



History of Science Department *University of Aarhus*

MICHAEL THOMSEN

Aspekter af den ikke-euklidiske geometris historie
Inspirationsmateriale til matematikinteresserede
gymnasieelever

Hosta, No. 18, 2004
Work-in-Progress

Hosta (**H**istory **O**f Science and **T**echnology, **A**arhus) is a series of publications initiated in 2000 at the History of Science Department at the University of Aarhus in order to provide opportunity for historians of science and technology outside the Department to get a glimpse of some of the ongoing or recent works at the Department by researchers and advanced students. As most issues contain work in progress, comments to the authors are greatly valued.

Publication is only made electronically on the web site of the Department (www.ivh.au.dk/hosta). The issues can freely be printed as pdf-documents. The web site also contains a full list of issues.

ISSN: 1600-7433

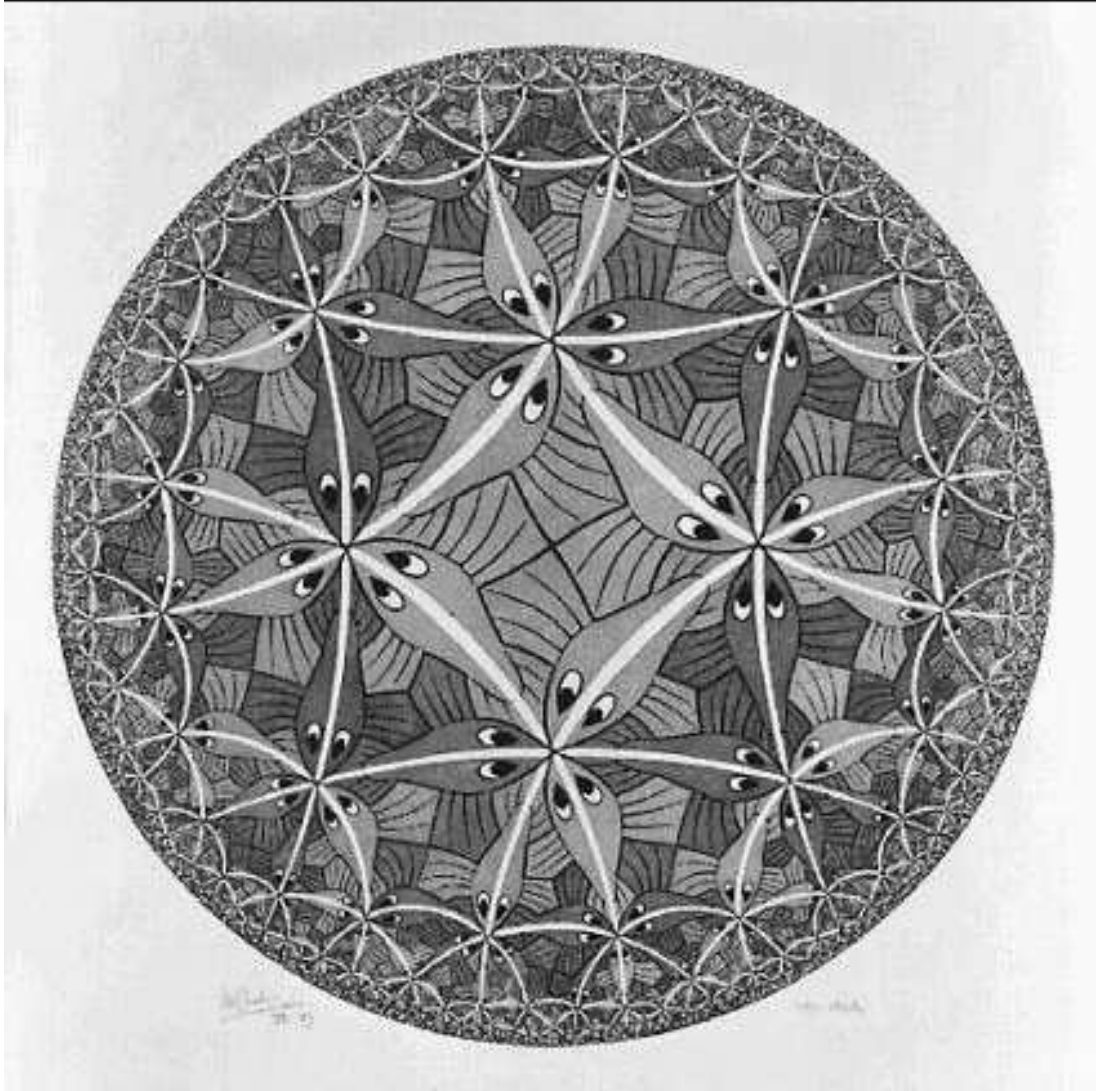


History of Science Department
University of Aarhus
Ny Munkegade, building 521
DK-8000 Aarhus C
Denmark

Aspekter af den ikke-euklidiske geometris historie

inspirationsmateriale til matematikinteresserede gymnasieelever

af Michael Thomsen



Aarhus Universitet

Forord

Jeg har valgt at skrive et speciale, som hovedsageligt består af noget materiale, som henvender sig til læsere på gymnasie-niveau. Det har jeg valgt, fordi jeg interesserer mig for undervisning, og fordi jeg selv agter at undervise i gymnasiet. Hele dette projekt har jeg set som en meget relevant forberedelse på denne opgave.

Jeg vil ikke ligge skjul på, at den lidenskab, jeg altid har haft for matematik, under mit studie flere gange har været ved at drukne i den moderne matematiks vanskelige tilgængelige form. Jeg kaster ikke skylden på andre end mig selv, men vil alligevel gerne takke mine vejledere Kirsti Andersen og Tage Bai Andersen for at have hjulpet mig med at genfinde denne lidenskab.

Jeg vil også gerne sige tak til de gymnasielærere og gymnasieelever, som på forskellige måder har været involveret i projektet.

Jeg skylder stor tak til Bjarne og Peter for, at de gennem hele processen har været klar til at diskutere og kommentere de ideer, jeg har haft med undervisningsmaterialet. Jeg vil også gerne takke Bjarne, Ditte og Lars for gennemlæsning og kommentering af specialet.

Skødstrup den 13. april 2004.

Michael Thomsen

(Enkelte små-fejl er rettet i forhold til den afleverede version)

Indhold

Forord	ii
Indledning	vi
I Aspekter af den ikke-euklidisk geometris historie	1
1 Introduktion	2
1.1 En ny verden	2
1.2 Geometri: En beskrivelse af det rum, vi lever i	2
1.3 Hvor skal vi starte?	3
1.4 Aksiomsystem	4
2 Euklid	6
2.1 Et mesterværk	7
2.2 Euklids Elementer, bog I	7
2.3 Rette linjer og linjestykker	9
2.4 Euklids første 28 sætninger	9
2.5 Seks sætninger	12
2.6 Kongruens	16
2.7 Parallelitet	16
2.8 Sætning 29 og frem	18
2.9 Euklids underforståede postulater	20
2.10 Hilbert	22
3 Problemer med Euklids geometri	24
3.1 Parallelpостulatet	24
3.2 Playfairs Aksiom.	25
3.3 Ækvivalenser til $P5$	26
4 Forsøg på at redde Euklid	28
4.1 En plet på geometrien	28
4.2 Al-Tusi	30

4.3	Wallis	38
4.4	Legendre	42
4.5	Proklos	47
5	Aksiomsystemet	49
6	En anden geometri	54
6.1	Sfærisk Geometri	56
6.2	To-kanter	57
6.3	Den sfæriske trekant	58
6.4	Den sfæriske geometri accepteres	61
6.5	Atlas	62
7	Ikke-euklidisk geometri	63
7.1	Lobatjevskij	63
7.2	Vinkeldefekt	64
7.3	To muligheder	66
7.4	L-Parallelitet	69
7.5	ikke-euklidisk idé	71
7.6	At tegne ikke-euklidisk geometri	73
7.7	Den første usædvanlige sætning	73
7.8	Asymptotiske trekanter	77
7.9	Afstand	78
7.10	Bolyai	80
7.11	Trigonometriske funktioner	81
8	Modeller	84
8.1	Poincarés skive-model	84
8.2	Vinkler i Poincarés model	87
8.3	Legendres bevis i Poincarés model	90
8.4	Konstruktion af hyperbolsk linje	91
8.5	Afstand	94
8.6	Konsistens	96
8.7	Euklid	96
8.8	Øvre halvplans-modellen	96
9	Arealet af ikke-euklidiske trekanter	101
9.1	Areal	101
9.2	Arealet af asymptotiske trekanter	102
9.3	Bolyai og Gauss	104
9.4	Arealfunktionen	105
9.5	Additive-funktioner	107
9.6	Arealfunktionen	109

9.7	Arealet af en vilkårlig trekant	109
10	Og hvor blev vores verden af?	111
10.1	Fra 2 dimensioner til 3 dimensioner	111
10.2	Prikkers-rum-filosofi	112
10.3	Historien om prikkerne	113
10.4	Hvilken geometri lever vi så i?	114
10.5	Einsteins relativitets teori	114
11	Appendix	116
11.1	Modstrids beviser	116
11.2	Brug af litteratur	118
II	Didaktiske overvejelser	119
12	Hensigter	120
13	Erfaring	127
14	Konklusion	131
15	Summary in English	134
	Litteratur	135

Indledning

Meningen med dette speciale har været at skabe noget materiale som kan inspirere gymnasieelever og andre matematikinteresserede på gymnasialt niveau, og at give læseren kendskab til et emne, som normalt ikke bliver prioriteret i gymnasiet. Mit eget kendskab til den ikke-euklidiske geometris historie ved projektets start var begrænset. Alligevel havde matematikken og den tilhørende historie fanget min interesse, og jeg var overbevist om at visse dele af historien og matematikken sagtens kunne fortælles til elever i gymnasiet. Jeg har under hele processen været meget bevidst om, at det, jeg har skrevet, skal kunne bruges i gymnasiet. Mit mål for kvaliteten har været at lave materiale, som jeg selv kunne tænke mig at bruge i en undervisningssammenhæng.

Indholdet

Specialet er overordnet delt op i to dele. Den første del består af 11 kapitler undervisningsmateriale. Den anden del er didaktiske overvejelser om undervisningsmaterialet.

Selve undervisningsmaterialet indeholder en gennemgang af udvalgte dele af den ikke-euklidiske geometri og dens historie. Som udgangspunkt har jeg valgt at give en introducerende gennemgang af *Euklids Elementer* bog I [5], hvilket sker i kapitel 2. Der er her lagt vægt på Euklids opbygning af aksiomsystemet med specielt fokus på brugen af det femte postulat og behandling af begrebet parallelitet. I kapitlerne 4 og 5 følger vi nogle senere behandlinger af det femte postulat. Mange personligheder har igennem historien behandlet problemet, og det har været nødvendigt at foretage en udvælgelse. Jeg har valgt at se på Al-Tusis, Wallis' og Legendres bidrag til historien. Kapitel 6 er en kort introduktion til sfærisk geometri. Der ligges vægt på at forklare, hvordan begreber, som allerede er kendt fra euklidisk geometri, kan indføres for geometrien på kuglens overflade. Til sidst udledes en formel for arealet af en sfærisk trekant, hvoraf det fremgår, at vinkelsummen for en sfærisk trekant altid vil være større end 180° . I kapitel 7 introduceres den ikke-euklidiske eller den hyperbolske geometri. En geometri, som kun adskiller sig fra euklidisk geometri ved at parallelpостulatet er erstattet med negationen parallelpостulatet. Udgangspunktet er her Lobatjevskijs geometri, som den er præsenteret i *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* [7]. Poincarés skive-model introduceres som en model af den ikke-euklidiske geometri i kapitel 8. Modellen udforskes, og flere af de ikke-euklidiske egenskaber genkendes i modellen. I kapitel 9 udledes en formel for arealet af en ikke-euklidisk trekant. Af

denne formel fremgår det, at ikke-euklidiske trekanter altid har en vinkelsum, som er mindre end 180° . Udregningerne fra kapitlet er en gennemgang af nogle udregninger, der oprindeligt blev udført af Gauss. Både i indledning og afslutning af materialet gøres der nogle overvejelser omkring, hvordan rummet skal forstås. I det afsluttende kapitel 10 diskuteres muligheden for, at det fysiske rum kan krumme.

Den didaktiske del er delt op i tre kapitler. I kapitel 12 beskrives de hensigter, jeg har haft med materialet, og hvilke oplevelser jeg ønsker at give læserne. Som ramme for disse overvejelser og for at kunne sætte nogle ord på matematisk indsigt har jeg valgt at tage udgangspunkt i rapporten *Kompetencer og matematiklæring* [18]. Specielt har jeg brugt opdelingen af matematiske kompetencer. Kapitel 13 er et studie af, hvordan dele af undervisningsmaterialet påvirkede en lille gruppe elever fra et 3.g matematikhold. Omdrejningspunktet i dette studie er en spørgeskemaundersøgelse som blev foretaget efter et foredrag på Århus Statsgymnasium den 29.9.2003.

Bemærkninger

Materialet er skrevet med henblik på, at det skal kunne læses som et selvstændigt undervisningsmateriale. Enkelte steder i materialet bliver der henvist til et bevis eller enkelte afsnit af andre bøger. Det drejer sig om *Euklids Elementer* oversat af Thyra Eibe [5] og *Ikke-euklidisk geometri* af Erik Kristensen [4]. Hvis man har lyst til at gå i dybden med emnet, vil det være en fordel at have disse to bøger til sin rådighed. Materialet forudsætter også, at læseren på forhånd har en smule kendskab til at lave konstruktioner med passer og lineal.

Det er vigtigt, at læseren er opmærksom på, at opgaverne er en integreret del af undervisningsmaterialet. De opgaver, som er af afgørende betydning senere i materialet, er markeret med en *, og det anbefales at disse regnes.

Enkelte steder har jeg fundet det nødvendigt at komme med en kommentar direkte til den lærer, der skal undervise efter materialet. Kommentarer til læreren er markeret med en grå kasse. Det er ikke meningen, at disse skal være en del af det endelige undervisningsmateriale:

Kommentar til læreren. Kommentarer til læreren vil være skrevet på en grå baggrund.

Alle definitioner og sætninger har fået et nummer, som henviser til deres placeringen i undervisningsmaterialet. Jeg har dog i flere tilfælde valgt også at tage det nummer med, som refererer til placeringen i de oprindelige værker. Placeringen i de oprindelige værker vil i så fald stå i en parentes. Det drejer sig her om placeringen af definitioner og sætninger hos Euklid og Lobatjevskij.

For at læseren ikke skal bruge alt tiden på at bladere, er der vedlagt en lamineret oversigt over de sætninger, som der henvist til. Det vil være en fordel for læseren at have denne liggende ved siden af sig under gennemlæsningen.

Litteraturhenvisninger

Jeg har kun nogle få steder fundet det hensigtsmæssigt at bruge kildehenvisninger i selve undervisningsmaterialet. Det er mit indtryk, at sådanne henvisninger vil virke forstyrrende for læseren. I afsnit 11.2 har jeg lavet en liste over, hvilke kilder jeg primært har brugt i hvert enkelt afsnit.

Billeder og figurer

Billeder og fotografier er hentet fra hjemmesiden, der pt. har adressen:

<http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/>

Forsiden er fra hjemmesiden:

<http://www.mcescher.com>.

Alle geometriske figurer har jeg selv lavet med programmet Metapost.

Del I

Aspekter af den ikke-euklidisk geometris historie

Kapitel 1

Introduktion

1.1 En ny verden

I et brev til sin far skriver den ung matematiker Janos Bolyai i 1823 begejstret om nogle opdagelser, han havde gjort inden for geometri:

Jeg kan ikke sige mere, kun så meget: *af ingenting har jeg skabt en anden helt ny verden*. Alt, hvad jeg indtil nu har sendt dig, er, sammenlignet med dette, kun et korthus i forhold til et slot. ¹([8] side xxviii)

Hvad var det for nogle opdagelser, der kunne gøre Janos Bolyai så begejstret? Hvad var det for en ny verden, Bolyai havde skabt? Og hvordan kan man ved hjælp af matematik lave en ny verden ud af ingenting?

I dette materiale vil vi udforske denne mere end 2000 år lange historie, der fører frem til de opdagelser, som Janos skriver om. En historie, der vil tage os igennem matematikkens udvikling fra oldtidens Grækenland, til den arabiske verden og til sidst til det moderne Europa. Håbet er, at give et indblik i hvordan matematiske begreber har ændret sig gennem historien, at give en dybere forståelse for geometri samt at give et indblik i denne *nye verden*, som er omtalt i det indledende citat.

1.2 Geometri: En beskrivelse af det rum, vi lever i

Ordet *geometri* har oprindeligt været betegnelsen for det at opmåle landarealer f.eks. i forbindelse med landbrug. I det gamle Egypten havde man brug for at kunne opmåle marker for derved at kunne afgøre, hvor meget skat den enkelte landmand skulle betale. De problemer, man kunne løse m.h.t. landmåling, kunne man senere bruge til også at løse andre beslægtede problemer som f.eks. i forbindelse med konstruktion af huse eller i forbindelse med astronomiske beregninger. Geometri var et redskab til at løse praktiske problemer vedrørende fysiske ting i hverdagen.

¹Min oversættelse

De første geometriske resultater byggede man på erfaring. Man kendte Pythagoras sætning men kun, fordi man havde iagttaget, at den gjaldt ved at måle på nogle retvinklede trekanter. Geometri var altså et spørgsmål om erfaring, og de resultater, man kunne komme frem til på dette grundlag, var meget begrænsede. Først med grækerne får man indført nogle mere præcise regler for geometri og nogle metoder til at verificere resultaterne.

Man kan sige, at geometri havde bevæget sig fra landbrugets marker og ind i tænkernes bevidsthed. Geometri blev en matematisk disciplin som dog havde til formål, på den mest optimale måde, at beskrive den virkelighed, som man kunne se på markerne, eller som man i forbindelse med astronomi kunne iagttage på himlen.

Vi skelner altså mellem det *fysiske-rum* og det *matematiske-rum*, idet vi ønsker at opbygge det sidste, således at det beskriver det første. Herefter kan vi så ved hjælp af logisk tankevirksomhed undersøge det *matematiske-rum* og derved sige en helt masse om det *fysiske-rum*. Som matematikere, der vil beskrive rummet, ønsker vi altså at følge et program som har punkterne:

1. Iagttage det *fysiske-rum*.
2. Finde regler som beskriver *fysiske-rum*.
3. Lave et matematisk system som bygger på disse regler.
4. Undersøge det *matematiske-rum*.
5. Få forståelse af det *fysiske-rum*.

Som vi har set, så havde geometrien udgangspunkt i beskrivelsen af en to-dimensional plade som f.eks en mark (markerne er flade, idet man anser Jorden for at være flad). Forestil dig et stort stykke papir, hvorpå man kan tegne trekanter, cirkler osv. Dette store stykke papir kalder man planet. Vores undersøgelse af geometrien vil også tage udgangspunkt i at undersøge planet og skabe et godt fundament for, hvordan planet beskrives.

1.3 Hvor skal vi starte?

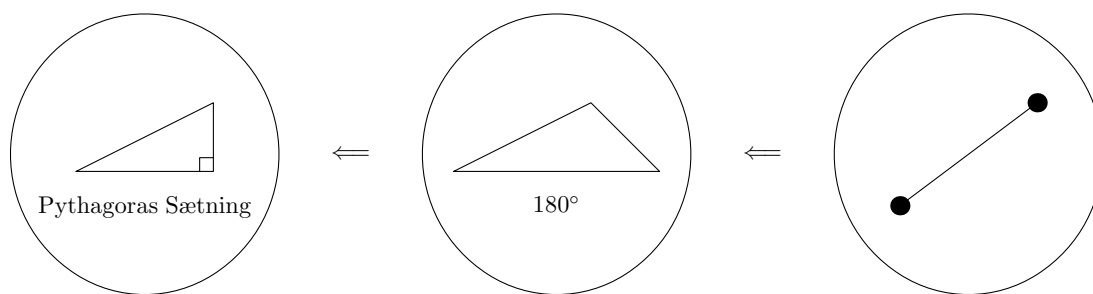
Vi har fra erfaring og fra vores skolegang en fornemmelse af, hvad geometri i planet er for noget, men når vi skal ned og se på de helt grundlæggende byggesten, er det vigtigt, at vi ikke tager vores gamle viden med. Vi er nødt til at starte helt forfra ved at stille os selv spørgsmålet:

Hvis man skal forklare geometri for et nyfødt barn, hvor skal man så starte?

Pythagoras sætning er velkendt for os, som har beskæftiget sig en smule med matematik. Den virker og er en pæn og nyttig sætning. Kan vi starte beskrivelsen af geometri med at sige, at Pythagoras sætning gælder? Næppe, den nyfødte vil for det første gerne vide hvad de forskellige ord betyder: punkt, ret linje, trekant, ret vinkel osv. Dernæst vil man nok blive påkrævet et argument for at denne sammenhæng:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

gælder for siderne i en retvinklet trekant. Vi er altså nødt til at fremkomme med et bevis for at tilfredsstille den nyfødte. I det bevis, man sædvanligvis ser i gymnasiet, bruger man blandt andet den viden, at vinkelsummen i en trekant er 180° . Vi må nu spørge os selv, om det så er et godt sted at starte? Kan vi starte vores forklaring af geometri med at påstå, at vinkelsummen i en trekant er 180° ? Måske? Men den lidt mere modne baby vil nok også kræve et bevis for denne påstand. Vi må altså finde nogle endnu mere grundlæggende egenskaber, hvor vi kan starte fra; egenskaber som vi ikke vil betvivle, fordi de virker helt klare og naturlige. En sådan egenskab kunne være følgende: Givet to punkter, så er det muligt at trække en ret linje mellem disse.



Figur 1.1: Vi ønsker at finde simple egenskaber og ud fra dem at bevise sætninger. (Figuren er ikke et fuldstændigt billede. Et sådan vil kræve mere end én simpel egenskab).

Det er næsten klart, at vi har brug for flere end blot en af disse simple egenskaber for at gøre vores system tilfredsstillende, men hvor mange vi har brug for, og hvad disse simple egenskaber skal være, er et rigtig gode spørgsmål. Den historie, vi skal følge, handler netop om udvælgelsen af disse simple egenskaber; noget som man ville forvente var enkelt, men som alligevel skulle komme til at volde matematikerne store problemer i mere end 2000 år.

1.4 Aksiomsystem

De fundamentale begreber i planen er punkter, rette linjer, linjestykker, cirkler osv. Som vi så i afsnit 1.3 er der brug for nogle regler for, hvordan disse objekter opfører sig. Reglerne for, hvordan disse opfører sig kaldes postulater eller aksiomer. Et postulat kan f.eks. være følgende:

Givet to punkter A og B så er det muligt at trække linjestykket AB .

Man kan nu vælge postulaterne præcist, som man har lyst. Det eneste krav er, at der ikke må være modsigelser inden for postulaterne. Man kan således ikke indføre et postulat, der siger, at man **ikke altid** kan trække en linje gennem to punkter, hvis man allerede har et postulat, der siger, at det **altid** kan lade sig gøre. Et system, som bygger på postulater, der ikke modsiger hinanden, kaldes et aksiomsystem.

