. Es ist die realistische Auffassung, daß die Mathematik extern begründet ist, daß die Sätze der Mathematik zufällig wahr sind. Wittgensteins Auffassung ist die Auffassung, daß die Mathematik keine (externe) Grundlage hat, sondern sich von selbst verstehen muß. Sie tut dies anhand der Substitutionsmethode, durch das Ersetzen eines Ausdruckes mit einem anderen wie an unserem Beispiel illustriert, d.h. durch den Vorgang des Rechnens. Im nächsten Kapitel wird dargestellt wie die Philosophie sich von selbst verstehen muß, wobei das bessere Verständnis der Mathematik sich als wesentlich erweisen wird.

Kapitel 12

Das Wegwerfen der Leiter

12.1 ‘The Cardinal Problem of Philosophy’

Die Fertigstellung des *Tractatus* beendete Wittgenstein 1919 während seines Aufenthalts in einem Kriegsgefangenlager südlich von Rom (siehe S. 2). Von dort aus gelang ihm die Versendung eines Exemplars des Manuskripts an Russell, welcher das Manuskript laß und am 13. August 1919 folgendes an Wittgenstein schrieb:

> “I am convinced you are right in your main contention, that logical props are tautologies, which are not true in the sense that substantial props are true. I do not understand why you are content with a purely ordinal theory of number [...] Also you do not state your reasons against classes. *I am sure you are right in thinking the book of first-class importance.* But in places it is obscure through brevity”(Wittgenstein, 1995, S. 121).

Wittgensteins antwortete am 19. August 1919 auf Russells Brief:

> “[...] some of your questions want a very lengthly answer and you know how difficulty it is for me to write on logic. That’s also the reason why my book is so short, and consequently so obscure. But that I can’t help. – Now I’m afraid you haven’t really got hold of my main contentation, to which the whole businuess of logical prop[osition]s is only a corollary. The main point is the theory of what can be expressed (gesagt) by prop[osition]s – i.e. by language – [...] and what can not be expressed by prop[osition]s, but only shown (gezeigt); which, I believe, is the cardinal problem of philosophy”(Wittgenstein, 1995, S. 124).

Russell verstand nicht die Gründe, weshalb Wittgenstein keine Klassen und keine Kardinalzahlen sondern nur Ordinalzahlen im *Tractatus* zuließ. Im vorigen Kapitel wurde dargestellt, was Russell nicht verstand. Die Gründe sind jedoch eher als ein Grund aufzufassen: Die Allgemeinheit, die wir in der Mathematik brauchen, ist nicht die zufällige sondern die wesentliche. Außerdem hegte Russell den Glauben, daß die Auffassung des logischen Satzes als Tautologie Wittgensteins wichtigste Behauptung darstelle. Dies wird jedoch von Wittgenstein in seiner Antwort strikt verworfen: Sein Hauptanliegen gelte nicht den Tautologien sondern "the cardinal problem of philosophy"; der heute berühmten *Tractatus*-Distinktion zwischen *Sagen* und *Zeigen*. Im nächsten Abschnitt wenden wir uns der Einführung dieser Distinktion im *Tractatus* zu.

12.2 *Sagen* und *Zeigen*

Wittgenstein führt die Distinktion zwischen *Sagen* und *Zeigen* im *Tractatus* wie folgt ein:

> "Der Satz kann die gesamte Wirklichkeit darstellen, aber er kann nicht das darstellen, was er mit der Wirklichkeit gemein haben muß, um sie darstellen zu können – die logische Form.
> Um die logische Form darstellen zu können, müßten wir uns mit dem Satz außerhalb der Logik aufstellen können, das heißt außerhalb der Welt.
> Der Satz kann die logische Form nicht darstellen, sie spiegelt sich in ihm.
> Was sich in der Sprache spiegelt, kann sie nicht darstellen.
> Was *sich* in der Sprache ausdrückt, können *wir* nicht durch sie ausdrücken.
> Der Satz *zeigt* die logische Form der Wirklichkeit.
> Er weist sie auf.
> So zeigt ein Satz wie »fa«, daß in seinem Sinn der Gegenstand a vorkommt, zwei Sätze »fa« und »ga«, daß in ihnen beiden von demselben Gegenstand die Rede ist.
> Wenn zwei Sätze einander widersprechen, so zeigt dies ihre Struktur; ebenso, wenn einer aus dem anderen folgt. Usw.
> Was gezeigt werden *kann*, *kann* nicht gesagt werden"(*TLP* 4.12-4.1212).

Der Satz kann laut Wittgenstein nicht das darstellen, was er mit der Wirklichkeit gemein haben muß, um sie abbilden bzw. darstellen zu können, d.h.

die logische Form. Stattdessen spiegelt bzw. *zeigt* sich die logische Form im Satz. Darüber hinaus illustriert Wittgenstein seinen Standpunkt folgendermaßen: Ein Satz wie 'fa' zeigt, daß in seinem Sinn der Gegenstand a vorkommt. Und wenn zwei Sätze einander widersprechen, so zeigt dies ihre Struktur. In diesem Zusammenhang ist folgendes hervorzuheben: Wittgensteins Bemerkungen wurden in der Arbeit ausführlich erläutert:

1. Der Begriff 'Satz' ist ein formaler Begriff.

2. Der Begriff 'Gegenstand' ist ein formaler Begriff.

3. Folgerungen drücken interne Relationen zwischen Sätzen aus.

Anders ausgedrückt: Die Distinktion zwischen *Sagen* und *Zeigen* kommt in der Distinktion zwischen eigentlichen Begriffen (Relationen) und formalen Begriffen (Relationen) zum Ausdruck. Formale Begriffe werden laut Wittgenstein nicht wie die eigentlichen durch Funktionen sondern durch Variablen bezeichnet. Die allgemeine Satzform '$[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$' wurde in Abschnitt 10.4 erläutert und der formale Begriff 'Gegenstand' in Abschnitt 7.6. Logisches Folgern wurde in Abschnitt 9.3.2 dargestellt.

Daß beispielsweise der Satz ein Wert der allgemeinen Satzform ist *zeigt*, daß seine Wahrheitswertigkeit von der Wahrheit oder Falschheit aller Sätze unabhängig ist. Der Satz, ob elementar oder komplex, stellt unabhängig von dem Sosein der Welt einen Sachverhalt dar, d.h. hat er keinen Sinn, "so kann es nur daran liegen, daß wir einigen seiner Bestandteile keine *Bedeutung* gegeben haben"(*TLP* 5.4733). Wie erwähnt drückt Wittgenstein diese Auffassung auch folgendermaßen aus: "Wir können einem Zeichen nicht den unrechten Sinn geben"(*TLP* 5.4733); "Die Logik muß für sich selber sorgen"(*TLP* 5.473). Es ist laut Wittgenstein Freges Auffassung, daß wir einem Zeichen den unrechten Sinn geben können: "Frege sagt: Jeder rechtmäßig gebildete Satz muß einen Sinn haben; und ich sage: Jeder mögliche Satz ist rechtmäßig gebildet [...]"(*TLP* 5.4733). Daß wir uns in der Logik irren können ist Russells Auffassung: "Das Einleuchten, von dem Russell so viel sprach, kann nur dadurch in der Logik entbehrlich werden, daß die Sprache selbst jeden logischen Fehler verhindert"(*TLP* 5.4731). Folglich stellen sich Frege und Russell aus der Sicht Wittgensteins "außerhalb der Logik [auf] [...], d.h. außerhalb der Welt"(*TLP* 4.12). Entsprechendes gilt bezüglich der Kritik an Russells Typentheorie (Russells Auffassung der Begriffe 'Gegenstand' und 'Funktion' als eigentlich) und der Kritik an der Auffassung des logischen Folgerns von Frege und Russell (Der Auffassung des logischen Folgerns als extern (eigentlich) bestimmt). Weshalb man sich nicht außerhalb der Logik stellen kann bzw. was es heißen will, sich dort zu stellen, wird folgend erläutert.