I vores tilfælde skal geometrien beskrive det fysiske rum. De postulater, som vi vælger, skal derfor gerne beskrive nogle helt indlysende egenskaber ved det fysiske rum. De skal altså være simple regler for, hvordan punkter, rette linjer osv. opfører sig i det fysiske rum. At man gennem to punkter kan trække en ret linje virker umiddelbart som et godt postulat; altså noget man ikke har lyst til at betvivle. Man kan blot forestille sig en snor, som trækkes fra det ene punkt til det andet så stramt, det er muligt.

Opgave 1.4.1. Som vi lige har set, kan et simpelt postulat være, at det mellem to punkter er muligt at trække en ret linje. Find 2-3 flere postulater, som du mener geometrien skal opbygges efter (ord som cirkel og vinkel kan f.eks. indgå).

Kapitel 2

Euklid

Af de ældste civilisationer kan ingen sammenlignes med den græske, når det kommer til videnskab og intellektuel formåen. Inden for litteratur, kunst, filosofi, matematik og mange andre områder er de græske værker af så høj kvalitet og niveau, at de stadig bliver læst og regnet blandt de allerbedste.

I dette høj-intellektuelle samfund blev matematik regnet som en af de aller ypperligste videnskaber, og matematik blev anset for at være en af de reneste veje til at opnå erkendelse. Matematik var en del af uddannelsen i filosofi, og over døren til Platons akademi skulle der efter sigende havde stået skrevet:

Lad ingen komme ind her, som ikke kan sin geometri.

Man anså matematik som en måde, hvorpå man kunne strukturere sin tankegang for derved at opnå viden. Med denne store interesse for matematik og filosofi var det helt naturligt, at man begyndte at undre sig over, hvad der lå til grundlag for matematikken. Man indså, at det var nødvendigt med nogle definitioner og nogle simple spilleregler. Med andre ord så indså man nødvendigheden af et aksiomsystem.

Det mest berømte bud på et egentligt aksiomsystem, blev formuleret af den græske matematiker Euklid omkring år 300 før vores tidsregning.



Euklid ca. 325-ca. 270 BC.

Euklid havde sit virke i byen Alexandria (i Egypten), som på Euklids tid var en Græsk koloni, et samlingssted for lærde og hjemsted for et enormt bibliotek. I sit mest berømte værk kaldet *Euklids Elementer* eller blot *Elementerne* samlede Euklid store dele af den matematik, som man kendte på hans tid. Som indledning til den første bog i *Elementerne*, der omhandler plan geometri, indførte Euklid en række definitioner efterfulgt af nogle postulater. Vi skal i dette kapitel se, hvorledes Euklid opbyggede sit system, hvilke postulater han valgte, og hvorledes han brugte disse til at bevise geometriske sætninger.

2.1 Et mesterværk

Euklids Elementer regnes som et af de helt store hovedværker inden for matematikken. Det er blevet læst og beundret lige siden oldtiden og det har dannet tradition for, hvordan vi den dag i dag laver matematik. Det aksiomsystem, som Euklid indførte, er stadig en væsentlig del af det system, hvorpå vi bygger vores forståelse af geometri.

Euklids Elementer er et enormt værk som består af 13 bøger med et hav af sætninger og resultater. Vi skal blot se på nogle enkelte af disse sætninger. Udvalget er foretaget således, at vi ser de sætninger, som er vigtige for den historie, vi skal følge.

2.2 Euklids Elementer, bog I

Det var i stor grad geometri de græske matematikere beskæftigede sig med, så det er helt naturligt, at Euklids første bog omhandler planets geometri. Euklid starter meget direkte med at indføre de objekter, han ønsker at arbejde med. Således lyder første linje i Euklids første bog¹:

Definition 2.2.1 (1). Et **punkt** er det, som ikke kan deles.

Definition 2.2.2 (2). En **linje** er en længde uden bredde.

Definition 2.2.3 (4). En **ret linje** er en linje, som ligger *lige* mellem punkterne på den.

Man kan diskutere, hvorvidt det er muligt at definere et punkt uden, at man allerede har en ide om, hvad et punkt er. Det vigtige i denne her sammenhæng er blot, at Euklid får sagt, at de fundamentale objekter er punkter, linjer og rette linjer. Euklid indfører efterfølgende nogle vigtige begreber, som omhandler disse objekter:

Definition 2.2.4 (8). En **vinkel** er hældningen mellem to rette linjer.

Definition 2.2.5 (10). Når en ret linje er oprejst på en anden, så de ved siden af hinanden liggende vinkler bliver lige store, så kaldes vinklerne **rette**.

¹Oversættelsen fra *Euklids Elementer* bygger på Thyra Eibes oversættelse [5], men sproget er moderniseret.

Kommentar til læreren. Euklid bruger betegnelserne rette vinkler og hele vinkler. Vi bruger i stedet 90° og 180° .

Definition 2.2.6 (15). En **cirkel** er den linje, som består af alle de punkter, som har samme afstand (r) til et bestemt punkt (C). Afstanden r kaldes radius og punktet C kaldes for centrum.

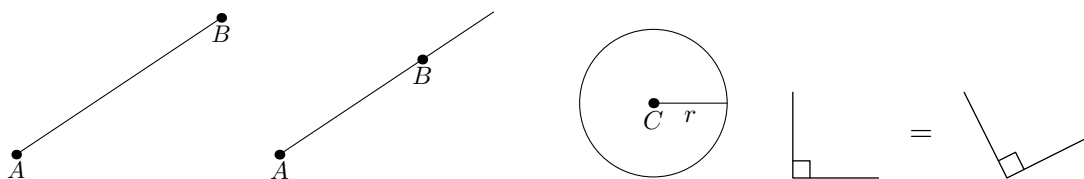
Definition 2.2.7 (20). Af trekanter kaldes den, der har alle tre lige store sider, en **lige-sidet** og den som har to lige store sider, en **ligebenet**.

Definition 2.2.8 (23). **Parallelle** er de rette linjer, som, når de forlænges, ikke mødes.

Tallene i parenteserne henviser til det nummer, som definitionen har i *Elementerne*, og det bemærkes, at ikke alle definitionerne er medtaget. Nu har Euklid ved definitionerne fortalt, hvad det er for nogle objekter, han ønsker at arbejde med. Det næste skridt er at indføre nogle postulater for, hvordan disse objekter skal opføre sig; altså indførelsen af et aksiomsystem. Euklid giver fem sådanne postulater for den plane geometri:

- P1.** Givet et punkt A og et punkt B kan man trække linjestykket AB .
- P2.** Et linjestykke AB kan forlænges.
- P3.** Givet et centrum og givet en radius kan man tegne en cirkel.
- P4.** Alle rette vinkler er lige store.

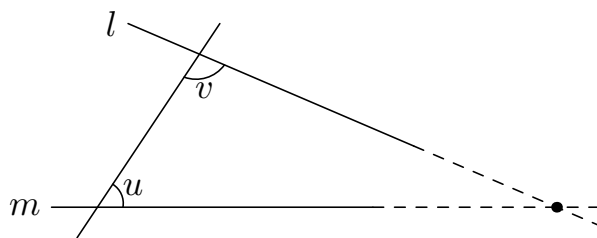
Det er nemt at forestille sig, hvad Euklids første fire postulater siger, og umiddelbart opfylder de kravene, vi havde stillet til postulater: de er simple, og vi kan acceptere, at de gælder i det fysiske rum.



Figur 2.1: Euklids fire første postulater illustreret ved tegninger. Fremover vil disse blive betegnet med P1-P4.

Euklids femte postulat har en noget længere formulering:

- P5.** Når en ret linje skærer to rette linjer (l og m), og de indvendige vinkler på samme side er mindre end 180° , så mødes de to linjer, når de forlænges ubegrænset, på den side, hvor de to vinkler, der er mindre end 180° , ligger.

Figur 2.2: P5: Hvis $u + v < 180^\circ$ så vil l skære m .

Disse fem postulater $P1 - P5$ er de postulater, Euklid ønskede som fundament for den plane geometri. Et meget vigtigt krav, vi havde til sådanne postulater, var, at der ikke inden for postulaterne måtte opstå selvmodsigelser. Der er ikke blevet konstateret selvmodsigelser, og der vil næppe blive konstateret selvmodsigelser i Euklids postulater. Vi vil vende tilbage til denne problemstilling i afsnit 8.6.

Kommentar til læreren. Sammen med de fem postulater indfører Euklid fem Aksiomer:

1. Størrelser, som er lige store med den samme, er indbyrdes lige store.
2. Når lige store størrelser lægges til lige store størrelser, er summen lige store.
3. Når lige store størrelser trækkes fra lige store størrelser, er resterne lige store.
4. Størrelser, der kan dække hinanden er lige store.
5. Det hele er større end en del af det.

Aksiomerne bruges gentagne gange i de sætninger, vi skal se på. Jeg har valgt ikke at tage dem med i selve undervisningsmaterialet, da de er helt oplagte og ikke har nogen indflydelse på den geometri, vi skal se på.

2.3 Rette linjer og linjestykker

Euklid bruger både betegnelsen *ret linje* og betegnelsen *linjestykke*. Et linjestykke er det, som (ifølge $P1$) kan trækkes mellem to punkter. Punkterne kaldes linjestykkets endepunkter. Ifølge $P2$ kan linjestykket forlænges. Den linje, der fremkommer, når linjestykket forlænges ubegrænset til begge sider, er en ret linje. På den måde definerer ethvert linjestykke en ret linje. De to begreber er på den måde tæt knyttet, og det kan være vanskeligt at skelne dem fra hinanden.

2.4 Euklids første 28 sætninger

Euklid er nu klar til at vise geometriske sætninger, og vi vil her se eksempler på nogle af de første sætninger, han viser. Når man læser beviset for Euklids første sætning, skal

man forestille sig, at man ingenting ved om geometri. De eneste redskaber, man har til rådighed, er definitioner og de 5 postulater.

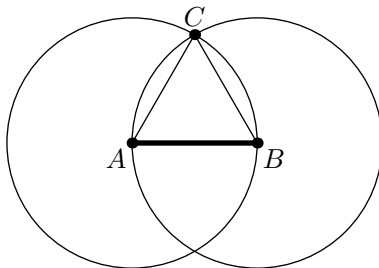
Oprindeligt var beviserne skrevet som ren tekst, dvs. uden forkortelser, symboler og illustrerende figurer. For at gøre det mere læsevenligt er der her indført symboler som $\angle$ og $\triangle$, og der er også tilføjet rigeligt med illustrationer. Samtidig er beviserne delt op i nummererede skridt, noget som heller ikke har været i Euklids oprindelige version. Beviserne følger dog ret nøjagtigt den bevis-metode, som blev brugt af Euklid. Som en ekstra hjælp er der efter næsten hver linje i en parentes angivet, hvilket postulat eller hvilken sætning, der gøres brug af.

Sætning 2.4.1 (Euklid 1). *At konstruere en ligesidet trekant på et givet linjestykke AB .*

Man kan undre sig over, hvorfor Euklid vælger at starte med en sætning, som beskriver, hvordan en ligesidet trekant konstrueres. Grunden er, at konstruktionen er vigtig, når nogle af de efterfølgende resultater skal etableres som f.eks. til konstruktion af midtnormal.

Bevis. Ud fra linjestykket AB laves følgende konstruktioner:

1. Cirklen med centrum i A og radius AB tegnes ($P3$).
2. Cirklen med centrum i B og radius BA tegnes ($P3$).
3. Det ene skæringspunkt for cirklerne kaldes C .
4. Linjestykkerne AC og BC trækkes ($P1$).



Figur 2.3:

Nu kan vi så observere følgende:

1. $|AB| = |AC|$ (Da C og B begge ligger på cirklen med centrum i A).
2. $|AB| = |BC|$ (Da C og A begge ligger på cirklen med centrum i B).

Vi kan nu konkludere, at $|AB| = |AC| = |BC|$ og at $\triangle ABC$ derfor er ligesidet. □

Det ses, hvordan Euklid er omhyggelig med kun at bruge de ting, han har postuleret. Vi skal nu indføre et begreb, som vi vil komme til at bruge meget fremover:

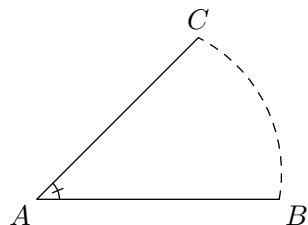
Definition 2.4.2. Hvis to trekanters sider er parvis lige store og alle vinkler parvis lige store, så siges trekanterne at være **kongruente**.

Sætning 2.4.3 (Euklid 4). Når to trekanter har to sider parvis lige store og de vinkler, der indesluttet af siderne er lige store, så vil trekanterne være kongruente.

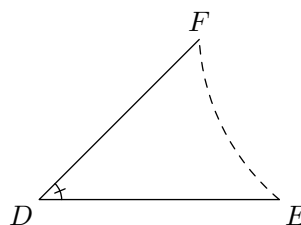
Beviset for Euklid 4 er det første eksempel, vi skal se på et såkaldt *modstrids-bevis*. Hvis man ikke er bekendt med den type bevis, skal man først læse appendix 11.1.

Bevis. Euklids bevis går nu efter følgende skridt:

1. Vi har to trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ hvor $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$ og $\angle A = \angle D$.
2. Vi antager nu, at $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ ikke er kongruente. Vi vil vise, at denne antagelse fører til en modstrid.

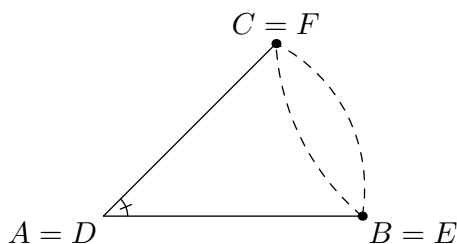


Figur 2.4:



Figur 2.5:

3. De to trekanter anbringes oven på hinanden således, at D falder sammen med A , siden DE falder sammen med siden AB og siden DF falder sammen med siden AC . Dette kan lade sig gøre da $\angle A = \angle D$.
4. Da siderne er lige lange, vil E så falde oven i B og F vil falde oven i C .



Figur 2.6:

5. Hvis trekanterne ikke er kongruente, vil linjestykkerne EF og BC ikke falde sammen.
6. Men så omslutter de to rette linjer EF og AB et areal, hvilket er umuligt.

Dermed har vi en modstrid så $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er kongruente, hvilket var det, vi ville bevise. $\square$

Sætning 2.4.4 (Euklid 5). *I en ligebenet trekant er vinklerne ved grundlinjen lige store.*

Opgave 2.4.5. Læs Euklids bevis for 2.4.4 i [5]. Skriv beviset op punkt for punkt som vi lige har set for Euklid 1 og Euklid 4. Gennemgå beviset på tavlen.

Opgave 2.4.6 (Euklid 10). * Vis, hvordan et linjestykke AB kan halveres ved hjælp af passer og lineal. Overvej hvilke postulater og sætninger du bruger ved konstruktionen.

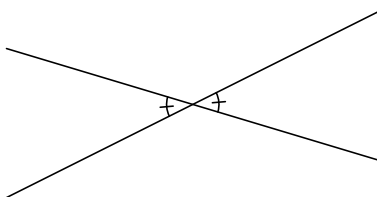
Opgave 2.4.7 (Euklid 11). * Vis, hvordan man, ved hjælp af passer og lineal, fra et punkt på en ret linje kan oprejse den vinkelrette.

Opgave 2.4.8 (Euklid 12). * Vis, hvordan man, ved hjælp af passer og lineal, fra et punkt kan nedfælde den vinkelrette på en givet linje.

2.5 Seks sætninger

Vi vil nu se et eksempel på, hvordan Euklid gør argumentationen overskuelig ved at lade sætningerne bygge oven på hinanden. Vi følger et forløb på seks sætninger, som hver bygger på den foregående. I hver af de beviser vi vil se, bruger Euklid altså resultatet fra den foregående sætning. Nogle af skridtene kan virke temmelig banale og derfor unødvendige, men dette er netop styrken ved Euklid. Ved at fastholde denne præcise arbejdsmåde undgår Euklid, at der indsniger sig fejl, når matematikken begynder at blive mere vanskelig.

Sætning 2.5.1 (Euklid 15). *Topvinkler er lige store.*

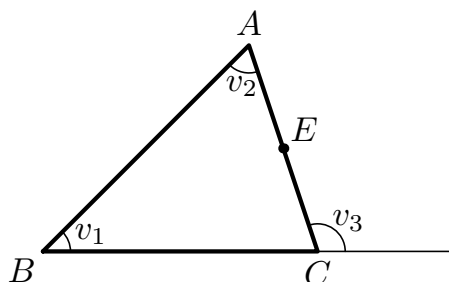


Figur 2.7: Topvinkler.

Opgave 2.5.2. Bevis Euklid 15. (hint: summen af vinkler, som tilsammen spænder over en hel linje er 180°)

Sætning 2.5.3 (Euklid 16). *I enhver trekant er, når en af siderne er forlænget, den udvendige vinkel større end enhver af de indvendige og modstående vinkler.*

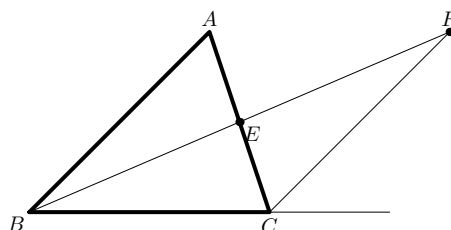
Hvis følgende figur betragtes:



så er påstanden altså at $v_1 < v_3$ og $v_2 < v_3$.

Bevis. Vi ser på en trekant ABC (figur 2.8). Følgende konstruktioner laves:

1. BC forlænges ($P2$).
2. AC halveres og halveringspunktet kaldes E (Euklid 10).
3. BE trækkes ($P1$).
4. BE forlænges ($P2$) og F afsættes således at $|BE| = |EF|$.
5. FC trækkes ($P1$).



Figur 2.8:

Kommentar til læreren. I punkt 4 bruges Euklid 3, som beskriver, hvordan man på et givet linjestykke kan afsætte en given længde. Operationen svarer til at afsætte en længde med en passer.

Man kan nu observere følgende:

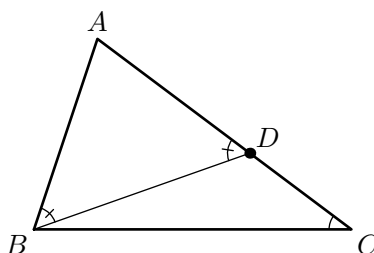
1. $|AE| = |EC|$ og $|BE| = |EF|$.
2. $\angle AEB = \angle CEF$ (Da de er topvinkler, Euklid 15).
3. $\triangle AEB$ og $\triangle CEF$ er kongruente (Euklid 4).
4. dvs $\angle BAE = \angle ECF$.

Men vi har nu vist, at $\angle A$ kun udgør en del af den udvendige vinkel ved C . Derfor er $\angle A$ mindre end den udvendige ved C . Det kan på næsten tilsvarende måde bevises, at $\angle B$ er mindre end den udvendige vinkel ved C . $\square$

Sætning 2.5.4 (Euklid 18). *I enhver trekant ligger der overfor en større side en større vinkel.*

Bevis. Vi ser nu på en trekant ABC (figur 2.9), hvor $|AC|$ er større end $|AB|$. Vi vil nu vise, at $\angle B > \angle C$. Følgende konstruktioner laves:

1. På AC afsættes punktet D således, at $|AB| = |AD|$ (Kan lade sig gøre, fordi $|AC| > |AB|$).
2. BD trækkes (P1).



Figur 2.9:

Man kan nu observere følgende:

1. $\triangle ABD$ er ligebenet, så $\angle ABD = \angle BDA$ (Euklid 5).
2. $\angle ADB$ er udvendig vinkel til $\triangle BDC$ så $\angle ADB > \angle DCB$ (Euklid 16).
3. Så er $\angle DBA > \angle DCB$.

Men $\angle DBA$ er kun en del af $\angle CBA$, så vi konkluderer, at $\angle CBA > \angle DCB$ eller $\angle B > \angle C$. □

Den sætning, vi lige har set, siger, at der over for større sider ligger større vinkler. Det er ikke givet, at den omvendte sætning af en bevist sætning er sand; altså at der over for større vinkler ligger større sider. I dette tilfælde gælder den omvendte sætning faktisk, og den er ved Euklid placeret som den næste sætning:

Sætning 2.5.5 (Euklid 19). *I enhver trekant ligger der overfor en større vinkel en større side.*

Bevis. Euklid beviser sætningen med et modstrids argument, se afsnit 11.1. Vi ser på en trekant ABC , hvor $\angle B > \angle A$ og vil så vise, at $|AC| > |BC|$. Vi antager nu det modsatte af $|AC| > |BC|$. Der er så to muligheder for, hvordan $|AC|$ og $|BC|$ forholder sig til hinanden:

1. $|AC| = |BC|$
2. $|AC| < |BC|$

Vi vil nu se, at begge muligheder fører til noget 'sludder':

1. Hvis $|AC| = |BC|$ vil $\triangle ABC$ være ligebenet, og så vil $\angle A = \angle B$ (Euklid 5). Men det er jo noget 'sludder', idet $\angle B > \angle A$.
2. Hvis $|AC| < |BC|$ ved vi fra Euklid 18, at $\angle B < \angle A$. Men det er jo noget 'sludder' idet $\angle B > \angle A$.

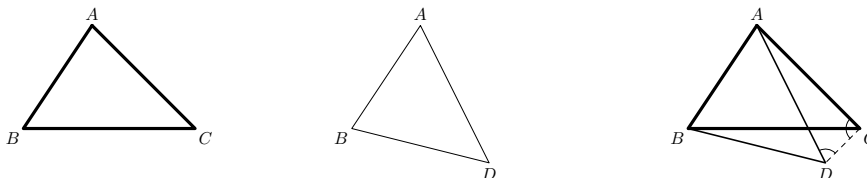
Vi har altså vist, at den modsatte antagelse vil føre til modstrid. Altså er $|AC| > |BC|$, som vi ønskede at vise. $\square$

Opgave 2.5.6 (Euklid 23). Vis, hvordan man ved hjælp af passer og lineal kan flytte en given vinkel.

Sætning 2.5.7 (Euklid 24). Når to trekanter har to sider, som er parvis lige store, men den ene har større vinkel mellem siderne, så vil den også have en større grundlinje end den anden.

Bevis. Vi ser på to trekanter ABC og ABD , hvor $|AB| = |AB|$, $|AD| = |AC|$ og $\angle BAC > \angle BAD$. Vi ønsker så at vise, at $|BC| > |BD|$. Følgende konstruktion kan nu laves:

1. De to trekanter flyttes således, at siden AB er sammenfaldende (figur 2.10).
2. Linjestykket DC trækkes (P1).



Figur 2.10:

Der observeres nu følgende:

1. $|AD| = |AC|$ så $\triangle ADC$ er ligebenet, og derfor ser vi, at $\angle CDA = \angle ACD$ (Euklid 5).
2. Ved at sammenligne vinkler ses nu følgende: $\angle CDB > \angle CDA = \angle ACD > \angle BCD$.
3. Men så ser vi at $\angle CDB > \angle BCD$, som begge er vinkler i $\triangle BCD$.