12.3 Kennzeichnung und Netz

Zum Zwecke der Erläuterung des laut Wittgenstein illusorischen Standpunkts Freges und Russells wird auf die Abschnitte 8.3–8.3.1 verwiesen. Es war im ersten dieser Abschnitte davon die Rede, daß im *Tractatus* auf unser Vermögen hingewiesen wird, eine unsagbare Kenntnis bestimmter Strukturen zu besitzen; Strukturen, die wir nicht in dem Sinne kennen, daß wir sie beschreiben können. Als Beispiel wurde die Erdkugel verwendet. Durch Angabe von Längen- und Breitengrad lassen sich alle unterschiedlichen Möglichkeiten der Position auf dem Erdball kennzeichnen. Die Möglichkeit, auf diese Art und Weise eine Position zu kennzeichnen, führt jedoch nicht die Möglichkeit der Beschreibung der Position mit sich. Vor diesem Hintergrund wurden die Anfangsparagraphen des *Tractatus* (*TLP* 1–2.063) als Kennzeichnung eines Zuges der Wirklichkeit interpretiert. Was in diesen Paragraphen gekennzeichnet wird ist, so hieß es, daß die Möglichkeit zu erkennen, *daß* bestimmte Strukturen in der Welt bestehen, vor der Möglichkeit zu wissen, *wie* diese Strukturen sind, gegeben ist: Der Begriff des logischen Raumes bzw. Phasenraums.

Wittgensteins Erläuterungen bezüglich der Newtonschen Mechanik wurden im anderen Abschnitt dargestellt: Die Newtonsche Mechanik ist wie ein Netz, das wir in die Welt werfen (*TLP* 6.341–6.361). Sie ist "ein Versuch, alle *wahren* Sätze, die wir zur Weltbeschreibung brauchen, nach Einem Plane zu konstruieren"(*TLP* 6.343). Ihre Form der Weltbeschreibung ist jedoch beliebig, d.h. die Newtonsche Mechanik ist nur ein mögliches Netz unter vielen. Durch unterschiedliche Netze können verschiedene Züge der Wirklichkeit eingefangen werden; ohne Gebrauch irgendeines Netzes kann man gar nichts einfangen. In Abschnitt 8.3.1 wurde deshalb gesagt, daß ein logischer Raum die gleiche Rolle einnimmt wie die Kantschen Kategorien, d.h. der Raum ist selbst keine Erfahrungssache sondern setzt Bedingungen, die erst Erfahrungen einer bestimmten Form ermöglichen. Die Beliebigkeit bzw. der konventionelle Charakter eines Netzes kommt im *Tractatus* folgendermaßen zum Ausdruck:

> "So auch sagt es nichts über die Welt aus, daß sie sich durch die Newtonsche Mechanik beschreiben läßt; wohl aber, daß sie sich so durch jene beschreiben läßt, wie dies eben der Fall ist. Auch das sagt etwas über die Welt, daß sie sich durch die eine Mechanik einfacher beschreiben läßt als durch die andere"(*TLP* 6.342).

Wittgenstein weist im Zitat auf den Hertzschen Vergleich der drei Mechaniken hin (Abschnitt 3.1). Der Österreicher spricht von der *Einfachheit*, welches zusammen mit der *Deutlichkeit* das Hertzsche Kriterium der *Zweckmäßigkeit* darstellt. Es wurde in Abschnitt 9.3 gezeigt, daß Wittgenstein das Kriterium der Zweckmäßigkeit zum Vergleich von Begriffschriften verwendet. Daß dieser Zusammenhang besteht, wird in der Sekundärliteratur nicht berücksichtigt: Wittgensteins Erläuterungen bezüglich der Übersichtlichkeit bzw. Zweckmäßigkeit von Begriffschriften wird fast ausschließlich in Zusammenhang mit Frege gebracht. Folglich wird auch die *Sagen-Zeigen*-Distinktion als Einfluß Freges auf Wittgenstein interpretiert.[1] Folgendes offenbart, weshalb solch eine Darstellung in Frage zu stellen ist.

12.4 Sprache als Netz

Was es einzusehen gilt ist, daß Wittgensteins Erläuterungen bezüglich der Mechanik nicht nur der Mechanik sondern der Weltbeschreibung bzw. der Sprache allgemein gelten. Insbesondere unserer Umgangssprache, deren logische Form durch die unterschiedlichen Begriffschriften mehr oder weniger *zweckmäßig* zum Vorschein kommt. Vor diesem Hintergrund ist zu ersehen, weshalb Wittgenstein die Frage nach der Form der Elementarsätze als unsinnig erklärt:[2]

> "Es ist klar, wir haben vom Elementarsatz einen Begriff, abgesehen von seiner besonderen logischen Form [...]
> Und wie wäre es auch möglich, daß ich es in der Logik mit Formen zu tun hätte, die ich erfinden kann; sondern mit dem muß ich es zu tun haben, was es mir möglicht macht, sie zu erfinden [...]

[1]Siehe beispielsweise Geach (1976), Baker (1988), Diamond (1991e) und Conant (2000). Ausnahmen sind Janik und Toulmin (1996) und Barker (1980), welche die Distinktion mit Hertz in Verbindung bringen. Die Distinktion selbst wird vom Standpunkt dieser Arbeit von den Autoren dieser Werke jedoch nicht verstanden. So wird in beiden Werken die Ansicht vertreten, daß der *Tractatus* eine Korrespondenz-Theorie der Wahrheit enthält ((Janik und Toulmin, 1996, S. 185) bzw. (Barker, 1980, S. 252–3)). Solch eine Theorie ist jedoch die Auffassung, daß der Sinn des Satzes extern bestimmt ist. Die Autoren dieser Werke verwechseln mit anderen Worten formale mit eigentlichen Begriffen, d.h. verstehen "the cardinal problem of philosophy" nicht. So schreiben Janik und Toulmin beispielsweise: "[...] it is necessary to demonstrate, in addition, that the relations actually holding between language and the world make a such formalization possible. As Wittgenstein very soon saw, his own fundamental principles were such that this could not be demonstrated. The possiblity of relating propositions to facts was something which might *show itself*, and which might therefore be *seen*; yet there could be no question of asserting or of "proving" it"(Janik und Toulmin, 1996, S. 188–9).

[2]Obwohl laut Wittgenstein unsinnig stellt diese Frage in der Sekundärliteratur eine der zentralsten Themen dar. Stern (1995, S. 60–65) enthält eine Übersicht der sehr unterschiedlichen Positionen.

> Die *Anwendung* der Logik entscheidet darüber, welche Elementarsätze es gibt.
> Wenn ich die Elementarsätze nicht a priori angeben kann, dann muß es zu offenbarem Unsinn führen, sie angeben zu wollen"(*TLP* 5.555–5.5571).