Så kan vi konkludere, at $|BC| > |BD|$ (Euklid 19), som var det vi ville vise. $\square$

Sætning 2.5.8 (Euklid 25). Når to trekanter har to sider, som er parvis lige store, men den ene har større grundlinje end den anden, så vil den også have en større vinkel mellem siderne end den anden.

Opgave 2.5.9. Vis Euklid 25, ved hjælp af et modstrids argument som i beviset for Euklid 19.

Vi har nu set, hvordan sætningen om topvinkler (Euklid 15) har ført til disse sætninger om, hvordan siderne i en trekant forholder sig til vinklerne (Euklid 24 og Euklid 25). I beviserne bruger Euklid kun de sætninger, han allerede har bevist samt de 4 første postulater.

2.6 Kongruens

Euklid kan nu bevise endnu en sætning vedrørende kongruente trekanter:

Sætning 2.6.1 (Euklid 26).

1. Hvis to trekanter har to vinkler og de mellemliggende sider lige store, så er trekanterne kongruente.
2. Hvis to trekanter har to sæt vinkler som er parvis lige store, et sæt sider som er parvis lige store og siderne ligger over for vinkler som er parvis lige store, så er trekanterne kongruente.

Vi beviser ikke sætningen, men beviset kan findes i [5].

Kongruens-sætningerne er ret vigtige, når vi i fremtiden skal bevise sætninger og konstruere forskellige figurer, og det er godt at have et billede af, hvad sætningerne siger. Når vi i fremtiden skal afgøre om to trekanter er kongruente, så skal vi se på følgende fire eksempler:



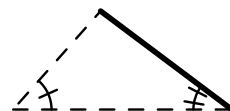
Figur 2.11: Euklid 4



Figur 2.12: Euklid 26(1)



Figur 2.13: Euklid 26(2)



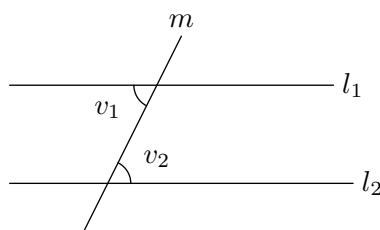
Figur 2.14: Euklid 26(2)

Hvis de to trekanter er ens på de størrelser, der er markeret på ét af de fire eksempler, så er trekanterne kongruente.

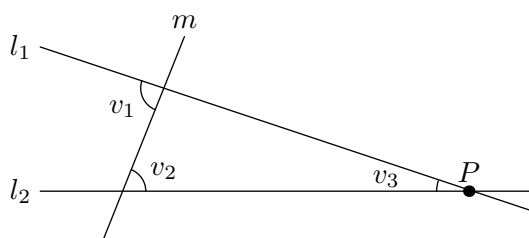
2.7 Parallelitet

Som det sidste havde Euklid defineret, hvad det vil sige, at to rette linjer er parallelle. Euklid sagde, at to rette linjer er parallelle, når de ikke skærer hinanden. Sætning 27 er den første sætning, hvor Euklid beviser noget om parallelitet, indtil da har han helt undgået at bruge begrebet. Parallelitet kommer til at spille hovedrollen i vores historie, så vi vil nu følge Euklids behandling af begrebet meget nøje:

Sætning 2.7.1 (Euklid 27). Når en ret linje skærer to rette linjer og vekselvinklerne er lige store vil de rette linjer være parallelle.

Figur 2.15: v_1 og v_2 siges at være vekselvinkler.

Bevis. Vi har altså en ret linje m , der skærer de rette linjer l_1 og l_2 , og vekselvinklerne v_1 og v_2 er lige store. Vi vil så gerne bevise, at l_1 og l_2 er parallelle. Igen bruges et modstrids-argument (se afsnit 11.1). Vi antager det modsatte af det, vi skal vise, dvs at l_1 og l_2 skærer hinanden. Vi kalder skæringspunktet for P :

Figur 2.16: Det antages at l_1 og l_2 mødes i punktet P . Samtidig var det givet at $v_1 = v_2$.

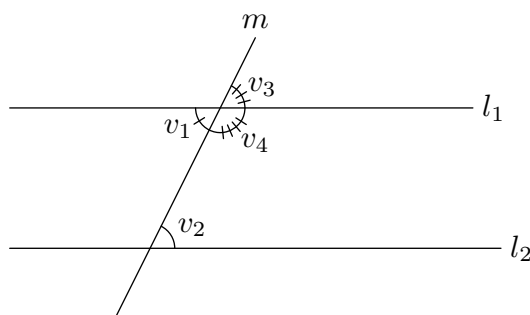
Vi vil nu gerne komme frem til noget 'sludder'. Følgende observeres ved at se på figuren:

1. De rette linjer m , l_1 og l_2 danner en trekant.
2. v_1 er udvendig vinkel til trekanten.
3. v_1 er derfor større end både v_2 og v_3 (Euklid 16).
4. Men det var givet at $v_1 = v_2$.

Vi har nu en modstrid: v_1 kan ikke både være større end v_2 og samtidig lig med v_2 . Antagelsen var forkert så l_1 og l_2 er parallelle. $\square$

I den følgende sætning henvises der til vinkel-betegnelserne på figur 2.17.

Sætning 2.7.2 (Euklid 28). Når en ret linje skærer to rette linjer, og den udvendige vinkel (v_3) er lig den indvendige og modstående på samme side (v_2), eller de indvendige vinkler på samme side (v_2 og v_4) til sammen er lig 180° , vil de rette linjer være parallelle.



Figur 2.17:

Opgave 2.7.3. Vis Euklid 28 ved at bruge Euklid 27.

2.8 Sætning 29 og frem

Euklids sætning 29 spiller en meget vigtig rolle, når man, som vi ønsker, vil undersøge betydningen af Euklids postulater. Det er nemlig her Euklid for første gang bruger det sidste postulat, *P5*. I alle de sætninger vi indtil nu har set, har Euklid meget bevidst kun gjort brug af postulaterne *P1* – *P4*. Vi vil senere komme ind på, hvorfor Euklid er så forsigtig med at bruge dette 5. postulat (se afsnit 3.1).

I Euklid 27 og Euklid 28 kunne Euklid konkludere, at to linjer er parallelle hvis de pågældende vinkler tilsammen er mindre end 180° . For at kunne sige noget om det modsatte; altså sige noget om vinklerne, givet at linjerne er parallelle, er Euklid nødt til at tage *P5* i brug:

Sætning 2.8.1 (Euklid 29). Når en ret linje skærer to parallelle rette linjer, er vekselvinklerne lige store, den udvendige vinkel er lig den indvendige og modstående, og de indvendige vinkler på samme side er tilsammen lig 180° .

Hvis vinkel-betegnelserne fra figur 2.17 bruges kan Euklid 29 skrives som:

$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 \\ v_2 = v_3 \\ v_2 + v_4 = 180^\circ \end{cases}$$

Bevis. Beviset er delt op i tre dele, og der henvises til de vinkler, som er angivet på figur 2.17.

1. Det første, der skal bevises, er altså følgende: $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow v_1 = v_2$.

Beviset er et modstrids-bevis. Vi antager altså, at $v_1 \neq v_2$ og vil så gerne komme frem til noget 'sludder'. En af vinklerne må så være mindre end den anden. Vi ser først på tilfældet, hvor $v_2 < v_1$. Ved at lægge vinklen v_4 til på begge sider får vi følgende regnestykke:

$$v_2 < v_1 \iff v_2 + v_4 < v_1 + v_4 \iff v_2 + v_4 < 180^\circ$$

Men P5 siger nu, at de to rette linjer l_1 og l_2 så vil skære i et punkt P . Men det er noget 'sludder', for de to linjer var jo parallelle. Altså er vores antagelse $v_2 < v_1$ forkert. På samme måde kan det bevises, at $v_1 < v_2$ er forkert. Der må derfor gælde at $v_1 = v_2$, som var det, vi ønskede at vise.

2. Dernæst skal vi bevise: $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow v_2 = v_3$.

Hvis l_1 og l_2 er parallelle, ved vi fra det, vi lige har vist, at $v_1 = v_2$. Men v_1 og v_3 er topvinkler, og derfor ved vi, at $v_1 = v_3$. Dvs. $v_2 = v_3$, som var det, vi ønskede at vise.

3. Vi mangler nu at vise: $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow v_2 + v_4 = 180^\circ$.

Fra det vi lige har vist, ved vi at $v_2 = v_3$. Vi regner nu:

$$v_2 = v_3 \iff v_2 + v_4 = v_3 + v_4 \iff v_2 + v_4 = 180^\circ$$

hvilket var det, vi ønskede at vise.

□

Opgave 2.8.2 (Euklid 31). *Vis, hvordan man med passer og lineal, gennem et givet punkt(P), kan konstruere en ret linje (m), som er parallel med en given linje (l). Bruges P5 til denne konstruktion?

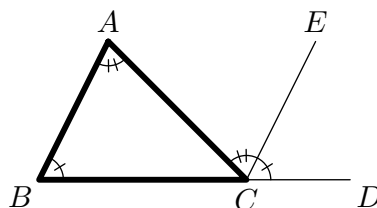
Kommentar til læreren. Konstruktionen gør faktisk ikke brug af Euklid 29, eller P5. For at sikre sig, at denne parallelle linje er entydig, har man dog brug for Euklid 29. Ønsket om entydighed forklarer sætningens placering.

For at etablere disse velkendte egenskaber ved parallelle linjer følte Euklid sig nødsaget til at tage det 5. postulat i brug. Da disse egenskaber var på plads med Euklid 29, kunne han så fortsætte med at bevise endnu flere geometriske sætninger. Sætninger som vi er vokset op med og er vant til at bruge. Vi skal blot se eksempler på et par af disse:

Sætning 2.8.3 (Euklid 32). *I enhver trekant er vinkelsummen 180°*

Bevis. Vi ser på en trekant ABC . Følgende konstruktioner kan nu laves:

1. Linjestykket BC forlænges til D (P2).
2. Gennem C trækkes et linjestykke, som er parallel med AB (Euklid 31). Linjestykket kaldes EC .



Der observeres nu følgende:

1. AC er en ret linje, der skærer to parallelle linjer AB og CE . Derfor er $\angle A = \angle ECA$ (Euklid 29).
2. BC er en ret linje, der skærer to parallelle linjer AB og CD . Derfor er $\angle B = \angle DCE$ (Euklid 29).

Men $\angle DCE + \angle ECA + \angle C = 180^\circ$, så vi konkluderer, at $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, hvilket var det, vi ville vise. $\square$

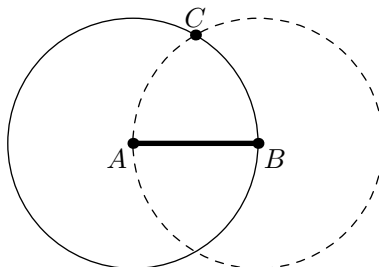
Vi har nu set, hvordan $P5$ (sammen med de første 4 postulater) fører til den velkendte sætning, som siger, at vinkelsummen i enhver trekant er 180° . En anden meget velkendt sætning dukker op som sætning 47:

Sætning 2.8.4 (Euklid 47). *I en retvinklet trekant er summen af kvadratet på kateterne lig med kvadratet på hypotenusen. (Pythagoras Sætning)*

Vi beviser ikke sætningen her, men beviset kan findes i [5] eller i de fleste matematikgrundbøger. Euklid fortsætter sine matematiske undersøgelser i de ialt 13 bøger som *Elementerne* består af. Af disse handler langt de fleste om geometri, hvor Euklid b.l.a. behandler geometri i 3 dimensioner og langt mere komplicerede sætninger og resultater end de, vi har set eksempler på. Men selvom sætningerne bliver mere komplicerede og endda omhandler geometri i tre dimensioner, så er grundlaget stadig det samme, nemlig de fem postulater fra *Euklids Elementer, Bog I*.

2.9 Euklids underforståede postulater

Vi har nu set nogle fremragende eksempler på, hvordan Euklid beviser sætninger, og at han hele tiden er meget bevidst om, hvad han *ved*, og hvad han *ikke ved*. Alligevel bruger Euklid enkelte steder noget, som han ikke har bevist og heller ikke postuleret. Allerede i den første sætning (Euklid 1) støder vi på et problem. I det tredje punkt af konstruktionen går Euklid ud fra, at de to cirkler rent faktisk vil skære hinanden i et punkt, som betegnes C :

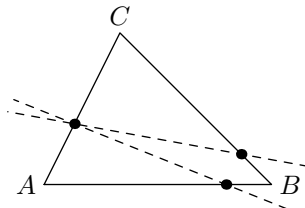


Kan man være sikker på at C findes? Spørgsmålet er altså om skæringspunktet faktisk findes? Det kan man ikke være sikker på, med mindre man indfører et postulat som siger følgende:

P6: To cirkler, hvor den enes centrum ligger på den andens periferi, har to skæringspunkter.

Et beslægtet postulat udtaler sig om skæringspunkterne mellem en linje og en trekant. Vi får senere brug for postulatet og formulere det derfor nu:

H II.4: Hvis en ret linje skærer en side i en trekant, så vil den også skære mindst en af de to andre sider.



Postulatet **H II.4** kaldes for *Paschs Aksiom* opkaldt efter matematikeren M. Pasch som formulerede det i 1882.

Det næste problem ser vi i beviset for Euklid 4. Her skriver Euklid, at to rette linjer ikke kan omslutte et areal; noget han hverken har bevist eller postuleret. Her burde Euklid altså have indført et postulat der siger at:

P7: To rette linjer kan ikke omsluttet et areal.

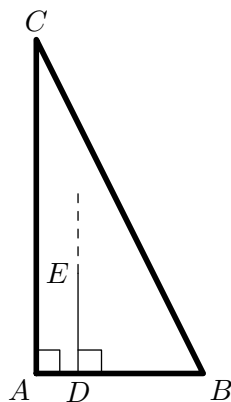
Nogle senere matematikere valgte en anden løsning på problemet, idet man ændrede *P1* således, at det i stedet siger, at der findes en og kun én ret linje gennem to givne punkter.

H I.2: Givet et punkt *A* og et punkt *B* kan man trække præcist én ret linje *AB* gennem *A* og *B*.

I beviset for Euklid 4 gjorde vi brug af endnu en ting, som vi ikke havde gjort rede for. Vi flyttede nemlig $\triangle DEF$ således, at hjørnerne ville falde oven i hjørnerne i $\triangle ABC$. At det er muligt at flytte en figur, uden samtidig at ændre på figurens sider eller vinkler, er, for en moderne matematiker, ikke helt oplagt og skal derfor også indføres som et postulat:

P8: Det er muligt at flytte enhver figur uden derved at ændre på figuren.

Opgave 2.9.1. *Lad ABC være en retvinklet trekant. Lad linjestykket DE stå vinkelret på siden AB .



1. Bevis at DE vil skære BC , når det forlænges, idet de nye postulater må bruges sammen med Euklids gamle sætninger.
2. Bruges $P5$ undervejs i denne opgave?

Opgave 2.9.2. Brug postulat H II.4 til at bevise følgende sætning:

Hvis en ret linje skærer en side i en firkant, så vil den også skære mindst en af de tre andre sider.

2.10 Hilbert

At nogle af postulaterne i afsnit 2.9 har fået bogstavet **H** som fornavn skyldes den tyske matematiker *David Hilbert* der i 1899 udgav hovedværket *Grundlagen der Geometrie*.



David Hilbert 1862-1943

Med dette værk giver Hilbert et seriøst bud på, hvordan aksiomsystem for geometrien kunne se ud. *Grundlagen der Geometrie* er i opbygning meget inspireret af *Euklids Elementer* og flere af Euklids postulater går da også igen i Hilberts aksiomsystem. Hilberts værk markerer lidt groft sagt afslutningen af den historie, vi skal følge. Han er kommet med her, fordi han er en af de første til at formulere de postulater, som Euklid og også Euklids efterfølgere var flittige til underforstået at bruge.

Kapitel 3

Problemer med Euklids geometri

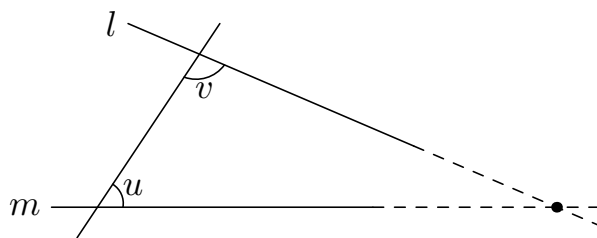
Vi har nu set, hvordan man kan lave et matematisk system, der beskriver planet på en god og fornuftig måde. At Euklids geometri var en rigtig god beskrivelse af planet, var der stor enighed om blandt matematikere de næste par tusind år. Som vi har set i 2.9 var der alligevel enkelte mangler ved Euklids aksiomsystem. Disse mangler kunne man dog nemt rette ved at tilføje et par ekstra postulater, som Hilbert gjorde i *Grundlagen der Geometrie*. Som sådan kom disse mangler altså ikke til at skabe så store problemer.

3.1 Parallelpостulatet

Anderledes pinefuldt var problemet med det femte postulat, $P5$ eller *parallelpостulatet*. Lige siden oldtiden, ja sikkert helt tilbage til Euklid selv, havde man en vis mistro til dette postulat. Man var i tvivl om, hvorvidt $P5$ var at regne som et postulat, altså som en af de simple grundantagelser. Lad os nu se nærmere på, hvordan det femte postulat adskiller sig fra de andre fire postulater:

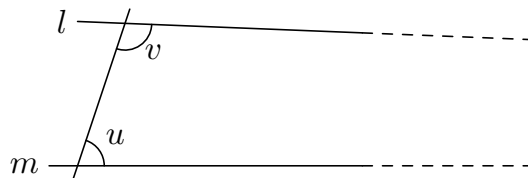
P5: Når en ret linje skærer to rette linjer, og de indvendige vinkler på samme side er mindre end 180° , så mødes de to linjer, når de forlænges ubegrænset, på den side, hvor de to vinkler ligger, der er mindre end 180° .

Det første, man bemærker, er den meget lange formulering. Det er meget nemt at forestille sig, hvad $P1 - P4$ udtrykker. $P5$ skal man derimod lige tykke lidt på. Man kan sige, at $P5$ har mere karakter af sætning eller et resultat, som skal bevises og ikke postuleres. Hvis man tegner postulatet, får man en bedre fornemmelse af, hvad postulatet siger. $P5$ kan illustreres ved figur 3.1:



Figur 3.1: $P5$: Hvis summen af de indvendige vinkler på samme side er mindre end 180° , så vil l og m skære hinanden.

Da vi indførte postulatene var kravet, at det, som vi postulerede, skulle være intuitivt klart for enhver. Der må altså ikke være nogen tvivl om, at det, som postulatet siger, rent faktisk er tilfældet i vores fysiske rum. Men kan man virkelig være sikker på, at de to linjer, som omtales i $P5$, vil skære hinanden? Hvis nu summen af de to vinkler er meget tæt på 180° , lad os f.eks. sige at $u + v = 179,99^\circ$, er det så sikkert, at de to linjer l og m vil skære hinanden?



Figur 3.2:

Det ville i hvert fald kræve et meget stor stykke papir og en lang lineal at undersøge, om de to linjer l og m ville skære hinanden. Derfor kan man godt forstå, at der var mistro til $P5$. *Det skal jo bevises!?!*

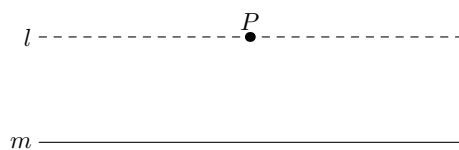
Vi har allerede set, at Euklid ikke brugte $P5$, før det var strengt nødvendigt. Han ventede helt indtil beviset for Euklid 29. Det viser sig, at nogle af de første 28 sætninger faktisk kan bevises meget nemmere ved hjælp af $P5$, og der er derfor god grund til at tro, at Euklid selv også har været mistroisk. Men hvorfor valgte Euklid så alligevel at tage dette 'grimme' postulat med? Var det en fejl, eller havde Euklid en god grund til at medtage $P5$?

3.2 Playfairs Aksiom.

$P5$ er, som vi lige har set, tæt forbundet med begrebet parallelitet. Et andet postulat vedrørende parallelitet kaldes Playfairs Aksiom (**PA**). Dette postulat siger følgende:

PA Givet en linje m og et punkt P , som ikke ligger på m , så findes der præcis én ret linje l , som er parallel med linjen m og som går gennem P .

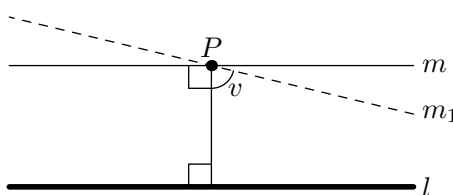
Postulatet kaldes for Playfairs Aksiom, efter den engelsk matematiker John Playfair (1748-1819), som formulerede det. Postulatet har dog været kendt helt tilbage i grækenes tid.



Figur 3.3: Playfairs Aksiom

Opgave 3.2.1. Denne opgave går ud på at bevise Playfairs Aksiom, efter at have antaget $P5$:

1. Lad der være givet et punkt P og en ret linje l .



Figur 3.4:

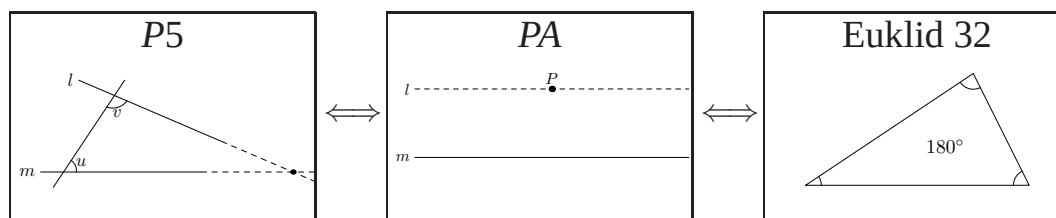
Den vinkelrette fra P nedfældes på l og i P oprejses den vinkelrette til denne. Den sidste kalder vi for m .

2. Hvilke Euklid-sætninger skal der til for at lave disse konstruktioner?
3. Gør rede for at $l \parallel m$.
4. Lad nu m_1 være en anden ret linje, som går gennem P dannende en spids vinkel v . Brug $P5$ til at bevise at $m_1 \nparallel l$.
5. Undersøg tilfældet hvor $v > 90^\circ$.
6. Gør rede for at følgende nu er bevist: $P5 \Rightarrow PA$.

Vi vil senere se, hvordan man kan bevise, at $PA \Rightarrow P5$ (opgave 4.2.7).

3.3 Ækvivalenser til $P5$

Det viser sig, at hvis vi har sagt $P5$, har vi også sagt PA . Omvendt har vi sagt PA , så har vi også sagt $P5$. Man siger, at de to udsagn er *ækvivalente*. Euklid kunne altså havde valgt Playfairs Aksiom som erstatning for $P5$, da de siger det samme om systemet. Men der er faktisk flere muligheder for postulater, som Euklid kunne havde udskiftet $P5$ med. I opgave 4.2.8 vil vi se, at $P5$ er ækvivalent med Euklid 32, altså at vinkelsummen i enhver trekant er 180° .



Figur 3.5: Tre ækvivalente udsagn.

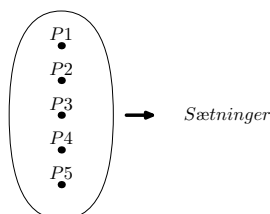
Havde Euklid nu i stedet valgt at erstatte *P5* med *PA* eller Euklid 32, så havde det ikke gjort nogen forskel. Euklid var kommet frem til det samme geometriske system blot med den forskel, at *P5* nu ville være at finde som en sætning, hvor det før havde været et postulat.

Kapitel 4

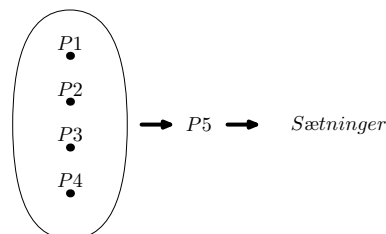
Forsøg på at redde Euklid

4.1 En plet på geometrien

Euklid var altså ikke glad for $P5$, men han havde brug for det, for at kunne bevise sætninger som f.eks. at vinkelsummen i en trekant er 180° . Denne mistro til $P5$ fortsatte op igennem historien. I 1621 omtalte matematikeren Saville¹ $P5$ som 'en plet på geometrien'. En lang række matematikere forsøgte i de efterfølgende par tusind år at løse problemet og fjerne pletten. Det, man ønskede, var at bevise $P5$ ved kun at bruge de første fire postulater $P1 - P4$. Hvis dette kunne lade sig gøre, havde man bevist, at $P5$ ikke var et nødvendigt postulat men blot en sætning på lige fod med de første 28 sætninger i *Euklids Elementer*.



Figur 4.1: Euklid bruger alle fem postulater til at vise sætningerne i *Euklids Elementer*. $P5$ bruges dog ikke i de første 28 sætninger.



Figur 4.2: Man ønskede at udlede $P5$ ved hjælp af de første 4 postulater. Herefter kunne man så vise alle de sætninger som findes i *Euklids Elementer*.

I de følgende afsnit er det vigtigt, at vi er meget opmærksomme på, hvad vi må og ikke må. Vi må bruge de første 4 postulater men ikke det 5. postulat. Vi må også bruge alt, hvad der kan bevises med de første 4 postulater dvs. Euklids første 28 sætninger. Men vi må ikke bruge de sætninger, som kommer efter sætning 28. Her har Euklid jo brugt $P5$ til beviserne. Vi kan altså ikke bruge den oplysning, at vinkelsummen i enhver trekant er 180° og heller ikke Pythagoras sætning eller Playfairs Aksiom.

¹[2] side v.

Vi skal i dette kapitel se eksempler på, hvordan forskellige matematikere igennem de næste mange hundrede år forsøgte at rette på aksiomsystemet for geometrien.

4.2 Al-Tusi

I det 7. århundrede opstod der, i forbindelse med Islams opståen, under arabisk ledelse, en verdens-stormagt i Mellemøsten. På få år lykkedes det arabiske styrker at erobre enorme land-områder fra Indien i øst til Spanien i vest. Inden for videnskaben overtog araberne også føringen. Mange af de værker, som grækerne havde skrevet, blev oversat til arabisk og læst af arabiske videnskabsmænd. Således blev Euklids *Elementer* kendt i den arabiske verden og blev også her genstand for megen opmærksomhed.

Det område, vi i dag kender som Iran, var omkring år 1200 stadig en del af det arabiske rige, og byen Nishapur var et stort center for videnskab. Her i Nishapur blev Al-Tusi Nasîr-Eddîn uddannet.



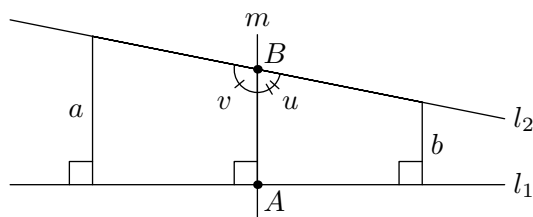
Al-Tusi Nasîr-Eddîn 1201-1274.

Al-Tusi interesserede sig bl.a. for logik, astronomi og matematik, og han læste selvfølgelig også Euklid. Vi skal nu se, hvorledes Al-Tusi behandlede spørgsmålet om parallelle linjer dvs. problemet med $P5$. Det var på det tidspunkt meget normalt, at man refererede Euklid og tilføjede egne kommentarer. De udregninger, vi her skal følge, stammer fra Al-Tusis kommentarer til Euklid, og de har været placeret mellem Euklid 28 og Euklid 29.

Al-Tusi var ikke den første af de arabiske videnskabsmænd, der kommenterede Euklids femte postulat, men han var nok en af de mest interessante. Dels fordi hans værker senere bliver kendt i Europa og kommer til at få indflydelse på den historie, vi skal følge. Og dels fordi det Al-Tusi lavede er smart og samtidig noget, som vil give os forståelse af problemet med $P5$.

Al-Tusi påstand, A5

Al-Tusi betragter to rette linjer l_1 og l_2 , som skæres af en ret linje m i punkterne A og B . Den rette linje m skærer de to linjer således, at vinklen ved l_1 er ret. De to vinkler, som m danner med l_2 , kalder vi for u og v , som det ses på figur 4.3. Vi ser nu på to linjestykker med længderne a og b , som også afskæres af l_1 og l_2 , og som samtidig begge står vinkelret på l_1 :



Figur 4.3:

Al-Tusi siger så, at hvis $v > u$, så er det intuitivt indlysende, at a vil være større end $|AB|$, og at b samtidig vil være mindre end $|AB|$. Med de betegnelser, som vi lige har indført, så påstår Al-Tusi altså følgende:

$$v > u \Rightarrow a > |AB| > b \quad (4.2.1)$$

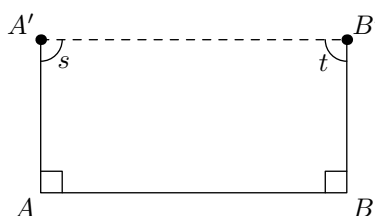
At noget sådan gælder er selvfølgelig en påstand og skal derfor postuleres på lige fod med Euklids 5 postulater. Af en eller anden grund synes Al-Tusi at 4.2.1 er mere intuitiv end $P5$, og han havde derfor ingen kvaler med at bruge 4.2.1.

For os, som har lært om aksiomsystemer, er det klart, at 4.2.1 er et postulat på lige fod med $P5$, men det er tvivlsomt, om Al-Tusi rent faktisk var klar over, at han blot havde erstattet $P5$ med et nyt postulat 4.2.1. Postulatet 4.2.1 vil vi for eftertiden betegne med $A5$, eller Al-Tusis postulat.

Al-Tusis hjælpe-sætning

Først beviser Al-Tusi en hjælpe-sætning, som siger at følgende konstruktioner vil føre til konstruktion af et rektangel:

1. På et linjestykke AB oprejses vinkelret et linjestykke AA' (Euklid 11).
2. Den vinkelrette oprejses i punktet B (Euklid 11).
3. Linjestykket BB' afsættes således, at $|AA'| = |BB'|$.
4. Den rette linje $A'B'$ trækkes ($P1$).



Sætning 4.2.1. Vinklerne s og t er rette. $ABB'A'$ er altså et rektangel.

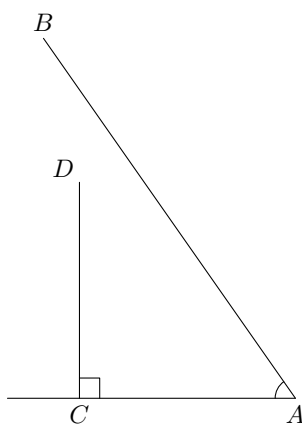
Bevis.

1. Antag, at $t > 90^\circ$
2. Ifølge Al-Tusis påstand A5 gælder nu følgende: $|AA'| > |BB'|$
3. Men det kan jo ikke passe, da konstruktionen er lavet på en sådan måde at $|AA'| = |BB'|$
4. Altså kan det ikke passe at $t > 90^\circ$
5. På samme måde kan det vises, at t ikke kan være mindre end 90°
6. Altså har vi at $t = 90^\circ$
7. Helt tilsvarende kan det vises at $s = 90^\circ$

Al-Tusi har altså vist, at den konstruktion, vi ser på, vil føre til konstruktion af et rektangel, hvis man undervejs bruger postulatet A5. $\square$

Al-Tusis skridt til bevis for P5

Al-Tusi ser på to linjestykker AB og CD , som begge skærer den rette linje AC på en sådan måde, at $\angle DCA = 90^\circ$ og $\angle BAC < 90^\circ$.



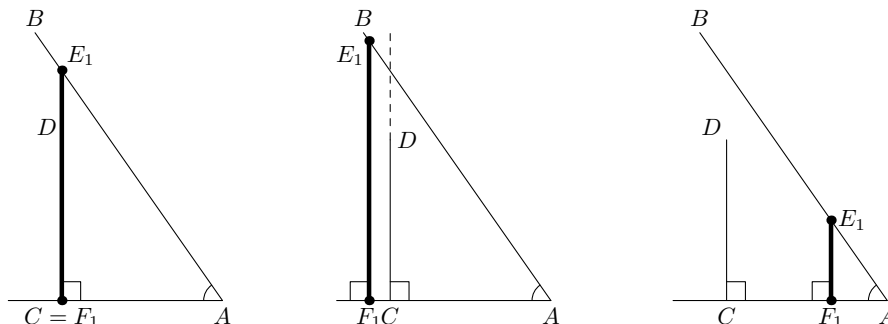
Figur 4.4: Figuren er drejet 90° i forhold til de illustrationer vi så ved Euklid, men situationen er fuldstændig den samme.

Euklids P5 siger, at de to linjestykker AB og CD vil skære hinanden, hvis de forlænges, men Al-Tusi vil forsøge at komme frem til denne skæring uden at bruge P5. Vi skal nu følge den fremgangsmåde, som Al-Tusi benytter.

Vi vælger et vilkårligt punkt på linjestykket AB , som vi kalder E_1 . Fra E_1 nedfældes den vinkelrette på den rette linje AC (Euklid 12) og nedslagspunktet kalder vi F_1 . Der er nu tre muligheder, hvor F_1 kan falde i forhold til C :

1. F_1 falder sammen med C .

2. F_1 falder på AC 's forlængelse til venstre for C .
3. F_1 falder mellem A og C .

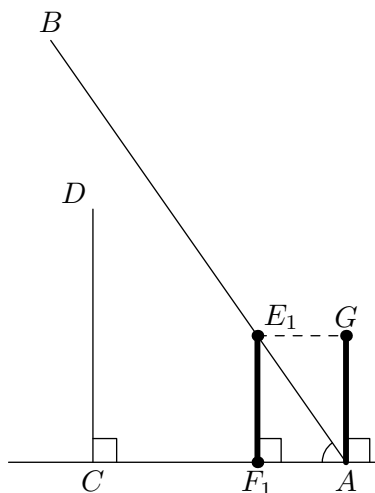


1. I første tilfælde er det helt klart at linjestykkerne AB og CD vil skære hinanden, når de forlænges, nemlig i punktet E_1 .
2. I andet tilfælde argumenterer Al-Tusi for, at forlængelsen af CD ikke kan forlade trekanten gennem linjestykket E_1F_1 , og derfor må skære linjestykket AE_1 og dermed AB (se opgave 2.9.1).
3. Tredie og sidste mulighed, hvor F_1 falder mellem A og B kræver lidt mere, og det er denne mulighed, vi vil se på i det følgende afsnit.

Al-Tusis argument

Al-Tusi vil nu ved hjælp af sætning 4.2.1 bevise, at de to linjestykker AB og CD skærer hinanden, når de forlænges. Han laver derfor følgende konstruktioner:

1. Den vinkelrette oprejses i punktet A , se figur 4.5 (Euklid 11).
2. G afsættes således, at $|E_1F_1| = |AG|$.
3. E_1G trækkes (P1).



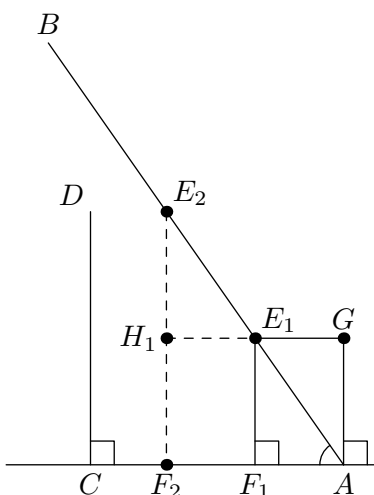
Figur 4.5:

Nu vil F_1AGE_1 ifølge sætning 4.2.1 være et rektangel, dvs

$$|E_1G| = |F_1A| \quad (4.2.2)$$

Konstruktionen fortsættes nu:

1. Punktet E_2 afsættes på linjestykket AB således, at $|E_1E_2| = |E_1A|$, se figur 4.6.
2. Fra E_2 nedfældes den vinkelrette på AC (Euklid 12).
3. På linjestykket E_2F_2 afsættes punktet H_1 således, at $|H_1F_2| = |E_1F_1|$.
4. Linjestykket H_1E_1 trækkes (P1).



Figur 4.6:

Følgende kan nu observeres:

1. $F_2F_1E_1H_1$ er ifølge Al-Tusis sætning (4.2.1) et rektangel.
2. De rette vinkler i rektanglerne betyder, at punkterne H_1E_1G ligger på en ret linje.

Vi betragter nu de to retvinklede trekanter $\triangle E_2H_1E_1$ og $\triangle E_1GA$. Udover at være retvinklede har trekanterne endnu en vinkel fælles idet:

$$\angle H_1E_1E_2 = \angle GE_1A$$

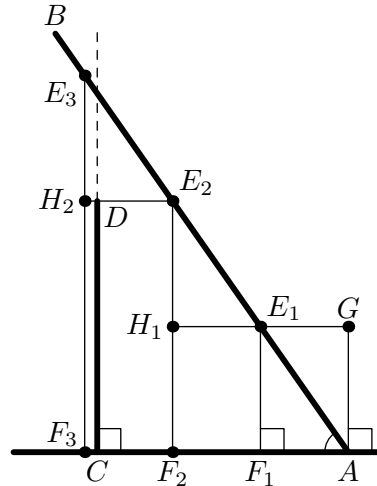
da vinklerne er topvinkler (Euklid 15). Da siderne E_2E_1 og E_1A også er lige store, vil trekanterne være kongruente (Euklid 26), som medfører:

$$|H_1E_1| = |E_1G|$$

Da $F_2F_1E_1H_1$ og F_1AGE_1 er rektangler, ses det at:

$$|F_2F_1| = |F_1A|$$

Denne proces kan nu fortsættes, og på et tidspunkt ender man med et E_n og tilhørende F_n , hvor F_n ligger til venstre for C . På figuren er $n = 3$, men n kunne egentligt være hvad som helst. Pointen er bare, at vi på et tidspunkt når ud på den anden side af C .



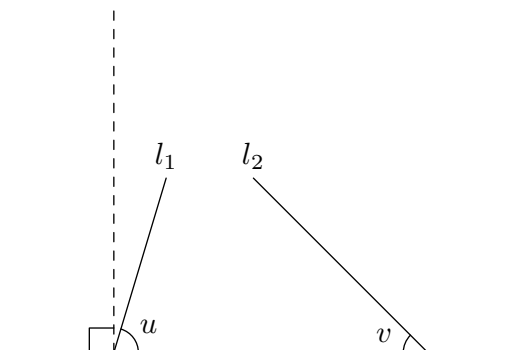
Linjestykket CD er nu indespærret i en trekant og er nødt til at skære linjestykket AE_n og dermed AB (opgave 2.9.1). Det er nu bevist, at når man forlænger linjestykkerne AB og CD , så vil de skære hinanden. Al-Tusi har nu bevist sætningen:

Sætning 4.2.2. Hvis to rette linjer skærer en tredje ret linje og danner to vinkler på samme side, hvor den ene er ret og den anden er spids, så vil de to linjer skære hinanden.

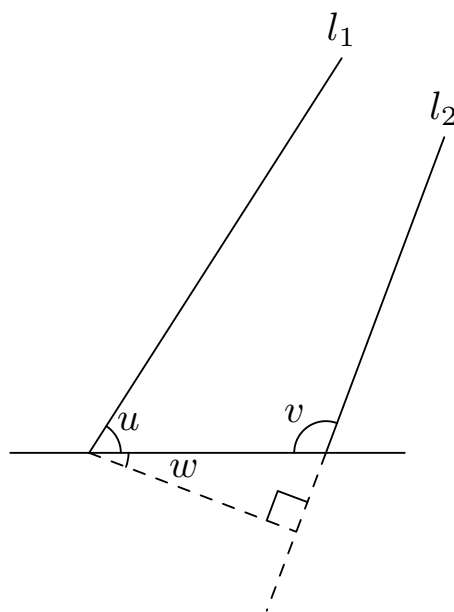
Opgave 4.2.3. Hvor i beviset bruger Al-Tusi postulatet A5?

Opgave 4.2.4. *I Al-Tusis bevis forudsættes det, at den ene vinkel er ret.

1. Hvad siger P5 om vinklerne?
2. Brug Al-Tusis resultat til at bevise, at de to linjer l_1 og l_2 på følgende figur vil skære hinanden, hvis v og u begge er spidse:



Opgave 4.2.5. *Vi lader nu den ene vinkel v være stump:



Fra den spidse vinkels spids nedfældes den vinkelrette på l_2 (Euklid 12). Antag nu, at:

$$v + u < 180^\circ$$

1. Vis, at vinkelsummen i den retvinklede trekant er:

$$S = w - v + 270^\circ$$

2. Antag nu, at $S \leq 180^\circ$ og brug dette til at vise følgende ulighed:

$$w \leq v - 90^\circ$$

3. Vis nu, at:

$$u + w < 90^\circ$$

4. Brug sætning 4.2.2 til konkludere, at l_1 og l_2 vil skære hinanden.

Vi vil senere, se at det kan bevises, at vinkelsummen i enhver trekant ikke kan overstige 180° , og at man i beviset for dette blot bruger de første fire postulater (Sætning 4.4.1). Det er derfor ikke en fejl at antage at $S \leq 180^\circ$.

Opgave 4.2.6. *Gør rede for, at opgave 4.2.4 og opgave 4.2.5 viser, at man med Al-Tusi løsning kan bevise $P5$.

Opgave 4.2.7. Vis, at *Playfairs Aksiom* medfører $P5$:

$$PA \Rightarrow P5$$

Ækvivalens til Euklid 32

Vi har set, hvordan man med Al-Tusi postulat kan bevise $P5$.

$$A5 \Rightarrow P5$$

For at bevise dette anvender Al-Tusi sætningen om, hvordan et rektangel konstrueres (sætning 4.2.1). Det kan nemt vises, at denne sætning er ækvivalent med Euklid 32 (se opgave 4.2.8).

$$\text{Sætning 4.2.1} \iff \text{Euklid 32}$$

Med Al-Tusis resultat har vi altså bevist, at Euklid 32 medfører $P5$.

$$\text{Euklid 32} \iff \text{Sætning 4.2.1} \Rightarrow P5$$

Euklid viste, at $P5$ medfører Euklid 32. Vi konkludere, at:

$$P5 \iff \text{Euklid 32}$$

som det blev påstået i afsnit 3.3.

Opgave 4.2.8. Denne opgave går ud på at bevise:

$$\text{Euklid 32} \Rightarrow \text{Al-Tusi Sætning (4.2.1)}$$

Følgende skridt kan følges:

1. Antag Euklid 32.
2. Følgende figur konstrueres så $|AA'| = |BB'|$:



Tegn diagonalen $A'B$ og gør så rede for, at de to trekanter, der fremkommer, er kongruente.

3. Vis, at t er ret.
4. Gør rede for, at sætning 4.2.1 nu er bevist ved at bruge Euklid 32.

4.3 Wallis

En anden af de personer, som forsøger bevise Euklids 5. postulat, var den Engelske matematiker John Wallis. Wallis var professor i matematik ved universitetet i Oxford og skulle bl.a. undervise i den matematik, man kendte fra de gamle grækere. Således kommer Wallis helt naturligt til at skulle forelæse om Euklids fem postulater for geometrien. Wallis havde læst Al-Tusis kommentarer til Euklid, og han var klar over, at der var et problem med det femte postulat.

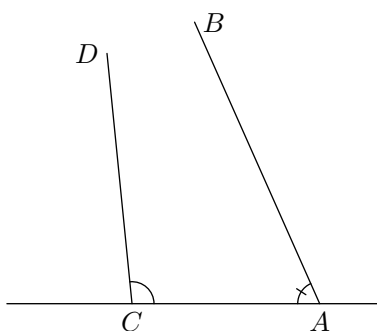


John Wallis 1616-1703.

Den matematik, vi her skal se, stammer fra en forelæsning over parallel-postulatet som Wallis holdt i Oxford 11 juli 1663.

Wallis' bevis

Vi skal nu se, hvordan Wallis forsøgte at reparere på Euklid. Wallis betragter to linjestykker AB og CD , som begge skærer et tredje linjestykke AC således, at summen af de indvendige vinkler er mindre end 180° . Wallis ønsker nu at vise at de to linjer så vil skære hinanden. Undervejs vil han kun bruge de første 4 postulater.

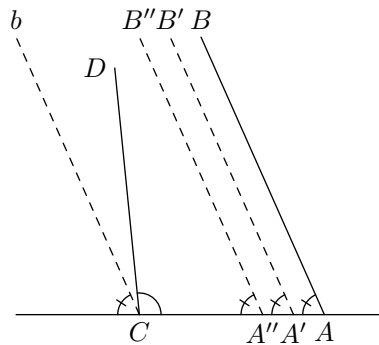


Wallis har, som Al-Tusi, drejet tegningen 90° i forhold til figur 3.1 side 25, men problemet er fuldstændigt det samme. Med betegnelserne fra figuren har Wallis altså følgende

oplysninger om vinklerne:

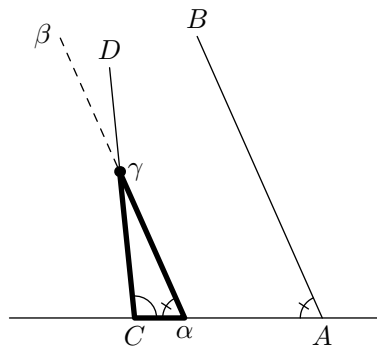
$$\angle BAC + \angle DCA < 180^\circ \quad (4.3.1)$$

Wallis flytter nu linjestykket AB langs linjen AC på en sådan måde at de hele tiden danner den samme vinkel som oprindeligt. På figuren betegner $A'B'$ således en kopi af linjestykket AB som så er flyttet et lille stykke til vestre. Dette kan Wallis gøre ved at flytte vinklen $\angle BAC$ hen til A' , som vi så i Euklid 23.