Der Grund für die Unsinnigkeit der Frage ist laut Wittgenstein, daß diese Formen beliebig sind, d.h. es nicht eine Frage der Logik sondern eine Frage der Anwendung der Logik, welche Elementarsätze es gibt. Vor dem Hintergrund der Schriften von Hertz ist die Beliebigkeit wie folgt einzusehen: Die Form der Elementarsätze ist Teil des Netzes. Der Begriff der Anwendung der Logik ist anhand des Begriffs der Kennzeichnung zu verstehen: In der Logik hat man es nicht mit einer bestimmten Kennzeichnung (d.h. einer bestimmten Anwendung der Logik, einem bestimmten Netz), sondern mit der Möglichkeit des Kennzeichnens zu tun. Welche Anwendungen möglich sind kann nicht a priori angegeben werden, weshalb die Frage nach der Form der Elementarsätze keine Frage der Logik ist. Wittgenstein drückt dies so aus: "Das ist klar: Die Logik darf mit der Anwendung nicht kollidieren"(*TLP* 5.557).

So ist die Hertzsche Mechanik ein Versuch, keinen Begriff der Kraft *anzuwenden*. Die Elimination des Kraftbegriffes soll verdeutlichen, daß nicht nach dem Wesen der Kraft gefragt werden kann, weil der Kraftbegriff eine Form kennzeichnet, die selbst keine Erfahrungssache ist sondern Bedingungen setzt, die erst Erfahrungen ermöglicht. Statt dem *formalen* Begriff der Kraft wendet Hertz den formalen Begriff 'unsichtbare Masse' an. Entsprechendes gilt laut Wittgenstein für die Begriffe 'Gegenstand', 'Funktion', 'Zahl', etc.: Sie kennzeichnen Formen, d.h. sie sind Teil des Netzes unserer Sprache.

12.5 Die fundamentale Verwechslung

Der fundamentale Irrtum von Frege und Russell ist laut Wittgenstein die Verwechslung der formalen Begriffe mit eigentlichen. Diese Verwechslung bedeutet aus der Sicht Wittgensteins, daß man sich außerhalb der Logik seiner Sprache stellt, d.h. außerhalb des logischen Raumes und folglich außerhalb der Welt. Denn außerhalb des logischen Raumes seiner Sprache kann man nichts *sagen* sondern nur Unsinn reden: "*Die Grenzen meiner Sprache* bedeuten die Grenzen meiner Welt"(*TLP* 5.6). Wittgenstein gibt in Paragraph 4.1272 Beispiele unsinniger Sätze Freges und Russells:

> "Wo immer das Wort »Gegenstand« (»Ding«, »Sache«, etc.) richtig gebraucht wird, wird es in der Begriffschrift durch den varia-

> blen Namen ausgedrückt [...]
> Wo immer es anders, also als eigentliches Begriffswort gebraucht wird, entstehen unsinnige Scheinsätze.
> So kann man z.B. nicht sagen »Es gibt Gegenstände«, wie man etwa sagt »Es gibt 100 Bücher«. Und ebenso wenig »Es gibt 100 Gegenstände«, oder »Es gibt x Gegenstände«.
> Und es ist unsinnig, von der *Anzahl aller Gegenstände* zu sprechen [...]
> Ausdrücke wie »1 ist eine Zahl«, »es gibt nur Eine Null« und ähnliche sind unsinnig"(*TLP* 4.1272).

Ein Vergleich mit dem formalen Begriff 'Liter' ist hilfreich: Man kann 'Es gibt Gegenstände' ebenso wenig sagen wie 'Es gibt Liter'. Stattdessen sagt man beispielsweise 'Es gibt 100 Bücher' oder 'Es gibt 100 Liter Wasser'. Und es ist genauso unsinnig von der 'Anzahl aller Gegenstände' zu sprechen wie von der 'Anzahl aller Liter'. '1 ist eine Zahl' ist Unsinn, weil Zahlen sinnvoll nur in Sätzen wie 'Es gibt 100 Bücher' ('Z^{100}'Bx') vorkommen, d.h. mit Zahlen wird insbesondere gezählt und allgemein *gezeigt* bzw. gekennzeichnet, wie oft eine Operation auf eine Basis angewandt wurde. So kann man 'Die Zahl der Jupitersmonde ist 4' sagen; nicht '4 ist eine Zahl'. Der *Grundgedanke* Wittgensteins läßt sich vor dem Hintergrund des Begriffs des logischen Raumes wie folgt verstehen: Logische Konnektive sind keine Namen, d.h. vertreten keine logischen Gegenstände sondern kennzeichnen Struktur: Die Zusammensetzung der Elementarsätze zu *komplexen* Sätzen bzw. Wahrheitsfunktionen.

12.6 Die Leiter

Wenden wir uns der Tautologie und Kontradiktion zu. Diese vergleicht Wittgenstein mit dem (eigentlichen) Satz: "Der Satz zeigt, was er sagt, die Tautologie und die Kontradiktion, daß sie nichts sagen"(*TLP* 4.461). Der (eigentliche) Satz ist sinnvoll; Tautologie und Kontradiktion sinnlos. Daß der "Satz zeigt, was er sagt" wurde in Abschnitt 12.2 erklärt: Die Logik ist nicht extern bestimmt sondern muß für sich selber sorgen. Entsprechendes gilt für Tautologie und Kontradiktion: Sie *zeigen* selbst, daß sie nichts sagen bzw. sinnlos sind. Es ist keine externe sondern eine interne bzw. formale Eigenschaft der Tautologie, daß sie nichts sagt: "Immer kann man die Logik so auffassen, daß jeder Satz sein eigener Beweis ist"(*TLP* 6.1265). Deshalb ist die Nullmethode, d.h. die Art zu zeigen, daß Sätze der Logik Tautologien sind, der Logik durchaus unwesentlich (*TLP* 6.126). Denn "die Sätze, von welchen der Beweis ausgeht, ja ohne Beweis zeigen müssen, daß sie Tautologien sind"(*TLP*

6.126). Der eigentliche Satz zeigt, wie es sich verhält, wenn er wahr ist und sagt, daß es sich so verhält. Die Tautologie zeigt, daß sie bedingungslos wahr ist. Folglich ist es im Gegensatz zur Tautologie keine formale Eigenschaft des Satzes, wahr zu sein: Weil der Satz etwas *sagt*, muß er mit der Wirklichkeit auf seine Richtigkeit hin verglichen werden, d.h. er ist im Gegensatz zur Tautologie nicht wesentlich sondern nur zufällig wahr. Wittgenstein drückt den Unterschied folgendermaßen aus: "Der sinnvolle Satz sagt etwas aus, und sein Beweis zeigt, daß es so ist; in der Logik ist jeder Satz die Form eines Beweises"(*TLP* 6.1264).

Wenden wir uns den Gleichungen der Mathematik zu: "Das Wesentliche an der Gleichung ist aber, daß sie nicht notwendig ist, um zu zeigen, daß die beiden Ausdrücke, die das Gleichheitszeichen verbindet, dieselbe Bedeutung haben, da sich dies aus den beiden Ausdrücken selbst ersehen läßt"(*TLP* 6.232), d.h. unabhängig von dem Sosein der Welt. So ist es beispielsweise eine *formale* Eigenschaft von '$1+1+1+1$', daß man es als '$(1+1)+(1+1)$' auffassen kann (*TLP* 6.231), d.h. man kann '$1+1+1+1 = (1+1)+(1+1)$' nicht behaupten bzw. *sagen* (*TLP* 6.2322). Stattdessen läßt es sich durch die mathematische Methode *zeigen*: "Das Wesentliche der mathematischen Methode ist es, mit Gleichungen zu arbeiten. Auf dieser Methode beruht es nämlich, daß jeder Satz der Mathematik sich von selbst verstehen muß"(*TLP* 6.2341). Ein Ausdruck der Mathematik wie '$1+1+1+1$' versteht sich durch die Substitutionsmehode bzw. dem Vorgang des Rechnens von selbst, d.h. aus '$1+1+1+1$' selbst ist zu ersehen, daß er als '$(1+1)+(1+1)$' aufgefaßt werden kann, weshalb '$1+1+1+1 = (1+1)+(1+1)$' sich von selbst versteht. Folglich haben Gleichungen der Mathematik und Sätze der Logik etwas gemein: Ihre Wahrheit ist nicht zufällig sondern wesentlich. Fassen wir zusammen:

1. Die Logik muß für sich selber sorgen.

2. Der Satz der Logik muß sich von selbst verstehen.

3. Der Satz der Mathematik muß sich von selbst verstehen.

Daß die Logik für sich selber sorgt, *zeigt* die allgemeine Satzform '$[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$'. Daß der Satz der Logik sich von selbst versteht, *zeigt* seine Form. Zum leichteren Erkennen der Tautologie, wo sie kompliziert ist, können wir die Nullmethode anwenden. Daß der Satz der Mathematik sich von selbst versteht, *zeigt* die mathematische Methode. Anders ausgedrückt: Die Frage nach einer Sprachtheorie, nach Schlußgesetzen und den Grundlagen der Mathematik sind laut Wittgenstein unsinnig. Insbesondere sind Freges *Grundlagen der Arithmetik* und *Grundgesetze der Arithmetik* bzw. Russells *Principles of*

Mathematics und *Principia Mathematica* laut Wittgenstein unsinnig, denn sie stellen Fragen, wo nicht gefragt werden kann oder antworten auf Fragen, die nicht gestellt werden können. Anders ausgedrückt: Die Begriffe 'Satz', 'Tautologie' und 'Gleichung' sind formale Begriffe.

Allgemein ist die Philosophie unsinnig, denn der philosophische Standpunkt *ist* der Standpunkt außerhalb der Welt, d.h außerhalb des logischen Raumes: Die Philosophie fragt nach dem Wesentlichen. Folglich ist die philosophische Frage eine *Scheinfrage*, denn sie *kann* nicht sinnvoll beantwortet werden: Ein *sinnvoller* Satz stellt einen Sachverhalt im logischen Raum dar, der entweder wahr oder falsch ist, d.h. nicht wesentlich wahr ist sondern nur *zufällig* wahr wäre. Wittgenstein drückt seine Auffassung wie folgt aus:

> "Der Sinn der Welt muß außerhalb ihrer liegen. In der Welt ist alles wie es ist und geschieht alles wie es geschieht; es gibt *in* ihr keinen Wert – und wenn es ihn gäbe, so hätte es keinen Wert.
> Wenn es einen Wert gibt, der Wert hat, so muß er außerhalb alles Geschehens und So-Seins liegen. Denn alles Geschehen und So-Sein ist zufällig"(*TLP* 6.41).

> "Die zeitliche Unsterblichkeit der Seele des Menschen, das heißt also ihr ewiges Fortleben nach dem Tode, ist nicht nur auf keine Weise verbürgt, sondern vor allem leistet diese Annahme gar nicht das, was man immer mit ihr erreichen wollte. Wird denn dadurch ein Rätsel gelöst, daß ich ewig fortlebe? Ist denn dieses ewige Leben dann nicht ebenso rätselhaft wie das gegenwärtige? Die Lösung des Rätsels des Lebens in Raum und Zeit liegt *außerhalb* von Raum und Zeit"(*TLP* 6.4312).

Bezüglich der Begriffe Raum und Zeit ist zu bemerken, daß Wittgenstein in Paragraph 6.3611 erläutert, daß man Bedingungen setzen muß, um Ereignisse bzw. Zeiträume darstellen bzw. messen zu können. Anders ausgedrückt: Wittgenstein macht darauf aufmerksam, daß Raum und Zeit formale Begriffe sind.[3] Es geht aus den beiden Zitaten hervor, daß insbesondere die Frage nach dem Sinn der Welt bzw. die Frage nach der zeitlichen Unsterblichkeit der Seele und allgemein jede philosophische Frage unsinnig ist. Denn die Lösung solch einer Frage liegt außerhalb der Welt bzw. außerhalb des logischen Raumes. Solch eine Frage kann folglich nicht sinnvoll beantwortet werden, weshalb die Frage erst gar keinen Sinn hat:

[3] Außerdem wird Hertz im Paragraphen vor 6.3611 explizit erwähnt: "In der Ausdrucksweise Hertz's könnte man sagen: Nur *gesetzmäßige* Zusammenhänge sind *denkbar*"(*TLP* 6.361).

> "Zu einer Antwort, die man nicht aussprechen kann, kann man auch die Frage nicht aussprechen.
> *Das Rätsel* gibt es nicht.
> Wenn sich eine Frage überhaupt stellen läßt, so *kann* sie auch beantwortet werden.
> Skeptizismus ist *nicht* unwiderleglich, sondern offenbar unsinnig, wenn er bezweifeln will, wo nicht gefragt werden kann.
> Denn Zweifel kann nur bestehen, wo eine Frage besteht; eine Frage nur, wo eine Antwort besteht, und diese nur, wo etwas *gesagt* werden *kann*"(*TLP* 6.5–6.51).

Nicht philosophische Fragen sondern nur naturwissenschaftliche Fragen haben einen Sinn bzw. können beantwortet werden (*TLP* 6.51). Sehen wir dies ein, so sind wir laut Wittgenstein eine Leiter hinaufgestiegen, wobei folgende Stufen zu erkennen sind:[4] 1. Die Logik muß für sich selber sorgen. 2. Der logische Satz muß sich von selbst verstehen. 3. Der mathematische Satz muß sich von selbst verstehen. 4. Der philosophische Satz ist unsinnig. Sind wir die Leiter hinaufgestiegen, so müssen wir laut Wittgenstein nur noch eines tun, um am Ziel angelangt zu sein: Die Leiter wegwerfen. Was das Ziel ist, und warum man aus der Sicht des *Tractatus* die Leiter wegwerfen muß, wird im nächsten Abschnitt geklärt.