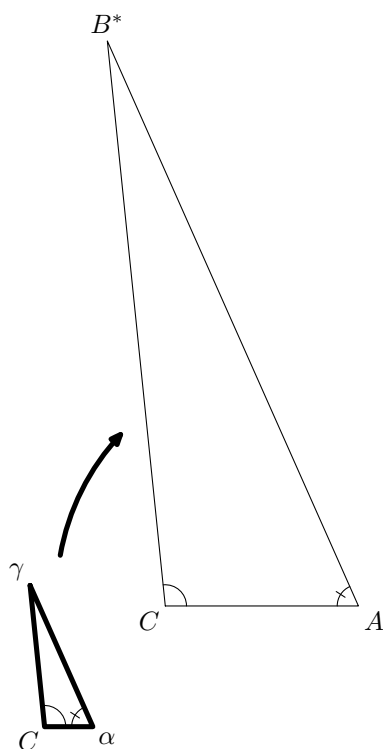


Figur 4.7: Linjestykket AB flyttes således, at det hele tiden danner samme vinkel med linjestykket AC .

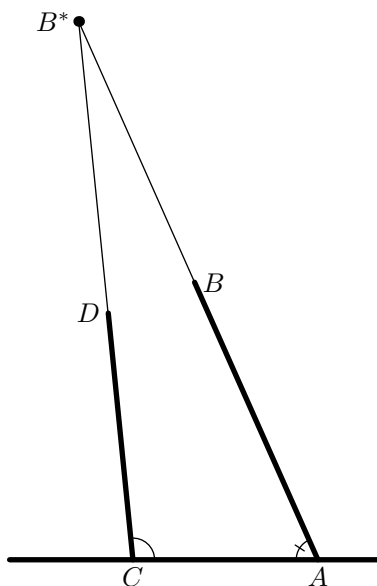
På et tidspunkt, når man flytter AB , vil kopien af punktet A falde sammen med punktet C . Da $\angle BAC$ og $\angle DCA$ tilsammen er mindre end 180° , vil $\angle DCb > 0$, som det ses på figuren. Wallis siger nu, at man ved denne proces på et tidspunkt har et linjestykke $\alpha\beta$, som skærer CD i et punkt, som vi kalder γ :



Vi står nu med en trekant $\alpha C\gamma$, hvor $\angle\alpha$ og $\angle C$ er lige så store som henholdsvis $\angle A$ og $\angle C$ på den oprindelige figur. Wallis siger nu, at det er muligt at forstørre trekanten $\alpha C\gamma$ på en sådan måde, at vinklerne i den nye forstørrede trekant, er de samme, som vinklerne i $\triangle\alpha C\gamma$, og grundlinjen i den nye forstørrede trekant er lige så lang som AC :

Figur 4.8: $\triangle \alpha C \gamma$ forstørres til $\triangle ACB^*$.

Denne nye forstørrede trekant, som betegnes $\triangle ACB^*$, kan nu placeres på vores oprindelige figur. Vi får da billedet:



og Wallis har nu vist, at de rette linjer AB og CD kan forlænges således, at de skærer hinanden i punktet B^* , hvilket er præcist, hvad $P5$ siger.

Wallis 5 Postulat

Wallis har nu udledt $P5$ ved hjælp af de første 4 postulater. Men undervejs kom Wallis til at lave en antagelse, som Euklid ikke havde formuleret. Wallis antog nemlig følgende:

W5: Det er muligt at forstørre trekanter uden at ændre på vinklerne.

Wallis erstatter $P5$ med postulatet om forstørrelse af trekanter kaldet $W5$. Wallis var godt klar over, at han brugte en antagelse, som ikke var formuleret ved Euklid, men for Wallis var $W5$ mere intuitivt end $P5$. Wallis havde vist, at hvis man har $W5$, kan man komme frem til $P5$. Det viser, sig at det også er muligt at gå den anden vej; altså at komme frem til $W5$ ved antagelse af $P5$. De to udsagn $P5$ og $W5$ er altså ækvivalente. At antage den ene er altså lige så godt som at antage den anden. (se afsnit 3.3).

Opgave 4.3.1. Giv et argument for, at $W5$ følger af $P5$. Argumenter først for at det er tilladt at bruge alle Euklids sætninger til dette.

4.4 Legendre

Den næste, vi skal se på, er den franske matematiker Adrien-Marie Legendre. Legendre var en af sin tids mest begavede matematikere. Legendre forsøgte gennem mere end 30 år at bevise Euklids femte postulat ud fra de første fire postulater. Problemet med Euklids femte postulat var blevet et rigtigt prestigeproblem, og Legendre ville virkelig cementere sin position som en af tidens førende matematikere, hvis han kunne løse det.



Legendre 1752-1833.

Legendre kom med flere bud på løsninger til problemet, men hver gang viste det sig, at der var fejl i argumentationen. Legendre skrev en lærebog i elementær geometri, som var meget inspireret af *Euklids Elementer*. En bog, som blev brugt meget i de franske skoler. I denne bog forsøger han at give et bevis for $P5$. Planen er, at angribe Euklid 32. Sætningen, der siger, at vinkelsummen i enhver trekant er 180° . Legendre ønsker at bevise Euklid 32 kun ved hjælp af $P1 - P4$ og for at gøre dette, vil han bevise de to uligheder:

$$u + v + w \leq 180^\circ \quad (4.4.1)$$

og

$$u + v + w \geq 180^\circ \quad (4.4.2)$$

hvor u , v og w er vinklerne i en trekant. Disse to resultater vil tilsammen vise, at vinkelsummen i en trekant er 180° , som er ækvivalent med $P5$.

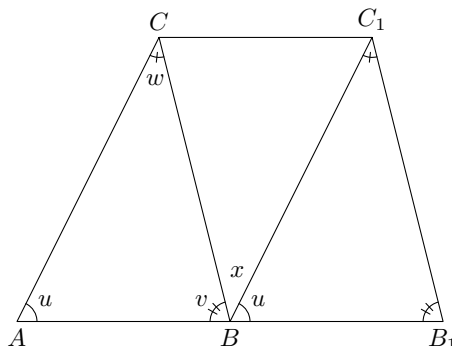
Legendres første sætning

Sætning 4.4.1 (Legendres første sætning). Om vinklerne i enhver trekant gælder:
 $u + v + w \leq 180^\circ$

Husk på, at Legendre i følgende bevis kun er interesseret i at bruge de første fire af Euklids postulater (samt de første 27 sætninger fra Euklids *Elementer*). Beviset er et modstrids-bevis. Legendre antager det modsatte af den sætning, han ønsker at bevise. Dette skal så gerne føre til noget 'sludder', hvorved sætningen vil være bevist (se 11.1).

Bevis. Antag, at der findes en trekant ABC , hvor vinkelsummen er større end 180° :

$$u + v + w > 180^\circ \quad (4.4.3)$$



Figur 4.9:

Linjestykket AB forlænges nu. $\triangle ABC$ forskydes nu langs AB s forlængelse, og trekanten BB_1C_1 dannes, som det ses på figur 4.9. Linjestykket CC_1 trækkes. Vinklerne u , v og x udgør til sammen to rette vinkler så:

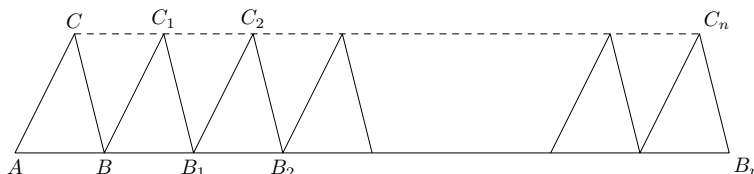
$$u + v + x = 180^\circ \quad (4.4.4)$$

Ved nu at sammenligne (4.4.3) og (4.4.4) ses det, at $w > x$.

$\triangle ABC$ og $\triangle C_1CB$ har to sider, som er parvis lige store: $|AC| = |C_1B|$ og $|BC| = |CB|$. Fra Euklid 24 ved vi nu, at:

$$|AB| > |CC_1| \quad (4.4.5)$$

Ved nu gentagne gange at forskyde trekanten ABC , kan man nu producere en hel stribe ens trekanter, som det ses på figur 4.10. Antallet af nye trekanter betegnes n .



Figur 4.10:

Legendre vil nu beregne længden fra A til B_n langs to forskellige veje. Den første vej går langs punkterne $ACC_1C_2 \dots C_nB_n$. Denne vej har længden:

$$\begin{aligned} |Ve j_1| &= |AC| + |CC_1| + |C_1C_2| + \dots + |C_{n-1}C_n| + |C_nB_n| = |AC| + n|CC_1| + |C_nB_n| \\ &= |AC| + n|CC_1| + |CB| \end{aligned}$$

Den anden vej går langs den rette linje fra A til B_n altså langs punkterne $ABB_1B_2 \dots B_n$, og den har længden:

$$|Ve j_2| = |AB| + |BB_1| + |B_1B_2| + \dots + |B_{n-1}B_n| = |AB| + n|AB| \quad (4.4.6)$$

n er antallet af ekstra trekanter, der er tilføjet. Uligheden (4.4.5) siger, at $|vej_2|$ vokser mere end $|vej_1|$ hver gang, der tilføjes en trekant (altså når n vokser). Ved nu blot at tilføje tilpas mange trekanter til tegningen, kan man sikre sig, at $|vej_2|$ er større end $|vej_1|$. Men det er noget sludder, vej_2 er nemlig den rette linje fra A til B_n og er dermed den korteste vej mellem de to punkter. Vi har nu den ønskede modstrid. $\square$

Opgave 4.4.2. Find de steder i beviset, hvor P1-P4 bruges. Bruges P5 i beviset?

Opgave 4.4.3. Fra (4.4.5) ses det, at der findes et positivt tal ε så:

$$|AB| = |CC_1| + \varepsilon$$

Hvor stor skal n være for at sikre, at $|vej_2| > |vej_1|$?

Legendres anden sætning

Vi får nu brug for at indføre et nyt begreb kaldet vinkeldefekten:

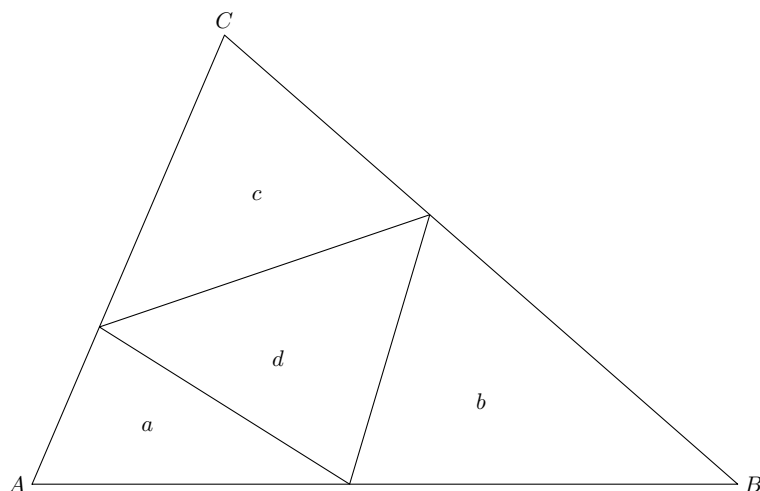
Definition 4.4.4. Vinkeldefekten δ for en trekant ABC med vinklerne u , v og w er givet ved:

$$\delta(\triangle ABC) = 180^\circ - (u + v + w) \quad (4.4.7)$$

Normalt ville man sige, at vinkeldefekten for enhver trekant er 0. Dette bygger på antagelsen om, at vinkelsummen i en trekant er 180° , og en sådan antagelse ønsker vi ikke at lave her. Husk på, at vi i 3.2 så, at en sådan antagelse var det samme som at antage P5.

Opgave 4.4.5. *Vis, at $\delta(\triangle ABC) \geq 0$ for alle trekanter ABC (Hint: Brug sætning 4.4.1).

Opgave 4.4.6. *Trekanten ABC deles op i fire mindre trekanter, som det ses på figuren.



Vis, at:

$$\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle a) + \delta(\triangle b) + \delta(\triangle c) + \delta(\triangle d) \quad (4.4.8)$$

Her betegner a , b , c og d de små trekanter.

Sætning 4.4.7 (Legendres anden sætning). Om vinklerne i enhver trekant gælder:
 $u + v + w \geq 180^\circ$

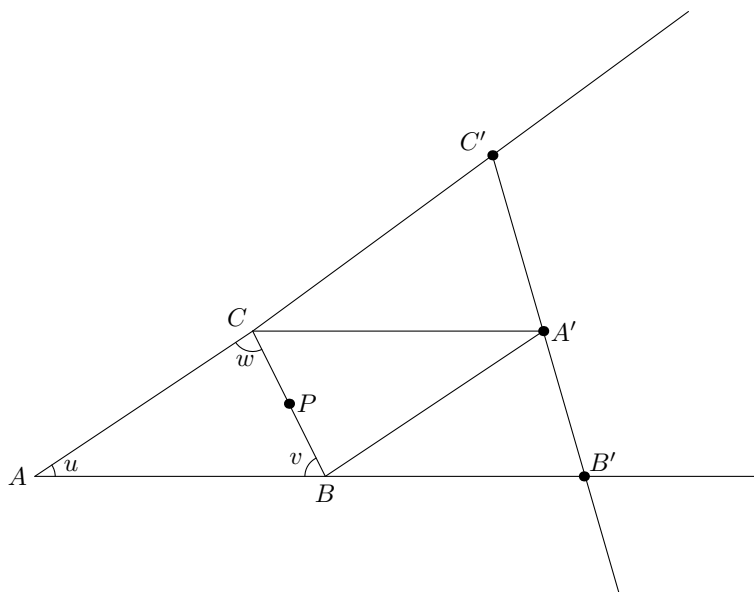
Bevis. Antag, at der findes en trekant ABC , hvor vinkelsummen er mindre end 180° . Hvis vinklerne i trekanten kaldes u , v og w gælder altså følgende:

$$u + v + w < 180^\circ \quad (4.4.9)$$

Om vinkeldefekten for denne trekant ved man altså, at:

$$\delta(\triangle ABC) = 180^\circ - (u + v + w) > 0 \quad (4.4.10)$$

Siden BC halveres i et punkt, som kaldes P . Trekanten drejes en halv omgang omkring punktet P således, at $\triangle BCA'$ dannes. Linjestykket AB og linjestykket AC forlænges. Lad nu C' være et punkt på forlængelsen af AC . Den rette linje gennem C' og A' trækkes, og skæringspunktet mellem denne og forlængelsen af AB kaldes B' :



Figur 4.11:

Da $\triangle BCA'$ er en rotation af $\triangle ABC$ har disse samme vinkeldefekt:

$$\delta(\triangle CBA') = \delta(\triangle ABC) \iff \delta(\triangle ABC) + \delta(\triangle CBA') = 2 \cdot \delta(\triangle ABC) \quad (4.4.11)$$

Om vinkeldefekten for $\triangle CA'C'$ og $\triangle BB'A'$ ved vi fra Sætning 4.4.1:

$$\delta(\triangle CA'C') \geq 0 \quad (4.4.12)$$

og

$$\delta(\triangle BB'A') \geq 0 \quad (4.4.13)$$

Legendre beregner nu vinkeldefekten for den store trekant $AB'C'$ ved hjælp af resultatet fra opgave 4.4.6:

$$\begin{aligned} \delta(\triangle AB'C') &= \delta(\triangle ABC) + \delta(\triangle CBA') + \delta(\triangle BB'A') + \delta(\triangle CA'C') \\ &= 2 \cdot \delta(\triangle ABC) + \delta(\triangle BB'A') + \delta(\triangle CA'C') \\ &\geq 2 \cdot \delta(\triangle ABC) \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Den nye trekant $\triangle AB'C'$ har altså mindst dobbelt så stor vinkeldefekt som den oprindelige trekant $\triangle ABC$. Vi kan ved samme metode producere en ny trekant, som har mindst dobbelt så stor vinkeldefekt som $\triangle AB'C'$ og altså mindst fire gange så stor vinkeldefekt som $\triangle ABC$. Ved at gentage processen mange gange kan vi producere en trekant med så stor vinkeldefekt, som vi ønsker. F.eks. vil vi gerne have en vinkeldefekt på 181° eller mere. Det kan vi få ved at gentage processen. Men ifølge definitionen kan vinkeldefekten højst være 180° . Vi har altså den ønskede modstrid. $\square$

Opgave 4.4.8. Find de steder i beviset for sætning 4.4.7, hvor Euklids fire første postulater bruges.

Legendres fejl

I beviset for Sætning 4.4.7 er Legendre, på samme måde som Euklid, meget omhyggelig med kun at bruge de ting, han har lov til, dvs. de første 4 postulater samt Euklids første 28 sætninger. Beviset virker derfor meget overbevisende. Legendre kommer dog ubevidst til at bruge et postulat, som han ikke har til rådighed. Et postulat, der er nært beslægtet med $P5$. På den måde gør Legendre det samme, som f.eks. Wallis havde gjort: han laver en ny antagelse, som kommer til at erstatte $P5$. Der er godt nok den bemærkelsesværdige forskel at Legendre, i modsætning til Wallis, ikke er klar over, at han bruger antagelsen.

Opgave 4.4.9.

1. Hvor i beviset laver Legendre en fejl?
2. Gør rede for, at det postulat, som Legendre ubevidst bruger, kan formuleres som:
L5: Igennem ethvert punkt i det indre af en vinkel går der en ret linje, som skærer begge vinklens ben.

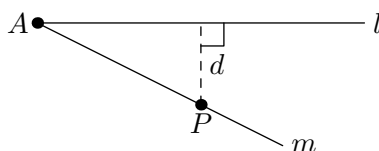
Det postulat, som Legendre fejlagtigt bruger, vil vi betegne med **L5**. I afsnit 8.3 vil det blive helt klart, hvad Legendres fejl er.

Det viser sig, at $L5$ og $P5$ er ækvivalente på samme måde, som $W5$ og $P5$ var.

4.5 Proklos

Vi skal til sidst se et noget ældre forsøg, som stammer fra den græske matematiker Proklos (411-485 e.kr.). Proklos bruger en sætning undervejs, som tidligere var blevet indført af Aristoteles:

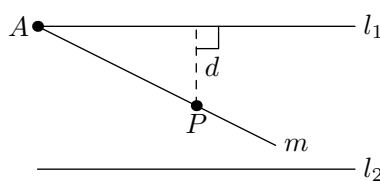
Sætning 4.5.1. *Lad l og m være to linjer som skærer hinanden i A . Afstanden fra et punkt P på m til den rette linje l kan gøres så stor, som det ønskes, ved at flytte punktet P .*



Vi beviser ikke sætning 4.5.1, men i det følgende kan vi godt gå ud fra, at sætningen er sand.

Proklos antager først følgende:

1. Lad l_1 og l_2 være parallelle linjer (se figur 4.12).
2. Lad m være en ret linje, der skærer l_1 i et punkt A .
3. Lad nu P være et punkt, som vi kan bevæge på m .



Figur 4.12:

Proklos kommer nu med følgende argumenter:

1. Afstanden fra P til l_1 kan nu gøres uendeligt stor ved at flytte punktet P .
2. Afstanden mellem l_1 og l_2 er konstant.
3. Men så vil d på et tidspunkt blive så stor, at m vil skære l_2 .
4. Vi har nu bevist følgende:

Sætning 4.5.2. *Hvis en ret linje skærer den ene af to parallelle linjer, så vil den også skære den anden af de to parallelle linjer.*

5. Sætning 4.5.2 $\Rightarrow$ P5.

Opgave 4.5.3.

- Gennemgå grundigt hvert punkt i argumentet.
- Der er et af de 5 skridt, der ikke kan gøres rede for. Hvilket?
- Formuler det postulat, som Proklos ubevidst bruger.

Kapitel 5

Aksiomsystemet

Vi har nu set flere eksempler på, hvordan matematikere gennem tiden har behandlet geometri. Vores fokus har været på problemet med parallelpotularet $P5$. I dette kapitel vil vi danne os et overblik over, hvilke ligheder og forskelle i den måde de griber problemet an på. Specielt skal vi se på den indflydelse, det kommer til at have på aksiomsystemet.

For at kunne fremstille de enkelte strategier indfører vi nu et skema over postulater og sætninger. Til venstre i skemaet står de postulater, som aksiomsystemet bygger på. Det er så markeret med pile ($\Rightarrow$), hvilke sætninger man kan bevise ved hjælp af de pågældende postulater. Det er vigtigt at bemærke, at skemaet ikke i sig selv er et bevis men blot en illustration af, hvad vi har set bevise for.

Euklid

Euklid gør i *Elementerne* meget ud af ikke at bruge det femte postulat i beviserne for de første 28 sætninger. Dette kan beskrives ved følgende skema:

$$\left. \begin{array}{l} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Euklid 1-28}$$

Skemaet skal forstås således, at man kun har de fire postulater til sin rådighed, når man skal bevise sætning 1. Når sætning 2 skal bevises, har man de første fire postulater, men nu også sætning 1 til rådighed osv. Beviset for sætning 19 kan f.eks. illustreres ved:

$$\left. \begin{array}{l} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ \text{Euklid 1-18} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Euklid 19}$$

Det er dog ikke sikkert, at alle de 18 første sætninger bruges i beviset. Det vigtige i denne sammenhæng er bare, at disse sætninger alle er til rådighed. (Faktisk brugte vi kun Euklid 5 og Euklid 18 til beviset for Euklid 19, se side 14).

Efter de første 28 sætninger var Euklid nødt til at bruge det femte postulat for at kunne komme videre:

$$\left. \begin{array}{l} P1 - P4 \\ \text{Euklid 1-28} \\ P5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Euklid 29} \Rightarrow \text{Euklid 30} \Rightarrow \dots$$

Den geometri, som bygger på Euklids fem postulater $P1 - P5$, og som består af alle Euklids sætninger, kalder man for *euklidisk geometri*.

Al-Tusi

Den arabiske matematiker Al-Tusi (afsnit 4.2) var ikke interesseret i at bruge $P5$. I stedet forsøgte han at bevise $P5$ ved hjælp af nogle andre postulater. De postulater Al-Tusi gjorde brug af, var Euklids første fire postulater $P1 - P4$ og så et nyt postulat, som vi kaldte $A5$ (se afsnit 4.2). Med disse postulater kunne Al-Tusi først bevise en hjælpe-sætning 4.2.1, og til sidst kunne han bevise $P5$:

$$\left. \begin{array}{l} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ (A5) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Al-Tusis hjælpe-sætning} \Rightarrow P5 \Rightarrow \text{alle Euklids sætninger}$$

Da Al-Tusi havde bevist $P5$, havde han etableret alle de resultater han behøvede for at komme frem til alle Euklids sætninger. I skemaet er $A5$ sat i parentes for at markere, at det er tvivlsomt, om Al-Tusi faktisk vidste at $A5$ var at regne som et postulat (se afsnit 4.2).

Al-Tusi havde som udgangspunkt godtaget Euklids første fire postulater, så han havde også de sætninger til rådighed, som kan bevises hermed. Dermed kunne han bruge Euklid 1-28 til beviset for $P5$:

$$\left. \begin{array}{l} P1 - P4 \\ \text{Euklid 1-28} \\ (A5) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Al-Tusis hjælpe-sætning} \Rightarrow P5 \Rightarrow \text{alle Euklids sætninger}$$

Wallis

Den engelske matematiker Wallis ønskede også at bevise parallelpostulatet $P5$ ved hjælp af Euklids første fire postulater (afsnit 4.3). I sine bestræbelser på at fremkomme

med et bevis brugte Wallis den viden, at enhver trekant kunne forstørres. Denne egenskab er at regne som et postulat, og vi gav det navnet $W5$ (se afsnit 4.3):

$$\left. \begin{array}{l} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ (W5) \end{array} \right\} \Rightarrow P5 \Rightarrow \text{alle Euklids sætninger}$$

På samme måde som med Al-Tusi, så kan det diskuteres, hvorvidt Wallis var bevidst om, at $W5$ nødvendigvis skal indføres som et postulat.