12.7 Das Wegwerfen

Werden Logik, Mathematik und Philosophie miteinander verglichen, so offenbart sich folgende Verbindung: Wir haben es jeweils nicht mit der zufälligen, sondern der wesentlichen Allgemeinheit zu tun. Was dies für die Sätze der Logik und Mathematik bedeutet wurde schon geklärt: Sie beschreiben nichts eigentliches (externes) und müssen sich folglich von selbst verstehen. So *zeigt* beispielsweise der Satz der Logik, daß er eine Tautologie ist. Zum leichteren Erkennen der Tautologie, wo sie kompliziert ist, läßt sich die Nullmethode anwenden. Die Leiter wegwerfen heißt, entsprechendes für die Sätze der Philosophie einzusehen. Wie im Falle des logischen Satzes so ist am philosophischen Satz etwas wesentlich: Er *zeigt* selbst, daß er unsinnig ist. Ergo kann man von einem Satz der Philosophie nicht behaupten bzw. *sagen*, daß er Unsinn ist. Denn letzteres ist ebenso unsinnig wie der philosophische Satz selbst. Kurz: Von Unsinn zu *sagen*, daß es Unsinn ist, ist unsinnig. Anders ausgedrückt: Die Philosophie muß für sich selber sorgen. Aber dies

[4] Die Sekundärliteratur interpretiert die Leiter anders: Sie erwähnt sozusagen nur die Stufen 1 und 4.

tut sie eben dadurch, daß sie durch unsinnige Sätze von sich selbst *zeigt*, daß sie unsinnig ist. Dies ist der einzig gangbare Weg, um ein für alle mal die Unsinnigkeit *aller* philosophischen Sätze einzusehen. Es ist der Weg des *Tractatus*:

> "Meine Sätze erläutern dadurch, daß sie der, welcher mich versteht, am Ende als unsinnig erkennt, wenn er durch sie – auf ihnen – über sie hinausgestiegen ist. (Er muß sozusagen die Leiter wegwerfen, nachdem er auf ihr hinaufgestiegen ist.)
> Er muß diese Sätze überwinden, dann sieht er die Welt richtig"(*TLP* 6.54).

Dieses Zitat läßt sich vor dem Hintergrund dieser Arbeit wie folgt verstehen: Der Satz 'Die Logik muß für sich selber sorgen' ist unsinnig, denn die allgemeine Satzform '$[\bar{p}, \xi, N(\bar{\xi})]$' *zeigt*, daß es unsinnig ist zu *sagen*, daß die Logik nicht für sich selber sorgt. Folglich ist es jedoch ebenso unsinnig zu *sagen*, daß die Logik für sich selber sorgt. Dies ist jedoch ein Satz des *Tractatus*. Zweitens *zeigt* die Tautologie selbst, daß sie eine Tautologie ist, weshalb es unsinnig ist zu *sagen*, daß sie keine Tautologie ist. Folglich ist es jedoch ebenso unsinnig zu *sagen*, daß die Tautologie tautologisch ist, welches wiederum ein Satz des *Tractatus* ist. Drittens *zeigt* der mathematische Satz, daß er sich von selbst verstehen muß, weshalb es unsinnig ist zu *sagen*, daß er sich nicht von selbst versteht. Folglich ist es jedoch ebenso unsinnig zu *sagen*, daß er sich von selbst versteht, welches wiederum ein Satz des *Tractatus* ist. Viertens kann man von einem Satz der Philosophie nicht *sagen*, daß er unsinnig ist, denn dies *zeigt* der philosophische Satz selbst. Daß der philosophische Satz unsinnig ist, ist jedoch ein Satz des *Tractatus*. Sehen wir dies ein, so haben wir aus der Sicht dieser Arbeit Wittgenstein verstanden: "Meine Sätze erläutern dadurch, daß sie der, welcher mich versteht, am Ende als unsinnig erkennt."

Es fehlt uns noch zu verstehen, wie die Sätze des *Tractatus* laut Wittgenstein zu überwinden. Zu diesem Zweck ist es angebracht, sich an folgende Worte Wittgensteins zu erinnern: "In der Philosophie führt die Frage »wozu gebrauchen wir eigentlich jenes Wort, jenen Satz« immer wieder zu wertvollen Einsichten"(*TLP* 6.211). Die Sätze des *Tractatus* überwinden heißt mit anderen Worten einsehen, daß wir sie im Leben zu nichts gebrauchen, d.h. sie erfüllen im Leben überhaupt keinen *Zweck*. Folgender Unsinn dient zur *Erläuterung*: Sätze der Philosophie und insbesondere des *Tractatus* können (und letztere wollen recht verstanden erst gar) nicht die Logik von außen irgendwie bestimmen, denn die allgemeine Satzform *zeigt*, daß die Logik für sich selber sorgen muß, d.h. hat ein Satz keinen Sinn, "so kann das nur daran liegen, daß wir einigen seiner Bestandteile keine *Bedeutung* gegeben haben"(*TLP* 5.4733). Den sinnvollen Satz beweisen, d.h. seine (zufällige) Wahrheit erkennen, ist Sache der Naturwissenschaft. Die Tautologie *zeigt* selbst, daß sie eine Tautologie ist. Zum leichteren erkennen, wo sie kompliziert ist, können wir mechanische Hilfsmittel wie die Nullmethode anwenden. Der Satz der Mathematik *zeigt* durch die mathematische Methode, dem Vorgang des Rechnens, seine Richtigkeit von selbst.

Bis hierher sind wir ohne die unsinnigen Sätze des *Tractatus* ausgekommen. Fehlt uns noch der Satz der Philosophie im allgemeinen (und des *Tractatus* im besonderen). Solch ein Satz *zeigt* wie gesagt seine eigene Unsinnigkeit. In diesem Zusammenhang ist die Frage jedoch, ob es eine Methode gibt, die es uns erlaubt, seine Unsinnigkeit ohne Gebrauch der *Tractatus*-Sätze einzusehen? Diese Frage ist mit ja zu beantworten. Es ist die Methode der Philosophie – die Sprachkritik (*TLP* 4.0031):

> "Die richtige Methode der Philosophie wäre eigentlich die: Nichts zu sagen, als was sich sagen läßt, also Sätze der Naturwissenschafft – also etwas, was mit Philosophie nichts zu tun hat –,und dann immer, wenn ein anderer etwas Metaphysisches sagen wollte, ihm nachzuweisen, daß er gewissen Zeichen in seinen Sätzen keine Bedeutung gegeben hat. Diese Methode wäre für den anderen unbefriedigend – er hätte nicht das Gefühl, daß wir ihn Philosophie lehrten – aber *sie* wäre die einzig streng richtige"(*TLP* 6.53).

Diese Methode ist aus der Sicht Wittgensteins eigentlich die einzig richtige, denn wenden wir diese Methode an, so werden wir nie etwas *sagen*, was sich nicht *sagen* sondern nur *zeigen* läßt, d.h. wir werden niemals Unsinn reden bzw. uns niemals außerhalb unserer eigenen Sprache stellen. Wir werden dem anderen nur nachweisen bzw. *zeigen*, "daß er gewissen Zeichen in seinen Sätzen keine Bedeutung gegeben hat." Wir werden also im Gegensatz zum *Tractatus* aufhören zu *sagen*, daß seine Sätze unsinnig sind. Denn dies kann man wie *gezeigt* nicht *sagen*. Entscheidend an der Sache ist, daß es auch gar nicht nötig ist, es zu *sagen*. Denn es wird sich von selbst verstehen, falls der Nachweis der Bedeutungslosigkeit eines der Zeichen des metaphysischen Satzes erbracht ist. Hiermit sind die Sätze des *Tractatus* überwunden, denn es wurde eben eingesehen, daß die unsinnigen Sätze des *Tractatus* eigentlich keinen Zweck erfüllen, d.h. wir sind laut Wittgenstein am Ziel angelangt: Wir sehen die Welt richtig. Die *Rätsel* der Philosophie sind nicht gelöst sondern aufgelöst. Erinnern wir uns in diesem Zusammenhang wie Hertz die Auflösung der unsinnigen Scheinfrage nach dem Wesen der Kraft zum Ausdruck bringt:

> “Auf die Zeichen “Kraft” und “Elektrizität” aber hat man mehr Beziehungen gehäuft, als sich völlig mit einander vertragen; dies fühlen wird dunkel, verlangen nach Aufklärung und äußern unsern unklaren Wunsch in der unklaren Frage nach dem Wesen von Kraft und Elektrizität. Aber offenbar irrt die Frage in Bezug auf die Antwort, welche sie erwartet. Nicht durch die Erkenntnis von neuen und mehreren Beziehungen und Verknüpfungen kann sie befriedigt werden, sondern durch die Entfernung der Widersprüche unter den vorhandenen, vielleicht also durch Verminderung der vorhandenen Beziehungen. Sind diese schmerzenden Widersprüche entfernt, so ist zwar nicht die Frage nach dem Wesen beantwortet, aber der nicht mehr gequälte Geist hört auf, die für ihn unberechtigte Frage zu stellen”(Hertz, 1910, S. 9).

Der nicht mehr geqäulte Geist hört auf, unberechtigte bzw. unsinnige Fragen zu stellen. Die Qualen, welche die eigene Sprache dem Geiste bereiteten, finden aus der Sicht Wittgensteins endgültig ihr Ende. Denn der Geist sieht ein, wie das Aufkommen zukünftiger Qualen zu umgehen ist. Diese Einsicht bringt Wittgenstein im letzten Paragraphen des *Tractatus* zum Ausdruck. Der Paragraph faßt laut Wittgenstein das ganze Werk bzw. seine ganze Philosophie in einem Satz zusammen. Die Bemühung dieser Arbeit war es letztlich, diesen Satz des *Tractatus* hauptsächlich vor dem Hintergrund der Schriften von Hertz und Boltzmann und teilweise der Ansichten von Frege und Russell zu *verstehen*. Das Ziel der Arbeit war zu keinem Zeitpunkt *kritisch* sondern rein *exegetisch*: Die Arbeit wollte nicht mehr aber auch nicht weniger als eine Interpretation bzw. ein Verständnis des *Tractatus* als Ganzheit vor dem Hintergrund der beiden Physiker leisten. Der angesprochene Satz bzw. die angesprochene Einsicht muß sich ab hier von selbst verstehen:

> “Wovon man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen” (*TLP* 7).

Kapitel 13

Übersicht

Folgendes ist als *übersichtliche Darstellung* im Hertzschen Sinne dieser Arbeit gedacht. Zu diesem Zwecke erinnern wir uns an die These dieser Arbeit: Philosophie und Mathematik im *Tractatus* sind letztendlich vor dem Hintergrund von Hertz und Boltzmann zu verstehen. Was diese These ausdrücken soll kam vor allem im vorigen Kapitel zum Ausdruck. Fassen wir kurz zusammen:

Es wurde dargestellt, wie Hertz, von dem Verständnis physikalischer Theorien als Modell bzw. Bild ausgehend, erläutert, weshalb die Frage nach dem Wesen der Kraft eine unberechtige Frage bzw. eine Scheinfrage darstellt: Er macht in der Ausdrucksweise Wittgensteins darauf aufmerksam, daß der Kraftbegriff ein formaler Begriff ist, dem in der Welt nichts entspricht, sondern der Bedingungen setzt, die erst Erfahrungen einer bestimmten Form ermöglichen. In diesem Zusammenhang vergleicht Hertz drei unterschiedliche Modelle mechanischer Phänomene anhand der Forderungen der logischen Zulässigkeit, Richtigkeit und Zweckmäßigkeit. Boltzmann folgt in seinen Schriften weitgehend Hertz bezüglich der Auffassung physikalischer Theorien als Bilder der Wirklichkeit. Vor dem Hintergrund der Darwinschen Entwicklungslehre erklärt er jedoch im Gegensatz zu Hertz, daß der Forderung der Richtigkeit ein höherer Stellenwert einzuräumen ist als der Forderung der logischen Zulässigkeit. Darüber hinaus erweitert Boltzmann die Bild-Konzeption der Physik in eine Art Prolegomena einer künftigen Sprachphilosophie. In diesem Zusammenhang charakterisiert er alle philosophische Fragen als unsinnig: Sie sind Ausdruck des über das Ziel Hinausschießen unserer Denkgewohnheiten.

Vor diesem Hintergrund verstanden wir letztlich Wittgensteins allgemeine Auffassung der philosophischen Frage als Scheinfrage und insbesondere seine Kritik an der realistischen Auffassung der Logik und Mathematik von Frege und Russell, d.h. seine Kritik an deren Versuchen einer logischen Grundlegung der Mathematik:

Wittgensteins faßte in unmittelbarer Weiterentwicklung der rudimentären Sprachphilosophie Boltzmanns Sätze als Bilder bzw. Modelle der Wirklichkeit auf. Er folgte jedoch nicht Boltzmann sondern Hertz bezüglich des Stellenwertes von Richtigkeit und *logischer* Zulässigkeit: Ein Satz muß ein *logisches* Bild bzw. logisch artikuliert sein, um überhaupt die Wirklichkeit *richtig* oder falsch abbilden zu können. In Übereinstimmung mit dieser Auffassung faßte Wittgenstein das Aufkommen philosophischer Fragen nicht wie Boltzmann als Ausdruck des über das Ziel Hinausschießen unserer Denkgewohnheiten auf sondern als Ausdruck des Mißverständnissen der *Logik* unserer Sprache. Diese Mißverständnisse sind durch einen zweckmäßigen Symbolismus bzw. eine zweckmäßige Zeichensprache zu entgehen, die der logischen Grammatik unserer Sprache folgt. Es ging aus der Arbeit hervor, in welcher Art und Weise der *Tractatus* sich als Symbolismus versteht, der Unzweckmäßigkeiten der Begriffschriften von Frege und Russell entfernt. So wurden beispielsweise Schlußgesetze und logische Gegenstände im Sinne Freges und Russells von Wittgenstein als überflüssig aufgefaßt bzw. wegreduziert. Die Unzweckmäßigkeiten bzw. Unzulänglichkeiten, welche die Begriffschriften von Frege und Russell aus der Sicht Wittgensteins enthalten, werden von Wittgenstein als Ausdruck fundamentaler Verwechslungen charakterisiert. Seine Kritik solcher Verwechslungen erklärt Wittgenstein zu seinem *Grundgedanken*: die Logik der Tatsachen läßt sich nicht vertreten. Insbesondere vertreten logische Konnektive keine logischen Gegenstände. Die Auffassung, daß die Logik sich vertreten läßt, ist die realistische Auffassung Freges und Russells. Die Auffassung Wittgensteins ist es, daß Frege und Russell in ihren Versuchen der logischen Grundlegung der Mathematik formale Begriffe mit eigentlichen verwechseln. Begriffe wie 'Gegenstand', 'Funktion', 'Zahl' etc. kennzeichnen wie der Kraftbegriff laut Wittgenstein a priori Formen, die erst eigentliche Erfahrungen einer gewissen Struktur ermöglichen. Sie gehören zum Netz bzw. Bild unserer Sprache. Beispielsweise *zeigt* der eigentliche Begriff 'weiß' die Form einer Funktion ('x ist weiß' bzw. 'Wx'), was uns ermöglicht, etwas bestimmtes zu *sagen* (z.B. 'Der Stuhl ist weiß'). Wittgensteins Distinktion zwischen *Sagen* und *Zeigen* erweist sich in diesem Sinne als Einfluß von Hertz und Boltzmann. Vor diesem Hintergrund soll laut Wittgenstein letztendlich eingesehen werden, daß die Paragraphen des *Tractatus* nicht ausgedacht sind, um etwas zu *sagen*, sondern um etwas zu *zeigen*: Sie sind Erläuterungen, die zum Zweck haben, die Unsinnigkeit philosophischer Fragestellungen zu offenbaren. Die Leiter wegwerfen heißt einsehen, daß sich weder philosophische Sätze noch Erläuterungen im zweckmäßigen Symbolismus hinschreiben lassen.