Legendre

Legendre var også af den overbevisning, at $P5$ var en sætning, som kunne bevises ved hjælp af Euklids første fire postulater. Som vi så i afsnit 4.4 får Legendre gennemført et bevis for Euklid 32 ved kun at bruge de fire første postulater. Det var kendt, at $P5$ er ækvivalent med Euklid 32 (se afsnit 3.3), og Legendre havde dermed bevist $P5$. Vi har dermed følgende billede af, hvad Legendre lavede:

$$\left. \begin{array}{l} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Euklid 32} \iff P5$$

Som vi også så i opgave 4.4.9 så brugte Legendre, uden selv at vide det, et ikke antaget postulat undervejs. Ovenstående skema er derfor ikke det korrekte billede af, hvad Legendre egentlig lavede, men i stedet et billede af, hvad Legendre selv troede, han lavede. Skemaet kan erstattes med følgende korrekte skema:

$$\left. \begin{array}{l} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ L5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Euklid 32} \iff P5$$

Her er $L5$ det postulat, som Legendre bruger uden selv at være klar over det (se afsnit 4.4). Det lykkes dog Legendre at bevise, at vinkelsummen i en trekant er mindre end eller lig med 180° . Det resultat, som vi kaldte Legendres første sætning (4.4.1). Dette resultat hører sammen med Euklids første 28 sætninger forstået på den måde, at alle disse kan bevises ved hjælp af de første 4 postulater:

$$\left. \begin{array}{l} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Euklid 1-28} \\ \text{Legendres første sætning} \end{array} \right.$$

Saccheri

Et af de meget begavede forsøg på at løse problemet med paralleelpostulatet kom fra den Italienske matematiker Gerolamo Saccheri (1667-1733). Vi vil ikke gå i detaljer med Saccheris behandling af problemet, men blot bruge et skema, af den type vi lige har indført, til at danne os et billede af, hvad denne Italiener lavede.

Saccheri havde samme mål som Legendre, nemlig at reducere $P5$ til en sætning. Fremgangsmåden var at antage det modsatte af $P5$, som vi kalder $\text{non-}P5$ og så bevise, at dette vil føre til en modstrid (se eventuelt afsnit 11.1 om modstrids beviser):

$$\left. \begin{array}{l} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ \text{non-}P5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{mystiske sætninger} \Rightarrow \text{modstrid}$$

Med dette omvendte postulat $\text{non-}P5$ (samt $P1 - P4$) kunne Saccheri bevise en række *mystiske sætninger*, som var forskellige fra de sætninger, man kender fra Euklidisk geometri. Efter meget slid kunne han så til sidst konkludere, at sætningerne ville føre til en modstrid. Da $\text{non-}P5$ ville forårsage en modstrid, kunne Saccheri slutte, at alternativet, nemlig $P5$, var den eneste mulighed. Dermed var $P5$ bevist ved hjælp af Euklids første fire postulater.

Det viste sig senere, at Saccheri havde begået samme fejl, som de mange forgængere. For at etablere modstriden kom han, i de sidste argumenter, til at bruge noget, som han ikke havde postuleret eller gjort rede for. Beviset måtte derfor forkastes. De besynderlige sætninger kunne simpelthen ikke føre til en modstrid.

Opgave 5.0.4. Lav et skema over de postulater og sætninger, som Proklos gør brug af. (Denne opgave er en fortsættelse af opgave 4.5.3)

Flere ækvivalenser til $P5$

Som set i afsnit 3.3 så findes der postulater, som kan erstatte $P5$ uden at ændre på det endelige geometriske resultat. Vi siger, at sådan et postulat og $P5$ er ækvivalente. I afsnit 3.3 var der to eksempler; *Playfairs Aksiom* (PA) og Euklid 32. Faktisk findes der en lang række andre ækvivalenser til $P5$. Vi har set en række eksempler på postulater ($A5$, $W5$, $L5$ osv.), som af forskellige matematikere blev benyttet i stedet for $P5$. Alle disse postulater er faktisk ækvivalente med $P5$ og indbyrdes ækvivalente med hinanden. I følgende skema er dette beskrevet ved at lade $X5$ repræsentere et hvilket som

helst af disse femte-postulater:

$$\left. \begin{array}{l} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ X5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{de andre femte-postulater} \Rightarrow \text{alle Euklids sætninger}$$

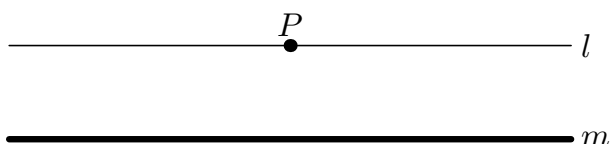
De skemaer vi her har set, er altså temmelig ens. Den eneste, der adskiller sig fra de andre, er Euklids, idet han var helt bevidst om, at $P5$ var nødvendigt. Men havde Euklid ret, når han valgte at tage $P5$ med? eller vil det virkelig vise sig, at $P5$ kan bevises med de første fire postulater? Jeg vil lade spørgsmålet hænge lidt i luften men lover, at vi vil vende tilbage til det i afsnit 8.7.

Geometrien, som bygger på postulaterne $P1 - P4$, og et af de femte postulater kalder man *euklidisk geometri*. Den geometri, som kun bygger på $P1-P4$, kalder man for *absolut geometri*.

Kapitel 6

En anden geometri

I afsnit 3.2 lærte vi, at $P5$ er tæt knyttet til begrebet parallelitet. Det viste sig, at $P5$ var ækvivalent med det postulat, som kaldes Playfairs Aksiom. Det siger, at der gennem et givet punkt findes præcis én ret linje, som er parallelt til, en fra starten, given ret linje:

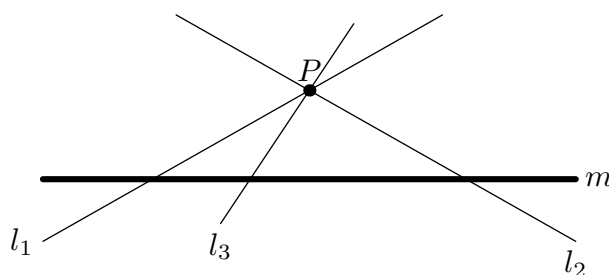


Figur 6.1: PA : Der findes præcis én parallel til m igennem P .

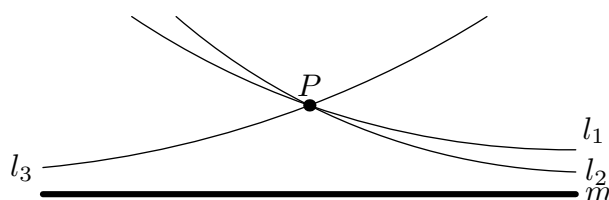
For at forstå, hvad PA siger, så kan det være en ide at undersøge, hvilke alternativer der er til PA . Derfor forestiller vi os nu en ret linje m og et punkt P , som ikke ligger på m . Vi ønsker at undersøge, hvor mange rette linjer, der findes, som går gennem P og som samtidig er parallelle med m . Der er tre muligheder for udfaldet af vores undersøgelser:

- α . Der findes ingen paralleller til m , som går igennem P .
- β . Der findes præcis én parallel til m , som går igennem P (PA).
- γ . Der findes flere paralleller til m , som går igennem P .

Man havde i ca. 2000 år forsøgt at forkaste mulighed α og mulighed γ , hvorved man ville stå tilbage med muligheden β , som er den euklidiske geometri.



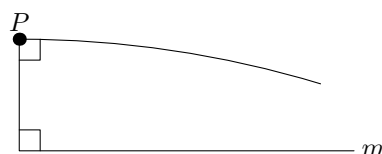
Figur 6.2: Tilfælde α . Ingen parallelle linjer til m gennem P .



Figur 6.3: Tilfælde γ . Mange parallelle linjer til m gennem P .

En nødvendig konsekvens af tilfældet α er, at alle rette linjer gennem P vil skære m , og denne egenskab, kunne man bevise, ville føre til en selvmodsigelse. α kunne man derfor godt forkaste (se opgave 6.0.5).

Opgave 6.0.5. *Brug Legendres første sætning (4.4.1) og figur 6.4 til at forkaste tilfældet α . Gør også rede for, hvilke af Euklids sætninger, der skal bruges til at konstruere de rette vinkler.



Figur 6.4:

Tilfældet α kunne man altså forkaste. Anderledes så det ud med tilfældet γ . Man kunne simpelthen ikke bevise, at γ ville føre til en modstrid. Dette kunne betyde to ting: enten var man ikke god nok til at lave beviser, eller også var det ikke muligt at forkaste tilfældet γ . I 2000 år havde man været helt overbevist om, at det var, fordi man ikke var god nok. Man var sikker på, at γ ville føre til en selvmodsigelse. Det var bare et spørgsmål om at finde et bevis for det. Man kan godt forstå, at matematikerne havde svært ved at acceptere tilfældet γ , hvor der findes mange linjer gennem P , som er parallelle med m . En sådan egenskab ville ikke passe med vores intuitive forståelse af geometri. For at komme væk fra den indgroede opfattelse af geometri skal vi i de følgende afsnit arbejde med en helt anden type geometri med et andet aksiomsystem og nogle helt andre sætninger.

6.1 Sfærisk Geometri

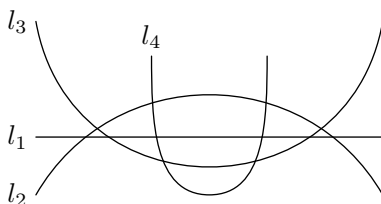
Lad os prøve at udforske en anden type geometri, som umiddelbart kan virke temmelig skør. I denne geometri skal der bl.a. gælde at:

- Gennem to punkter kan man trække en ret linje.
- Alle rette linjer skærer hinanden i præcist to punkter.

Man kan nu observere et par besynderlige egenskaber ved denne anderledes geometri:

- Der findes ingen parallelle linjer.
- Der findes to-kanter.

Det kan umiddelbart lyde som en helt tåbelig ide, og hvis man prøver at tegne det, bliver man nødt til at gå på kompromis med den måde, man sædvanligvis har tegnet geometri på. For at sikre sig, at de rette linjer vil skære hinanden to gange, bliver man nødt til at forestille sig, at rette linjer kan bøje:



Figuren skal således forestille fire rette linjer, som er tegnet på en sådan måde, at de hver især skærer hver af de andre rette linjer i to punkter. Et af de krav, vi havde til geometri, var, at geometrien skulle være et billede af virkeligheden. Man vil nu ved første øjekast typisk mene, at denne geometri ligger meget langt fra virkeligheden. Men det er ikke rigtigt. Den geometri, vi lige har forsøgt at tegne, er faktisk temmelig virkelig. Faktisk bevæger vi os hver dag rundt på en sådan geometri! Vi skal nu lave geometri på overfladen af en kugle som f.eks. Jorden. Vi skal altså trække rette linjer og tegne trekanter på en kugles overflade. Kuglens overflade skal altså spille samme rolle, som det flade stykke papir gør i den sædvanlige Euklidiske-geometri.

Euklids fem postulater vil ikke kunne bruges som udgangspunkt for geometri på kugleoverfladen. Dette betyder dog ikke, at man ikke kan lave geometri på kuglefladen. Man har bare brug for andre postulater og dermed et andet aksiomsystem. Aksiomsystemet for kuglen kunne ligne det, der er beskrevet i starten af afsnittet.

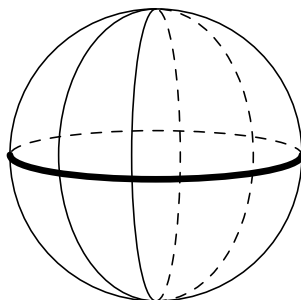
Hvad er så en ret linje på en kugle? Vi husker Euklids definition af en ret linje:

E4: En **ret linje** er en linje, som ligger *lige* mellem punkterne på den.

Det er ret svært at forstå, hvad Euklid mener med denne definition, og når vi skal til at lave geometri på kuglen, har vi brug for en definition, vi kan forstå:

Definition 6.1.1. En ret linje igennem to punkter er den korteste vej mellem punkterne.

På kuglen er den rette linje altså den korteste vej fra et punkt A til et punkt B . Denne vej skal være på kugleskallen. Det er ikke tilladt at grave tunneler igennem kuglen. Den korteste vej fra A til B vil nu være langs en *ækvatorlinje*, også kaldet en *storcirkel*. Det er de cirkler, der fremkommer, når kuglen skæres af et plan, som samtidig går gennem kuglens centrum.



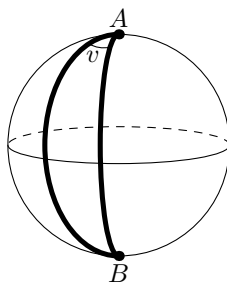
Figur 6.5: Eksempler på storcirkler: Hver storcirkel skærer hver af de andre storcirkler i præcist to punkter.

Alle storcirklerne har samme radius som kuglen. Vores rette linjer er altså storcirkler. To storcirkler vil altid skære hinanden i præcist to punkter, og de to skæringspunkter vil ligge diametralt modsat hinanden.

Opgave 6.1.2. De postulater, som er opstillet i starten af dette afsnit, er ikke nok til at beskrive kuglens geometri. Overvej hvilke postulater, der eventuelt kan tilføjes listen?

6.2 To-kanter

To rette linjer på en kugles overflade skærer hinanden i to punkter A og B dannende en figur, som har et areal. Figuren, som minder om skallen fra et stykke vandmelon, har to sider og har derfor fået navnet *to-kant*.



Figur 6.6: En sfærisk to-kant.

De to sider i to-kanten danner to vinkler med hinanden. En vinkel ved hver skæringspunkt. På figur 6.6 er den ene vinkel markeret og betegnet med ν . De to vinkler er ens og svarer til vinklen mellem de planer, som storcirklerne ligger i.

To-kantens areal udgør en brøkdel af kuglens samlede overfladeareal. Denne brøkdel er den samme, som den brøkdel v udgør af en helt omgang ved punktet A , dvs. $\frac{v}{360^\circ}$. Vi har derfor følgende udtryk for arealet af en to-kant:

$$\text{Areal} = \frac{v}{360^\circ} \cdot K \quad (6.2.1)$$

her er K kuglens samlede overfladeareal.

Opgave 6.2.1. Overvej hvordan vinklen v mellem to storcirkler måles, hvis man står på overfladen af kuglen?

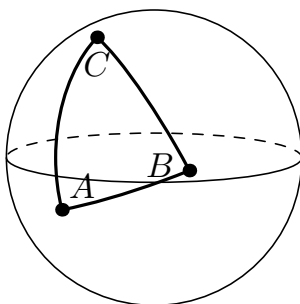
Bemærkning 6.2.2. Kuglens overfladeareal K kan beregnes, hvis radius r kendes som:

$$K = 4\pi r^2$$

I denne her sammenhæng, er det bare ikke så interessant hvad kuglens areal præcist er. Kuglens areal vil vi fremover bare betegne med K .

6.3 Den sfæriske trekant

Tre punkter A , B og C , udspænder en trekant på kuglefladen som man kalder en sfærisk trekant. Hver side i den sfæriske trekant er en del af en storcirkel.



Figur 6.7: Den sfæriske trekant ABC . Arealet af $\triangle ABC$ betegnes T .

Vi vil nu udnytte formelen for arealet af en to-kant (6.2.1) til at bestemme arealet af en sfærisk trekant. Vi betegner arealet af trekanten ABC med T .

Hvis man betragter vinklen A ses det, at denne udspænder en to-kant. Arealet af denne to-kant kalder vi for x , og det kan beregnes ved formel 6.2.1, hvorved vi får:

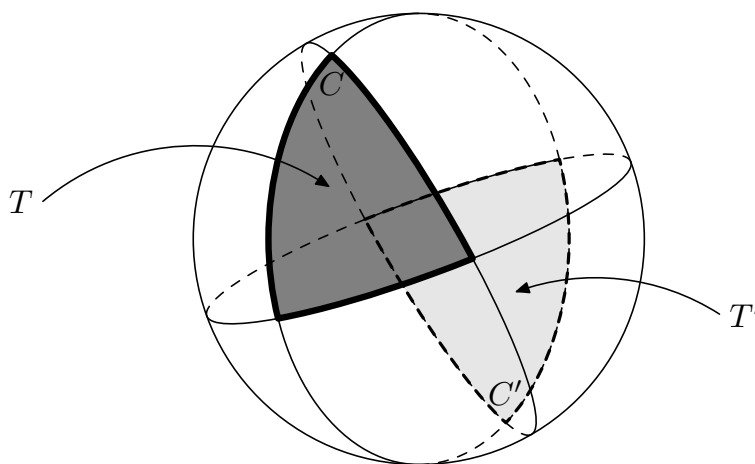
$$x = \frac{A}{360^\circ} \cdot K \quad (6.3.1)$$

hvor K er kuglens overflade. Tilsvarende udspænder vinklerne B og C hver en to-kant, som har arealerne y og z :

$$y = \frac{B}{360^\circ} \cdot K \quad (6.3.2)$$

$$z = \frac{C}{360^\circ} \cdot K \quad (6.3.3)$$

De to storcirkler, som skærer i punktet C skærer hinanden på den anden side af kuglen i punktet, som vi kalder C' (se figur 6.8). De to storcirkler med den mellemliggende vinkel C udspænder endnu en to-kant med areal z , som ligger symmetrisk på den anden side af kuglen. Tilsvarende får man også to punkter A' og B' , som også ligger på den modsatte side af kuglen. Punkterne A' , B' og C' danner en trekant, hvis areal vi betegner T' .

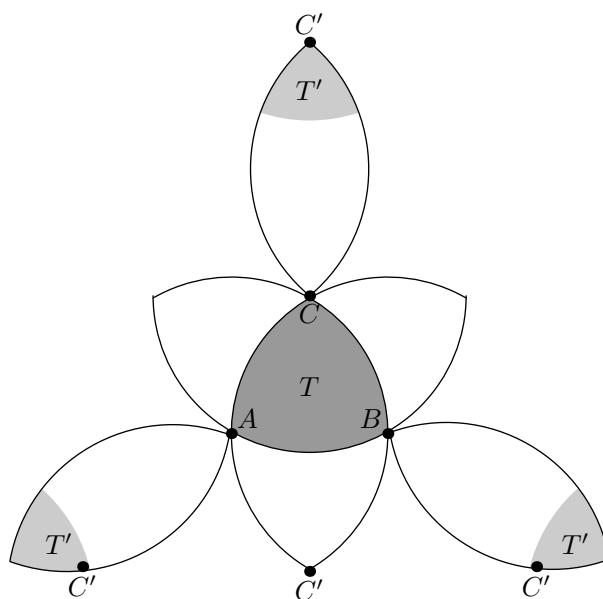


Figur 6.8:

Vi har nu gjort følgende observationer:

- To-kanterne overlapper i trekanten ABC med areal T .
- To-kanterne har hver en symmetrisk to-kant på den anden side af kuglen.
- De symmetriske to-kanter overlapper i trekanten $A'B'C'$ med areal T' .
- Trekanterne ABC og $A'B'C'$ er kongruente og har derfor samme areal: $T = T'$

Hvis man skærer kugleskallen op efter to-kanterne og folder den ud, får man følgende figur:



Trekanten $A'B'C'$ er dog medtaget tre gange og punktet C' optræder fire gange. Hvis figuren foldes sammen, vil de fire C' 'er falde sammen og tilsvarende med trekanten T' .

Man kan nu se, at de ialt 6 to-kanter tilsammen dækker hele kuglens overflade. Dog vil arealerne overlape i de områder, hvor trekanten ligger. Her vil overdækningen ligge i tre lag. De seks to-kanter har altså tilsammen samme areal som hele kuglen og fire ekstra trekanten. Dette giver følgende ligning:

$$2x + 2y + 2z = K + 2T + 2T' = K + 4T \quad (6.3.4)$$

Indsættes nu de resultater, som vi fandt for arealet af to-kanterne får man:

$$\begin{aligned}
 & 2x + 2y + 2z = K + 4T \\
 \Leftrightarrow & 2 \frac{A}{360^\circ} \cdot K + 2 \frac{B}{360^\circ} \cdot K + 2 \frac{C}{360^\circ} \cdot K = K + 4T \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{A}{180^\circ} + \frac{B}{180^\circ} + \frac{C}{180^\circ} \right) K = K + 4T \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{A+B+C}{180^\circ} \right) K - K = 4T \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{A+B+C}{180^\circ} - 1 \right) K = 4T \\
 \Leftrightarrow & T = \frac{K}{4} \left(\frac{A+B+C-180^\circ}{180^\circ} \right)
 \end{aligned}$$

Vi har altså fundet et udtryk for arealet af en sfærisk trekant:

Sætning 6.3.1. Arealet af en sfærisk trekant er bestemt ved:

$$T = \frac{K}{4} \left(\frac{A + B + C - 180^\circ}{180^\circ} \right)$$

hvor K er kuglens overfladeareal.

Bemærk at arealet af den sfæriske trekant kun afhænger af de tre vinkler A , B og C samt kuglens overflade areal K . Det er altså ikke nødvendigt at kende længden af en af trekantens sider for at finde arealet. Arealet af en sfærisk trekant må nødvendigvis være positivt. Af sætning 6.3.1 kan det så konkluderes, at vinkelsummen i en sfærisk trekant må være større end 180° .

Sætning 6.3.2. For vinklerne i enhver sfærisk trekant gælder:

$$A + B + C > 180^\circ$$

Opgave 6.3.3. Det oplyses, at jordens radius er 6378 km , og at Danmark (uden Grønland og Færøerne) har arealet 43.094 km^2 . Beregn vinkelsummen i en trekant, som har samme areal som Danmark.

Opgave 6.3.4. Det oplyses, at Grønlands areal er $2.176.000 \text{ km}^2$. Beregn vinkelsummen i en trekant, som har samme areal som Grønland.

Opgave 6.3.5. Overvej om der på en kugleflade findes trekanter med forskellige størrelse men med vinkler, som er parvis lige store? (Hint: Brug sætning 6.3.1).

Opgave 6.3.6. Kan $P5$ formuleres for rette linjer på en kugle? Vil $P5$ her være et postulat, en sætning eller uden mening?

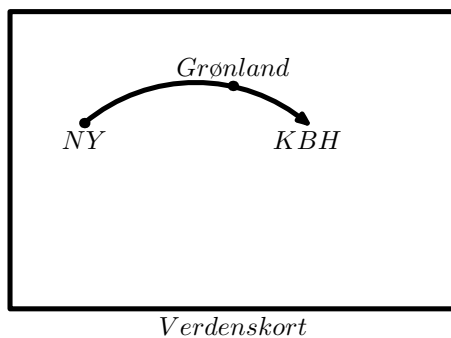
6.4 Den sfæriske geometri accepteres

Det, der først virkede som en helt skør idé (alle rette linjer skærer hinanden to gange og at der derfor ingen parallelle linjer findes) har vi nu ikke noget problem med at acceptere. Vi accepterer denne geometri, som bygger på nogle besynderlige postulater af den grund, at vi kan forstå den som den geometri, der gælder for overfladen af en kugle. Vi siger, at kuglefladen er en model af den geometri, som de besynderlige postulater danner, og vi kalder geometrien for *sfærisk geometri*.