Literaturverzeichnis

Anscombe, G. E. M.: 1959, *An Introduction to Wittgenstein's Tractatus*, Hutchinson & Co., London.

Ayer, A.: 1985, *Wittgenstein*, Weidenfeld & Nicolson, London.

Baird, D., Hughes, R. und Nordmann, A. (Hrsg.): 1998, *Heinrich Hertz: Classical Physicist, Modern Philosopher*, Kluwer, London.

Baker, G.: 1988, *Wittgenstein, Frege and the Vienna Circle*, Blackwell, Oxford.

Barker, P.: 1980, Hertz and Wittgenstein, *Studies in the History and Philosophy of Science* **11**(3), 243–256.

Bernays, P.: 1959, Comments on Ludwig Wittgenstein's *Remarks on the Foundations of Mathematics*, *Ratio* **2**, 1–22.

Black, M.: 1964, *A Companion to Wittgenstein's Tractatus*, Cambridge University Press, London.

Block, I. (Hrsg.): 1981, *Perspectives on the Philosophy of Wittgenstein*, Basil Blackwell, Oxford.

Boltzmann, L.: 1925, *Populäre Schriften*, Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig. Erstdruck 1905.

Brock, S.: 1986, Billedteorien i Wittgensteins Tractatus - sprog, model og virkelighed, *in* Brock und Hansen (1986), S. 198–224.

Brock, S. und Hansen, K. (Hrsg.): 1986, *Sprog, Moral & Livsform: Ludwig Wittgensteins filosofi*, Forlaget Philosophia, Århus.

Cassirer, E.: 1950, *The Problem of Knowledge: Philosophy, Science, and History, since Hegel*, Yale University Press, New Haven.

Conant, J.: 1989, Must we show what we cannot say?, *in* Fleming und Payne (1989), S. 242–283.

Conant, J.: 2000, Elucidations and nonsense in Frege and early Wittgenstein, *in* Crary und Read (2000), S. 174–217.

Crary, A. und Read, R. (Hrsg.): 2000, *The New Wittgenstein*, Routledge, London.

D'Agostino, S.: 1990, Boltzmann and Hertz on the *Bild*-conception of physical theory, *History of Science* **28**(82), 380–398.

Diamond, C.: 1991a, Frege and nonsense, *in* Diamond (1991c), S. 73–94. Erstdruck 1979.

Diamond, C.: 1991b, Realism and the realistic spirit, *in* Diamond (1991c), S. 39–72. Erstdruck 1986.

Diamond, C.: 1991c, *The Realistic Spirit: Wittgenstein, Philosophy, and the Mind*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Diamond, C.: 1991d, Throwing away the ladder: How to read the *Tractatus*, *in* Diamond (1991c), S. 179–204. Erstdruck 1988.

Diamond, C.: 1991e, What does a concept-script do?, *in* Diamond (1991c), S. 115–144. Erstdruck 1984.

Diamond, C.: 1991f, What nonsense might be, *in* Diamond (1991c), S. 95–114. Erstdruck 1981.

Diamond, C.: 1991g, Wright's Wittgenstein, *in* Diamond (1991c), S. 205–224. Erstdruck 1981.

Diamond, C.: 1996, Wittgeinstein, mathematics, and ethics: Resisting the attractions of realism, *in* Sluga und Stern (1996), S. 226–260.

Diamond, C.: 2000, Ethics, imagination and the method of Wittgenstein's *Tractatus*, *in* Crary und Read (2000), S. 149–173.

Dummett, M.: 1959, Wittgenstein's philosophy of mathematics, *Philosophical Review* **68**(3), 324–48.

Dummett, M.: 1978, Reckonings. Wittgenstein on mathematics, *Encounter* **50**, 63–8.

Fleming, R. und Payne, M. (Hrsg.): 1989, *The Senses of Stanley Cavell*, Associated University Press, Cranbery, N. J.

Fogelin, R.: 1976, *Wittgenstein*, Routledge, London.

Fogelin, R.: 1983, Wittgenstein on identity, *Synthese* **56**(2), 141–154.

Fogelin, R.: 1996, Wittgenstein's critique of philosophy, *in* Sluga und Stern (1996), S. 34–58.

Frascolla, P.: 1994, *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Routledge, London.

Frege, G.: 1879, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Verlag von Louis Nebert, Halle.

Frege, G.: 1962, *Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. 1 & 2, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt. Erstdruck Bd. 1, 1. Aufl. 1893 und Bd. 2, 1. Aufl. 1903.

Frege, G.: 1976, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner, Hamburg.

Frege, G.: 1995, *Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Reclam, Stuttgart. Erstdruck 1884.

Geach, P.: 1976, Saying and showing in Frege and Wittgenstein, *in* Hintikka (1976), S. 54–70.

Gerrard, S.: 1991, Wittgenstein's philosophies of mathematics, *Synthese* **87**(1), 125–142.

Grant, I. und Phillips, W.: 1995, *Electromagnetism*, 2. Ausg., John Wiley & Sons, Chisester.

Griffin, J.: 1964, *Wittgenstein's Logical Atomism*, Clarendon Press, Oxford.

Hacker, P.: 1996, *Wittgenstein's Place in Twentieth-century Analytic Philosophy*, Backwell Publishers, Oxford.

Hacker, P. M. S.: 1997, *Insight and Illusion: Themes in the Philosophy of Wittgenstein*, 1. Thoemmes Ausg., Thoemmes Press, Bristol, England. Erstausgabe 1976.

Harrison, B.: 1979, *An Introduction to the Philosophy of Language*, MacMillan, Hong Kong.

Hertz, H.: 1892, *Untersuchungen ueber die Ausbreitung der elektrischen Kraft*, Johann Ambrosius Barth, Leipzig.

Hertz, H.: 1910, *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*, Gesammelte Werke, Bd. 3, Johann Ambrosius Barth, Leipzig. Erstdruck 1894.

Hintikka, J. (Hrsg.): 1976, *Essays on Wittgenstein in Honour of G. H. von Wright*, Acta Philosophia Fennica 28, Amsterdam.

Hintikka, M. B. und Hintikka, J.: 1986, *Investigating Wittgenstein*, Basil Blackwell, Oxford.

Husted, J.: 2000, *Wittgenstein*, Centrum.

Ishiguro, H.: 1969, Use and reference of names, *in* Winch (1969), S. 20–50.

Ishiguro, H.: 1981, Wittgenstein and the theory of types, *in* Block (1981), S. 43–59.

Janik, A. und Toulmin, S.: 1996, *Wittgenstein's Vienna*, 1. Elephant Paperback Ausg., Ivan R. Dee, Chicago. Erstdruck 1973.

Kjærgaard, P.: k.J., Hertz and Wittgenstein's philosophy of science. Unveröffentlicht.

Knudsen, O. und Pedersen, O.: 1969, *Lærebog i Mekanik*, Bd. 3, Akademisk Forlag.