Vi har nu set eksempler på to ret forskellige geometrier: den *euklidiske geometri* og den *sfæriske geometri*. Vi accepterer disse geometrier, fordi vi kan tegne dem (lave modeller af dem). Den *euklidiske geometri* kan vi tegne på et uendeligt stort stykke fladt papir, og den *sfæriske geometri* kan vi tegne på overfladen af en kugle.

6.5 Atlas

Et andet billede af den sfæriske geometri er et atlas eller et landkort. Man kan forstille sig jordkloden i form af en globus med tilhørende verdenskort. Rette linjer på globusen er storcirkler, som på landkortet vil fremstå som nogle buede linjestykker. Den korteste vej fra New York til København går således langs en bue op over Grønland.



Figur 6.9: Den rette linje fra New York til København går over Grønland.

Hvis man ikke tror på, at den omtalte rette linje går over Grønland, så kan man trække en snor på overfladen af en globus.

Landkortet, som godt nok ser temmelig fladt og euklidisk ud, er altså også en model af den sfæriske geometri, og rette linjer på landkortet vil i de fleste tilfælde være buede. Vi vil ikke undersøge denne landkort-geometri nærmere, men blot se den som et eksempel på en model, hvor rette linjer ikke nødvendigvis er noget, der tegnes med en linjal.

Kapitel 7

Ikke-euklidisk geometri

7.1 Lobatjevskij

Vores historie tager nu et langt geografisk hop til en af de alleryderste egne af Europa; Kazan i Rusland. På universitet i Kazan var Nicolaus Lobatjevskij ansat som professor i matematik. Lobatjevskij var interesseret i geometriens grundlag og kom således helt naturligt til at stifte bekendtskab med problemerne vedrørende Euklids femte postulat.



Nicolaus Lobatjevskij 1792-1856

Det er ikke kun geografisk, vi tager et langt hop, men også tidsmæssigt. Vi springer til året 1823, hvor Lobatjevskij første gang skriver om geometriens grundlag. Det var kun nogle få år efter, Legendre var kommet med sit forsøg på at rede Euklid (det sidste forsøg fra Legendre udkom i 1813¹). Alligevel tilhører Lobatjevskij en ny tid og en ny generation af matematikere, og i den henseende er vores hop langt. Flere steder i Europa har man på den politiske scene oplevet revolutioner, og også inden for videnskaben bliver det tilladt at gå nye veje og at tænke tanker, der hidtidigt ikke havde været mulige. Det sker også inden for matematikken og i forbindelse med geometriens

¹[11] side 865.

grundlag. En af de første, der virkelig begyndte at rykke ved geometriens grundlag, var denne russiske professor. Lobatjevskij ville undersøge $P5$ ved at undersøge det ækvivalente udsagn om vinkelsummen i en trekant (Euklid 32). Herved håbede han, som så mange andre før ham havde håbet, at pletten på Euklid kunne vaskes ren. Men efter et stykke tid gik det op for Lobatjevskij, at man kunne og skulle gå helt ny veje for at komme til forståelse af dette gamle problem. Nye veje, som skulle komme til at ændre hele vores opfattelse af geometri.

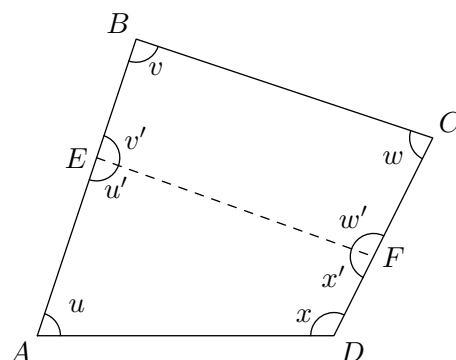
7.2 Vinkeldefekt

Vi får nu brug for at udvide begrebet *vinkeldefekt*, som vi brugte i afsnit 4.4, til også at omhandle firkanter. Vinkeldefekten defineres igen som forskellen mellem den euklidiske vinkelsum (360°) og den målte vinkelsum.

Definition 7.2.1. Vinkeldefekten δ for en firkant $ABCD$ med vinklerne u , v , w og x defineres som:

$$\delta(\square ABCD) = 360^\circ - (u + v + w + x)$$

Sætning 7.2.2. Hvis en firkant $ABCD$ deles i to firkanter $AEFD$ og $EBCF$



gælder der om vinkeldefekten:

$$\delta(\square ABCD) = \delta(\square AEFD) + \delta(\square EBCF)$$

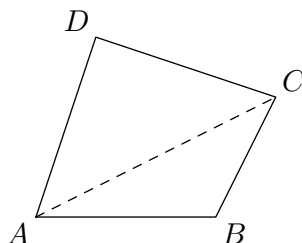
Bevis. Vi prøver at regne på det udtryk, der står på højre side af lighedstegnet:

$$\begin{aligned} \delta(\square AEFD) + \delta(\square EBCF) &= 360^\circ - (u + u' + x' + x) + 360^\circ - (v' + v + w + w') \\ &= 720^\circ - (u' + v') - (x' + w') - (u + v + w + x) \\ &= 720^\circ - 180^\circ - 180^\circ - (u + v + w + x) \\ &= 360^\circ - (u + v + w + x) \\ &= \delta(\square ABCD) \end{aligned}$$

hvilket netop var det, vi skulle vise. □

Tilsvarende kan man vise følgende to sætninger:

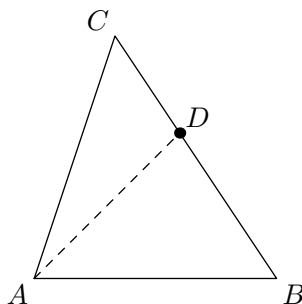
Sætning 7.2.3. Hvis en firkant $ABCD$ deles i to trekanter ABC og CDA :



gælder der om vinkeldefekterne:

$$\delta(\square ABCD) = \delta(\triangle ABC) + \delta(\triangle CDA)$$

Sætning 7.2.4. Hvis en trekant ABC deles i to trekanter, gennem et punkt D på en af siderne:



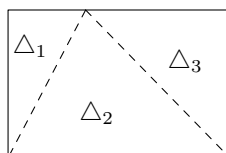
gælder der om vinkeldefekterne:

$$\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ABD) + \delta(\triangle ADC)$$

Opgave 7.2.5. *Vis sætning 7.2.3 og sætning 7.2.4.

Observation 7.2.6. I alle de tilfælde, vi har set på, viste det sig, at vinkeldefekten af en figur, som opdeles, vil være lig med summen af vinkeldefekterne for de involverede figurer. Det kan bevises, at dette altid vil gælde.

Observation 7.2.7. F.eks: Hvis en firkant opdeles i tre trekanter:



Så har vi set, at følgende gælder:

$$\delta(\triangle_1) + \delta(\triangle_2) + \delta(\triangle_3) = \delta(\square)$$

Fra opgave 4.4.5 ved vi, at $\delta(\triangle_1)$, $\delta(\triangle_2)$ og $\delta(\triangle_3)$ ikke kan være negative. Hvis vi nu får at vide, at $\delta(\square) = 0$ kan vi konkludere, at:

$$\delta(\triangle_1) = \delta(\triangle_2) = \delta(\triangle_3) = 0$$

Hvis en figur har $\delta = 0$ og denne opdeles i nogle mindre figurer, så vil disse også have $\delta = 0$.

7.3 To muligheder

Vi fortsætter nu med at se på den matematik, som Lobatjevskij lavede. Lobatjevskij skrev første gang om emnet i 1823, men det, vi skal se på, stammer fra et skrift, som blev udgivet på tysk i 1840 med titlen *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*. (En del af værket er oversat til dansk [7]). Som det første gør Lobatjevskij opmærksom på, at der efter hans mening er en række mangler ved geometrien, bl.a. vedrørende P5:

Til manglerne regner jeg ... det vigtige hul i parallelteorien, som det trods alle matematikernes anstrengelser ikke er lykkedes at udfylde indtil nu ... ([7] side 1)

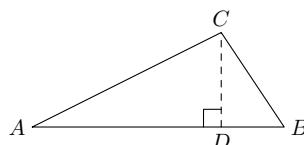
Lobatjevskij antyder altså, at han nu som den første er i stand til at forklare problemerne med Euklids femte postulat. Efter indledningen opstiller Lobatjevskij definitioner og sætninger på samme måde, som Euklid havde gjort i *Elementerne*. Vi vil starte med at se på den 20. af disse sætninger:

Sætning 7.3.1 (Lobatjevskij 20). *Hvis vinkelsummen i én trekant er lig med 180° , så er det også tilfældet i enhver anden trekant.*

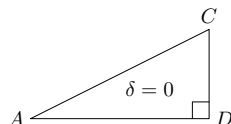
Lobatjevskij 20 siger, at hvis der bare findes én trekant, hvor vinkelsummen er 180° , så vil dette være tilfældet for alle trekanter. Men det betyder samtidig, at hvis vinkelsummen i bare én trekant er mindre end 180° , så vil dette være tilfældet for alle andre trekanter. (Vinkelsummen i en trekant kan ikke være større end 180° ifølge Legendres 1 sætning 4.4.1)

Bevis. Lobatjevskijs bevis for sætning 7.3.1 går efter følgende skridt:

1. Vi antager, at vi har en trekant ABC hvor vinkelsummen er 180° , dvs $\delta(\triangle ABC) = 0$.
2. Mindst et af trekantens hjørner kan projiceres ned på modstående side til punktet D således, at trekanten deles i to retvinklede trekanter:

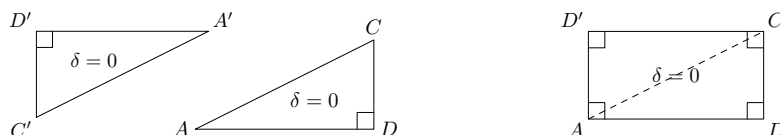


3. Da $\delta(\triangle ABC) = 0$, ved vi (fra observation 7.2.7) at $\delta(\triangle ADC) = 0$ og $\delta(\triangle DCB) = 0$.
4. Vi har nu fundet en retvinklet trekant (vi tager $\triangle ADC$), hvor vinkeldefekten er nul.



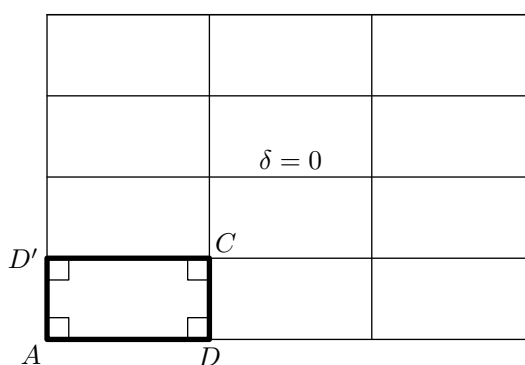
Da $\angle D = 90^\circ$ ser vi at $\angle A + \angle C = 90^\circ$.

5. Vi kan nu tage en kopi af $\triangle ADC$, som vi kalder $\triangle A'D'C'$, dreje den og sætte den sammen med $\triangle ADC$:



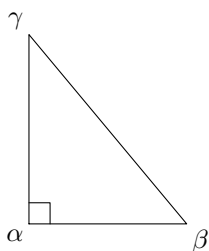
Da $\angle A + \angle C' = 90^\circ$ og $\angle A' + \angle C = 90^\circ$, får vi et rektangel (dvs. en firkant hvor vinklerne er rette).

6. Vi kan nu tage en helt masse kopier af rektanglet $ADCD'$. Hvis vi sætter to af disse sammen, får vi et nyt rektangel, og vi ved, at vinkeldefekten for det nye rektangel også er nul (sætning 7.2.2). Vi kan nu sætte en masse af disse sammen, så vi får et stort rektangel opdelt i mange små rektangler. For det store rektangel ved vi, at vinkeldefekten også må være nul (igen sætning 7.2.2):



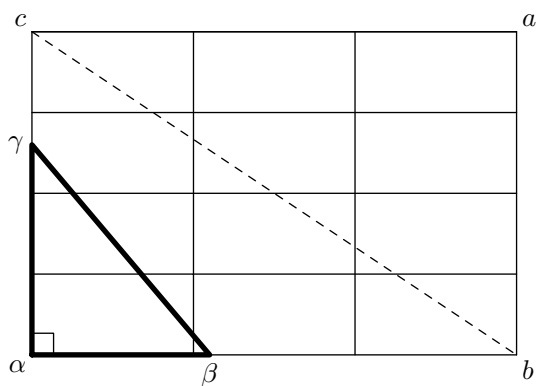
Hjørnerne passer sammen idet vi ved at alle vinklerne er rette. På figuren har vi valgt 3×4 rektangler, men vi kan, uden at skulle ændre noget, vælge endnu flere. Pointen er, at vi kan lave så stort et rektangel, som vi ønsker, og hvor vinkeldefekten stadig er nul.

7. Vi tager nu en vilkårlig retvinklet trekant $\alpha\beta\gamma$:



Det eneste, vi ved om $\triangle\alpha\beta\gamma$ er, at den er retvinklet. Vi ved ikke noget om vinkeldefekten $\delta(\alpha\beta\gamma)$. Vi vil nu bestemme $\delta(\alpha\beta\gamma)$:

8. Vi tager nu det store rektangel, som vi lavede i punkt 6 og laver det så stort, at $\triangle\alpha\beta\gamma$ kan være inden i rektanglet og α ligger i det ene af rektanglets hjørner. De øvrige hjørner kalder vi a , b og c :

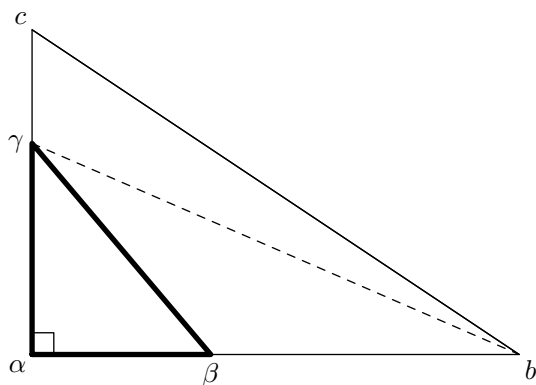


Rektanglet kan nu inddeles i to trekanter $\triangle\alpha cb$ og $\triangle abc$. Vi ved, at $\delta(\square\alpha bac) = 0$ og derfor at:

$$\delta(\triangle abc) = 0$$

igen ved at bruge observation 7.2.7.

9. $\triangle\alpha bc$ kan nu inddeles i tre trekanter ved at trække linjestykket γb :



Da $\delta(\triangle\alpha bc) = 0$ får vi at:

$$\delta(\triangle\alpha\beta\gamma) = 0$$

Vi har altså vist, at vinkeldefekten for den vilkårlig retvinklede trekant $\triangle\alpha\beta\gamma$ er nul, og dermed at vinkeldefekten for alle retvinklede trekanter er nul.

10. Alle trekanter kan opdeles i to retvinklede trekanter. Det betyder, at vinkeldefekten er nul for alle trekanter og dermed, at vinkelsummen i alle trekanter er 180° . Hvilket var det, vi skulle bevise.

□

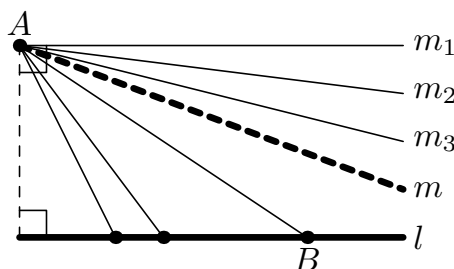
Man kan forestille sig, at sætning 20 er et resultat af Lobatjevskijs forsøg på at reducere $P5$ til en sætning i stedet for et postulat. Fremgangsmåden minder meget om det, vi har set Legendre lave. Hvis Lobatjevskij kunne udelukke den mulighed, at alle trekanter har en vinkelsum, som er mindre end 180° , så ville målet være opnået.

7.4 L-Parallelitet

Lobatjevskijs definition af parallelitet adskiller sig fra den definition, Euklid gav i *Elementerne*. For at kunne forstå Lobatjevskijs definition skal vi først lave nogle simple overvejelser:

Lad der være givet en linje l og et punkt A , som ikke ligger på l . Vi ser så på de linjer, som udgår fra punktet A . Vi vil skelne mellem, hvorvidt disse linjer *skærer* eller *ikke skærer* linjen l . Vi observerer følgende:

1. Vi udvælger et punkt B på l (se figur 7.1) og trækker linjestykket AB ($P1$). Der findes altså rette linjer gennem A , som *skærer* linjen l .
2. Vi nedfælder den vinkelrette fra A på l (Euklid 12), og efterfølgende oprejser vi den vinkelrette i punktet A (Euklid 11). Denne linje vil nu *ikke skære* linjen l (Euklid 28), idet de indvendige vinkler tilsammen er: $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Der findes derfor mindst én ret linje gennem A , som ikke skærer l .

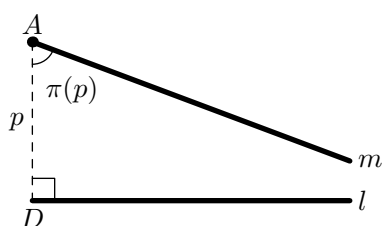


Figur 7.1:

Der findes altså rette linjer gennem A som skærer l og mindst én linje gennem A , som ikke skærer l . Lobatjevskij siger nu, at der må være en linje, som adskiller disse to mængder af linjer fra hinanden. På figur 7.1 er denne linje markeret som den stiplede linje m .

I euklidisk geometri vil der kun være én linje i mængden af ikke-skærende. Dette bygger på Playfairs Aksiom. Vi er ikke interesseret i at bruge postulater, som er ækvivalente til $P5$. Vi må derfor være åbne over for muligheden, at der kan eksistere flere ikke-skærende linjer.

Nedslagspunktet for den vinkelrette på l kalder vi D . Længden af linjestykket AD betegner vi med p :



Figur 7.2:

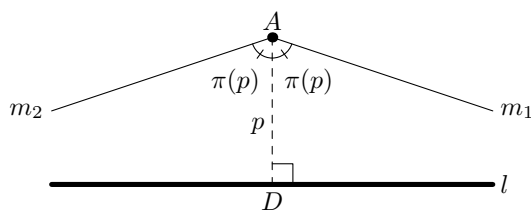
Vinklen mellem linjestykket AD og linjen m betegner Lobatjevskij med $\pi(p)$.

Opgave 7.4.1. *Bevis, at m ikke skærer l . (Hint: Antag det modsatte og kom frem til en modstrid).

Alle disse overvejelser bruger Lobatjevskij til at give sin egen definition af, hvad det vil sige, at to rette linjer er parallelle:

Definition 7.4.2. Vinklen $\pi(p)$ kaldes *parallelvinklen*, og linjen m siges at være L-parallell² til linjen l . Vi skriver: $m \parallel_L l$

Det er muligt, at der findes to L-parallel linjer gennem det samme punkt til den samme linje:



Figur 7.3:

²Ordet L-parallel er noget vi har indført og ikke en betegnelse Lobatjevskij selv brugte. Lobatjevskij kaldte det bare for parallel.

Der er altså en parallel til venstre side m_1 og en parallel til højre side m_2 . Det kan bevises, at parallelvinklen til venstre side er lig med parallelvinklen til højre side. Vi vil ikke bevise det her.

Det viser sig, at der er en nøje sammenhæng mellem vinkelen $\pi(p)$ og vinkelsummen i en trekant. Vi husker, at Euklid 32 er ækvivalent med $P5$, og vi skal nu se, hvordan en antagelse af $P5$ vil påvirke $\pi(p)$:

Opgave 7.4.3. Bevis, at: $P5 \Rightarrow \pi(p) = 90^\circ$ (for alle p).

Opgave 7.4.4. Bevis, at: $\pi(p) = 90^\circ$ (for alle p) $\Rightarrow P5$

Opgave 7.4.5. Vis, at $\pi(p)$ ikke kan være større end 90° .

Lobatjevskij har nu vist, at den geometri, som de første fire postulater beskriver, har følgende to muligheder:

$$\pi(p) = 90^\circ \iff P5 \iff \text{vinkelsummen i enhver trekant er } 180^\circ \quad (7.4.1)$$

Alternativet til hele denne stribe af udsagn er:

$$\pi(p) < 90^\circ, \text{ non-}P5 \text{ og vinkelsummen i enhver trekant er mindre end } 180^\circ \quad (7.4.2)$$

hvor non- $P5$ er det modsatte udsagn til $P5$.

non- $P5$: Der findes to linjer l_1 og l_2 , som skærer en tredje linje m , hvor de indvendige vinkler på samme side tilsammen er mindre end 180° , men hvor l_1 og l_2 ikke skærer hinanden.

Opgave 7.4.6. Sammenlign formuleringen af non- $P5$ med formuleringen af $P5$.

Lobatjevskij viser følgende sætning, som er trivial med den gamle definition af parallelitet, men som ikke er helt oplagt med L-parallelitet:

Sætning 7.4.7 (Lobatjevskij 18). *To linjer er altid gensidigt L-parallelle, dvs:*

$$l_1 \parallel_L l_2 \Rightarrow l_2 \parallel_L l_1$$

Sætningen er medtaget, fordi vi får brug for den senere. Vi vil ikke bevise sætningen her, men beviset kan læses i [7] side 5.

7.5 ikke-euklidisk idé

Som vi lige har set, kunne Lobatjevskij vise, at der var to mulige udfald for den geometri, som bygger på de fire første postulater. Lad os resumere, hvad mulighederne er:

Første mulighed:

1. Vinkelsummen i enhver trekant er præcis 180°
2. $\delta = 0$ for alle trekanter
3. $\pi(p) = 90^\circ$
4. $P5$

Anden mulighed:

1. Vinkelsummen i enhver trekant er mindre end 180°
2. $\delta > 0$ for alle trekanter
3. $\pi(p) < 90^\circ$
4. non- $P5$

Men hvor forgængerne havde forsøgt at forkaste den anden mulighed, så skrev Lobatjevskij i stedet følgende:

Den første forudsætning tjener som grundlag for *den sædvanlige geometri* og *den plane trigonometri*.