Kreisel, G.: 1958, Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics, *British Journal for the Philosophy of Science* (9), 135–58.

Kremer, M.: 1992, The multiplicity of general propositions, *Nous* **26**(4), 409–426.

Lützen, J.: 1995, *Denouncing Forces; Geometrizing Mechanics. Hertz's Principles of Mechanics*, Preprint Series, Nr. 22, Københavns Universitet, Matematisk Institut.

Mach, E.: 1921, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*, F.A. Brockhaus, Leipzig. Erstdruck 1883.

Malcolm, N.: 1986, *Nothing is Hidden: Wittgenstein's Criticism of His Early Thought*, Blackwell, Oxford.

Marion, M.: 1995, Wittgenstein and finitism, *Synthese* **105**(2), 141–176.

Marion, M.: 1998, *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Clarendon Press, New York.

McGuinn, M.: 1999, Between metaphysics and nonsense: Elucidation in Wittgenstein's *Tractatus*, *Philosophical Quarterly* **49**(197), 491–513.

McGuinness, B.: 1981, The so-called realism of Wittgenstein's Tractatus, *in* Block (1981).

McGuinness, B.: 1988, *Wittgenstein: A Life*, Duckworth, London.

Monk, R.: 1991, *Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius*, 1. Vintage Ausg., Vintage, London. Erstdruck 1990.

Mounce, H. O.: 1981, *Wittgenstein's Tractatus*, Basil Blackwell, Oxford.

Pears, D. F.: 1987, *The False Prison: A Study of the Development of Wittgenstein's Philosophy*, Clarendon Press, Oxford.

Potter, M.: 2000, *Reason's Nearest Kin: Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap*, Oxford University Press, Oxford.

Proops, I.: 2000, *Logic and Language in Wittgenstein's Tractatus*, Garland Publishing, New York.

Puhl, K. (Hrsg.): 1993, *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna.

Rhees, R.: 1969, 'ontology' and identity in the Tractatus, *in* Winch (1969), S. 51–65.

Ricketts, T.: 1996, Pictures, logic, and the limits of sense in Wittgenstein's *Tractatus*, *in* Sluga und Stern (1996), S. 59–99.

Russell, B.: 1905, On denoting, *Mind* **14**(56), 479–493.

Russell, B.: 1956, *The Principles of Mathematics*, 2. Ausg., George Allen & Unwin Ltd, London. Erstausgabe 1903, Erstdruck 2. Ausgabe 1937.

Russell, B.: 1973, *Essays in Analysis*, Allen & Unwin, London.

Russell, B.: 1983–, *Collected Papers*, Routledge, London.

Shanker, S. G.: 1987, *Wittgenstein and the Turning-point in the Philosophy of Mathematics*, State University of New York Press, Albany, N.Y.

Sheffer, H.: 1913, A set of five independent postulates for boolean algebras, with applications to logical constants, *Transactions of the American Mathematical Society* **14**, 481–8.

Sluga, H. und Stern, D. (Hrsg.): 1996, *The Cambridge Companion to Wittgenstein*, Cambridge University Press, Cambridge.

Soames, S.: 1983, Generality, truth functions, and expressive capacity in the Tractatus, *Philosophical Review* **92**(4).

Stenius, E.: 1981, The picture theory and Wittgenstein's later attitude to it, *in* Block (1981).

Stern, D.: 1995, *Wittgenstein on Mind and Language*, Oxford University Press, New York.

Stern, D.: 1996, The availibility of Wittgenstein's philosophy, *in* Sluga und Stern (1996), S. 442–476.

Tolstoi, L.: 1997, *The Gospel in Brief*, University of Nebraska Press.

Visser, H.: 1999, Boltzmann and Wittgenstein or *how pictures became linguistic*, *Synthese* **119**, 135–156.

Waismann, F.: 1970, *Einführung in das mathematische Denken: Die Begriffsbildung der modernen Mathematik*, Deutscher Taschenbuch Verlag, München.

Whitehead, A. und Russell, B.: 1910–3, *Principia Mathematica*, Bd. 1–3, 1. Ausg., Cambridge University Press.

Wilson, A.: 1989, Hertz, Boltzmann and Wittgenstein reconsidered, *Studies in the History and Philosophy of Science* **20**(2), 245–263.

Winch, P.: 1987, *Trying to Make Sense*, Basil Blackwell, Oxford.

Winch, P. (Hrsg.): 1969, *Studies in the Philosophy of Wittgenstein*, Routledge & Kegan Paul, London.

Wittgenstein, L.: 1929, Some remarks on logical form, *Proceedings of the Aristotelian Society*, Supplementary, Bd. 9, S. 162–71.

Wittgenstein, L.: 1961, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Routledge & Kegan Paul, London. With an Introduction by Bertrand Russell. Erstausgabe 1922.

Wittgenstein, L.: 1976, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, 1939*, Cornell University Press, Ithaca, N. Y. From the notes of R. G. Bosanquet, Norman Malcom, Rush Rhees, and Yorick Smythies.

Wittgenstein, L.: 1979, *Wittgenstein's Lectures. Cambridge, 1932–1935*, Rowman and Littlefield, Totowa, N.J. From the notes of Alice Ambrose and Margaret Macdonald, Edited and with a preface by Alice Ambrose.

Wittgenstein, L.: 1980, *Wittgenstein's Lectures. Cambridge, 1930–1932*, Rowman and Littlefield, Totowa, N.J. From the notes of John King and Desmond Lee, Edited and with an introduction by Desmond Lee.

Wittgenstein, L.: 1993, *Philosophische Grammatik*, Werkausgabe, Bd. 4, Suhrkamp, Frankfurt am Main. Erstausgabe 1969.

Wittgenstein, L.: 1994, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Werkausgabe, Bd. 6, Suhrkamp, Frankfurt am Main. Erstausgabe 1956.

Wittgenstein, L.: 1995, *Cambridge Letters*, Blackwell. Correspondence with Russell, Keynes, Moore, Ramsey and Sraffa.

Wittgenstein, L.: 1996a, *Philosophische Bemerkungen*, Werkausgabe, Bd. 2, Suhrkamp, Frankfurt am Main. Erstausgabe 1964.

Wittgenstein, L.: 1996b, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Suhrkamp, Frankfurt am Main. Erstausgabe 1921.

Wittgenstein, L.: 1996c, *Wittgenstein und der Wiener Kreis*, Werkausgabe, Bd. 3, Suhrkamp, Frankfurt am Main. Gespräche aufgezeichnet von Friedrich Waismann. Erstausgabe 1967.

Wittgenstein, L.: 1997a, *Philosophische Untersuchungen*, *in* Wittgenstein (1997c), S. 225–580. Erstausgabe 1953.

Wittgenstein, L.: 1997b, *Tagebücher 1914–1916*, *in* Wittgenstein (1997c), S. 87–223. Erstausgabe 1960.

Wittgenstein, L.: 1997c, *Tractatus Logico-Philosophicus* [u.a.], Werkausgabe, Bd. 1, Suhrkamp, Frankfurt am Main.

Wittgenstein, L.: 1997d, *Über Gewißheit*, Werkausgabe, Bd. 8, Suhrkamp, Frankfurt am Main. Erstausgabe 1969.

Wright, C.: 1980, *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Wrigley, M.: 1977, Wittgenstein's philosophy of mathematics, *Philos. Quart.* **27**(106), 50–59.