Den anden forudsætning kan også tillades, uden at den fører til nogen selvmodsigelse, og derved begrunder den en ny geometrisk lære, som jeg har givet navnet: *Imaginær geometri*, og som jeg agter at fremstille her... ([7] side 10)

Påstanden er altså, at den anden mulighed, i lighed med den første, **ikke** vil føre til nogen modstrid, og at den derfor kan være grundlaget for en anden form for geometri. Lobatjevskijs plan var altså at tage de første fire af Euklids postulater samt det modsatte af $P5$. Ud fra disse ville han udlede sætninger:

$$\left. \begin{array}{l} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ \text{non-}P5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Euklid 1-28} \\ \text{Nye usædvanlige sætninger} \end{array} \right.$$

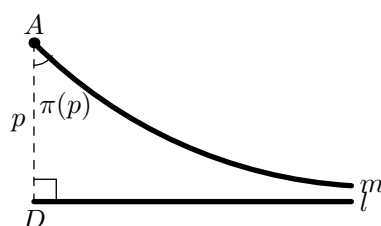
Det er klart, at Euklids første 28 sætninger stadig gælder, for de er jo udledt ved kun at bruge $P1 - P4$. De efterfølgende sætninger vil være nogle nye sætninger, som man ikke vil kunne genkende fra euklidisk geometri, og de vil derfor i første omgang virke usædvanlige og ikke intuitive. Vores intuition er jo stærkt påvirket af, at vi er vant til den euklidiske geometri. Det er denne nye geometri, vi kalder *ikke-euklidisk geometri*.

Ikke-euklidisk geometri er den geometri, der bygger på postulerne: $P1-P4$ og non- $P5$.

Det er vigtigt at være opmærksom på, at *sfærisk geometri* hverken er euklidisk eller ikke-euklidisk.

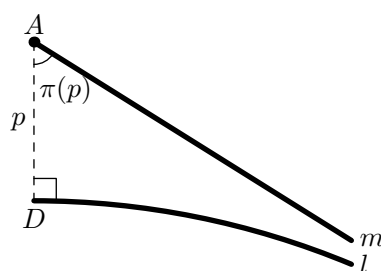
7.6 At tegne ikke-euklidisk geometri

Når man skal tegne ikke-euklidisk geometri, som det f.eks. ses på figur 7.2, løber man ind i problemer. På figur 7.2 har vi to rette linjer (l og m), som er parallelle og som derfor ikke skærer hinanden. Samtidig er vinklen $\pi(p)$ mindre end 90° . På figur 7.2 ser det derfor ud til, at m og l vil skære hinanden, hvis de forlænges. For at kunne tegne ikke-euklidisk geometri er man nødt til at give afkald på de gamle vaner. Problemet kan løses ved at illustrere rette linjer som enten buede eller sædvanlige rette. F.eks. kan man tegne figur 7.2 på følgende måde:



Figur 7.4:

Her er det linjen m , som er buet, men vi kunne lige så godt havde valgt at tegne l buet:



Figur 7.5:

Det er vigtigt at være opmærksom på, at linjerne på figuren er rette linjer. Hvis det virker underligt, at linjen l på figur 7.5 er en ret linje, så prøv at tænke på de rette linjer fra landkortet i afsnit 6.5. På landkortet så vi en ret linje, som også var buet. Når vi fremover tegner ikke-euklidisk geometri, vil vi derfor sommetider fremstille rette linjer som buede. Alle linjer, buede som ikke buede, skal således ses som rette linjer med mindre andet nævnes.

7.7 Den første usædvanlige sætning

Lobatjevskij 23, som vi skal se om lidt, er det første eksempel på en sætning, som gælder i ikke-euklidisk geometri men, som ikke gælder i sædvanlig euklidisk geometri. For at bruge betegnelsen fra tidligere så er sætningen den første af de *nye usædvanlige sætninger*. Til beviset for Lobatjevskij 23 får vi brug for følgende sætning:

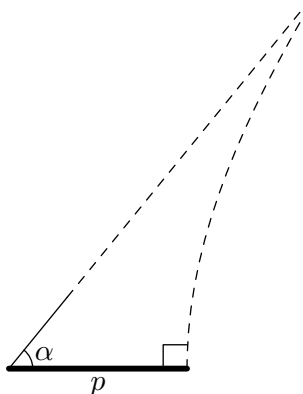
Sætning 7.7.1 (Lobatjevskij 22). Hvis to vinkelrette på én og samme rette linje er L-parallele med hinanden, så er vinkelsummen 180° i enhver trekant.

Beviset for Lobatjevskij 22 kan findes i [7].

Inden vi går i gang med Lobatjevskij 23, skal jeg lige minde om, at sætningen hører til den geometri, hvor $P5$ ikke gælder. Den geometri, som vi har kaldt *den anden mulighed* eller *ikke-euklidisk geometri*. Derfor gælder det, at $\delta > 0$ for alle trekanter.

Sætning 7.7.2 (Lobatjevskij 23). Givet en vinkel $\alpha (< 90^\circ)$, så findes præcis én linje med længde p således at $\pi(p) = \alpha$.

Lad os, inden vi går i gang med beviset, undersøge, hvad Lobatjevskij 23 egentlig siger. Hvis man har en vinkel (α), findes der et linjestykke med en helt bestemt længden p , som kan afsættes ud af vinklens ene ben. Hvis man oprejser den vinkelrette for enden af dette linjestykke, så vil denne være L-parallel med vinklens andet ben:

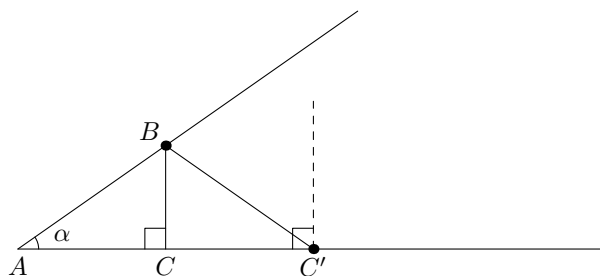


Figur 7.6: er drejet 90° i forhold til figur 7.5

Bevis. Lad der være givet en vinkel $\alpha < 90^\circ$. Vinkelspidsen kalder vi for A og vinklens ben forlænges. Vi skal nu finde en linje, som er vinkelret på højre ben, og som er L-parallel til venstre ben.

Første skridt er at finde en ret linje, der står vinkelret på højre ben, men som ikke skærer venstre ben. Vi laver nu følgende konstruktioner:

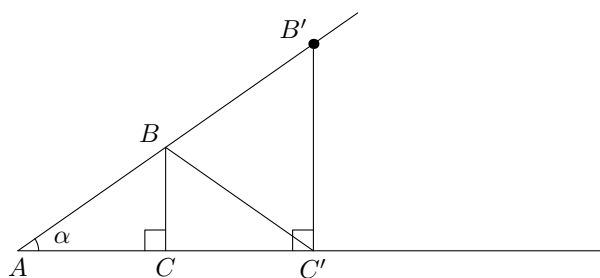
1. Et vilkårligt punkt B vælges på vinklens venstre ben, se figur 7.7.
2. Den vinkelrette fra B nedfældes på det højre ben (Euklid 12) og nedslags-punktet kaldes C .
3. Punktet C' afsættes så $|AC| = |CC'|$.
4. Linjestykket BC' trækkes (P1).
5. I C' oprejses den vinkelrette (Euklid 11).



Figur 7.7:

Vi kan nu observere følgende:

1. $\delta(ABC) = \beta > 0$, da vi er i anden mulighed (β er et positivt tal).
2. $\triangle ABC$ og $\triangle C'BC$ er kongruente (Euklid 4).
3. Men så ved vi om vinkeldefekterne: $\delta(ABC) = \delta(C'BC)$, da vinklerne er lige store.
4. $\delta(ABC') = \delta(ABC) + \delta(C'BC) = 2\delta(ABC) = 2\beta$.
5. Den vinkelrette i C' vil nu enten skære eller ikke skære venstre ben. Hvis den ikke skærer, har vi det, vi var ude efter. Hvis den skærer, kalder vi skæringspunktet for B' , og så har vi den situation, som ses på figur 7.8:

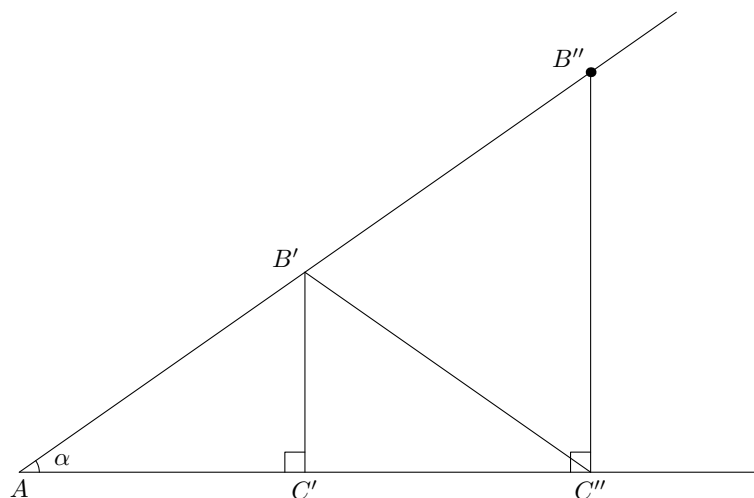


Figur 7.8:

Vi kan så se, at:

$$\delta(AB'C') = \delta(ABC') + \delta(BC'B') > 2\beta$$

De samme konstruktioner kan nu laves, hvor trekanten ABC erstattes med trekanten $AB'C'$:

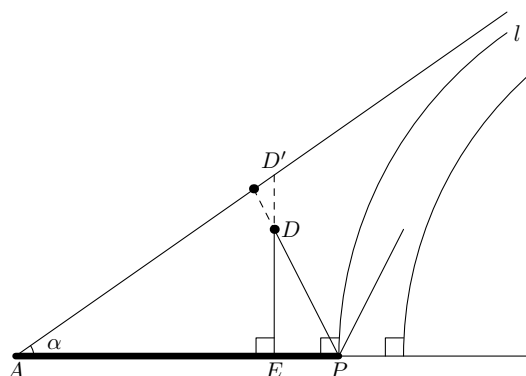


Og tilsvarende udregninger giver så:

$$\delta(AB''C'') > 2 \cdot (2\beta) = 4\beta$$

Sådan kunne vi fortsætte og på den måde lave en trekant, hvor δ er kæmpe stor. Men det er noget 'sludder', fordi δ kan ikke være mere end 180° . Altså må vi på et tidspunkt komme til en vinkelret på højre ben, som ikke skærer venstre ben.

Vi har nu set, at der er nogle vinkelrette på højre ben, som skærer venstre ben og i hvert fald én, som ikke skærer. Lobatjevskij siger nu, at der må findes en linje, som adskiller de ikke-skærende fra de skærende. På figuren kalder vi denne linje for l :



Vi vil nu undersøge, om l er L-parallell med venstre ben og undersøger derfor de rette linjer, der udgår fra punktet P .

1. Linjer, som er til højre for l , vil aldrig kunne skære vinklens venstre ben, for så skulle de først skære l , hvilket er umuligt (H I.2, side 21).
2. Hvis linjen ligger til venstre for l laves følgende konstruktion:
 - (a) Et punkt D vælges på denne.
 - (b) Den vinkelrette fra D nedfældes til et punkt E (Euklid 12).

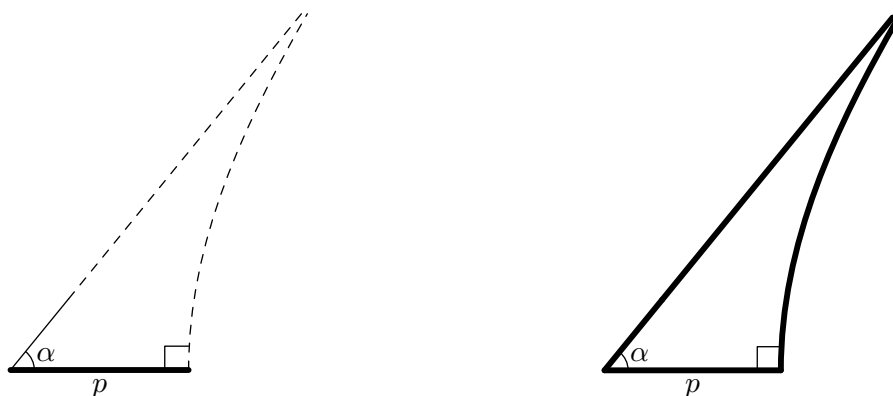
- (c) Forlængelsen af ED vil nu skære venstre ben i D' . Det ses nu, at forlængelsen af PD er nødt til at skære vinklens venstre ben for at komme ud af $\triangle AED'$ (H II.4, side 21).

Men så har vi bevist, at l er L-parallel til vinklens venstre og dermed også, at vinklens venstre ben er l-parallel til l (Lobatjevskij 18). Ifølge Lobatjevskij 22 findes der kun en sådan vinkelret og L-parallel. Det linjestykke, vi er ude efter, er altså AP , idet vi sætter $|AP| = p$, og sætningen er bevist. $\square$

Opgave 7.7.3. Undersøg, hvordan sætning 7.7.2 vil se ud i sædvanlig Euklidisk geometri.

7.8 Asymptotiske trekanter

Lobatjevskij 23 giver anledning til en ny type geometrisk figur. Vi har set, at hvis vi har en vinkel $\alpha < 90^\circ$, så kan vi på kun en måde finde en linje, som er vinkelret på vinklens ene ben og samtidig er L-parallel med vinklens andet ben. Vi står nu med to vinkler; α og den rette vinkel samt det mellemliggende linjestykke med længden p . Det er noget, der i sædvanlig euklidisk geometri (første tilfælde) ville give anledning til en trekant. I ikke-euklidisk geometri kan vi også opfatte denne figur som en slags trekant. Sådan en figur kaldes en (retvinklet-) **enkelt-asymptotisk trekant**.

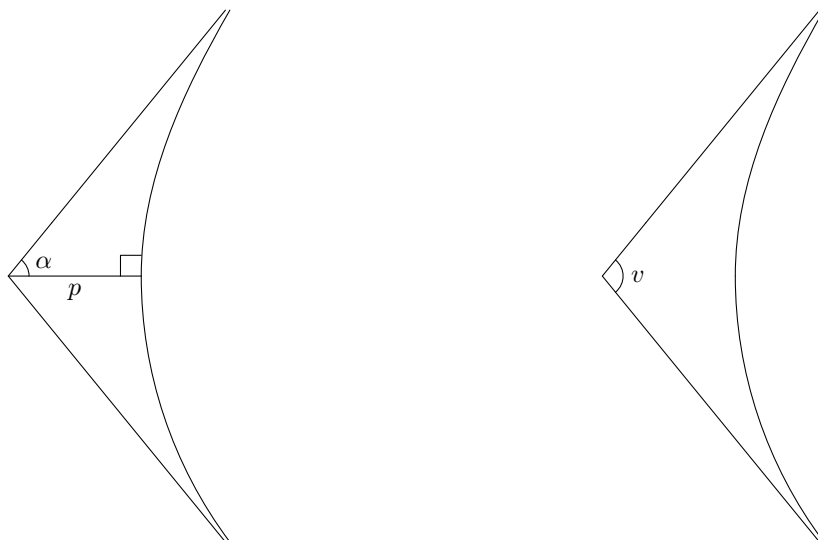


Figur 7.9: Enkelt-asymptotiske trekanter.

Det er vigtigt at være opmærksom på, at det ene hjørne af figuren ikke eksisterer. Forstået på den måde, at det er ikke muligt at stille sig i det hjørne, som ligger over for vinklen α . I hjørnet sker der det lidt usædvanlige, at de to sider nærmer sig hinanden asymptotisk. Det ville ikke være muligt for rette linjer i den sædvanlige euklidiske geometri. På dette punkt adskiller disse enkelt-asymptotiske trekanter sig fra sædvanlige trekanter, hvor det er muligt at stille sig i hvert af de tre hjørner.

Vi kan nu spejle trekanten i linjestykket med længde p . På den måde får vi en ny figur, hvor den ene vinkel er $2 \cdot \alpha$. Den rette linje, der står vinkelret på p , spejles over i sig selv, og den nye figur er derfor også en form for trekant. Nu er der bare to

hjørner, hvor siderne nærmer sig hinanden asymptotisk. Figuren (se figur 7.10) kaldes en **dobbelt-asymptotisk trekant**:



Figur 7.10: Dobbelt-asymptotiske trekanter. Vi kalder vinklen v for den egentlige vinkel.

Vi har nu en dobbelt-asymptotisk trekant, hvor den egentlige vinkel er $v = 2 \cdot \alpha$. Ved hjælp af den proces vi lige har gennemgået, kan vi altså lave en dobbelt-asymptotisk trekant med en givet vinkel v . Den eneste oplysning vi har brug for, når vi skal lave en dobbelt-asymptotisk trekant, er altså den egentlige vinkel. Denne observation giver anledning til følgende sætning:

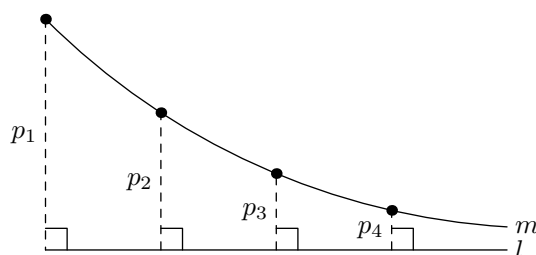
Sætning 7.8.1. *To dobbelt-asymptotisk trekant er kongruente hvis og kun hvis de egentlige vinkler (v) er ens.*

7.9 Afstand

I euklidisk geometri er afstanden mellem parallelle linjer konstant. Denne egenskab fremstår så oplagt, at matematikeren Proklos fejlagtigt kom til at antage den som et postulat (se opgave 4.5.3). Vi vil nu se, at den vinkelrette afstand mellem L-parallele linjer i ikke-euklidisk geometri faktisk ikke er konstant.

Sætning 7.9.1 (Lobatjevskij 24). *Jo mere man forlænger L-parallele linjer til deres parallelle side, desto mere nærmer de sig hinanden.*

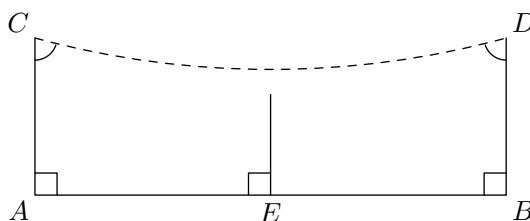
Når Lobatjevskij siger, at linjerne nærmer sig hinanden, mener han, at den vinkelrette afstand bliver mindre og mindre. Lad f.eks. linjerne l og m være L-parallele. Den vinkelrette afstand til l fra et punkt på m kan findes ved at nedfælde den vinkelrette fra dette punkt:

Figur 7.11: l og m er L-parallele.

Sætning 7.9.1 siger så at: $p_1 > p_2 > p_3 > p_4$.

Bevis. Først konstruerer vi en firkant, som vi skal bruge til beviset (se figur 7.12):

1. På et linjestykket AB oprejses den vinkelrette i hvert af endepunkterne A og B (Euklid 11).

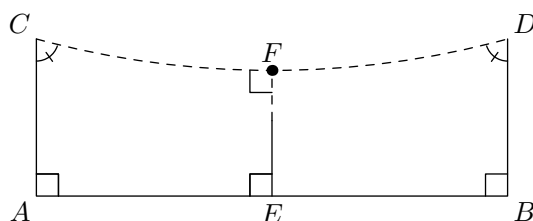


Figur 7.12:

2. C og D afsættes så $|AC| = |BD|$.
3. Linjestykket CD trækkes (P1).
4. AB halveres i punktet E (Euklid 10).
5. Den vinkelrette oprejses i E (Euklid 11).

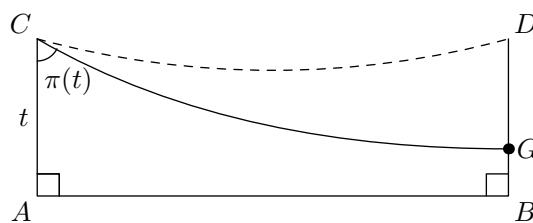
Følgende indses nu:

1. Den vinkelrette i E vil, når den forlænges, skære CD i punktet F som det ses på figur 7.13.
2. Hvis $\square EBDF$ spejles i EF , vil B falde oven i A , og D vil falde oven i C .
3. Så er $\angle ACF = \angle FDB$.
4. og $\angle CFE = \angle EFD = 90^\circ$



Figur 7.13:

5. Set fra punktet F , vil FD , når den forlænges til højre side, ikke skære forlængelsen af AB , idet $\pi(|EF|) < 90^\circ$ (Vi er i anden mulighed).
6. Så forlængelsen af CD vil ikke skære forlængelsen af AB .
7. Den rette linje gennem C , som er L-parallel med CD , vil derfor ligge under CD og skære DB i punktet G :



8. Men idet $|AC| = |BD|$ finder vi, at $|AC| > |BG|$.
9. Men A og B var vilkårlige punkter, som blot har den egenskab, at B ligger til højre for A . Vi kan derfor konkludere, at jo længere man kommer til højre, jo mindre er den vinkelrette afstand mellem de L-parallele linjer.

□

Lobatjevskij fortsatte med at undersøge denne nye *Imaginære Geometri* og kom frem til mange flere resultater. Han udvidede undersøgelserne til også at omfatte geometri i 3 dimensioner altså rumgeometri, stadig byggende på non-P5.

7.10 Bolyai

Uvidende om Lobatjevskijs opdagelser sad der et helt andet sted i Europa en anden ung matematiker, Janos Bolyai og undersøgte problemet med parallellpostulatet. Janos' far Wolfgang Bolyai, som var også matematiker, havde forsøgt at advare unge Janos om at spille sin tid med netop dette problem. Faderen mente, at sådanne undersøgelser ikke ville føre nogle vegne.



Janos Bolyai 1802-1860

Heldigvis lytter unge mennesker ikke altid til, hvad deres forældre siger, og Janos kunne da heller ikke holde fingrene fra problemet. Efter nogle mislykkede forsøg på at udlede $P5$ fra de første fire postulater, kom Bolyai frem til den samme overraskende konklusion, som vi har set ved Lobatjevskij: $P5$ afhænger ikke af $P1 - P4$, og hvis man i stedet antager non- $P5$, så vil der dukke en ny og anderledes geometri op. Denne opdagelse førte til, at Janos i et brev til faderen skrev de linjer, som er citeret i starten af afsnit 1.1:

Jeg kan ikke sige mere, kun så meget: *af ingenting har jeg skabt en anden helt ny verden*. Alt, hvad jeg indtil nu har sendt dig, er, sammenlignet med dette, kun et korthus i forhold til et slot. ([8] side xxviii)

De resultater, som Janos Bolyai kom frem til var stort set identiske med det, som Lobatjevskij var kommet frem til et helt andet sted i Europa. Det er fastslået, at Janos Bolyai på ingen måde kunne havde haft kendskab til Lobatjevskijs arbejde.

7.11 Trigonometriske funktioner

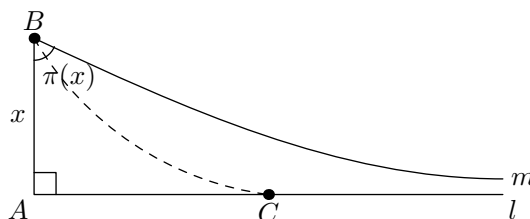
Både Janos Bolyai og Lobatjevskij udviklede en teori for trigonometriske funktioner (funktioner som $\sin(x)$ og $\tan(x)$) til den ikke-euklidiske geometri. Vi skal nu snuse til de trigonometriske resultater, Janos kunne udlede for den ikke-euklidiske geometri. Han kom frem til, at tangens-funktionen i ikke-euklidisk geometri var givet ved følgende:

$$\tan \frac{\pi(x)}{2} = e^{-x/k} \quad (7.11.1)$$

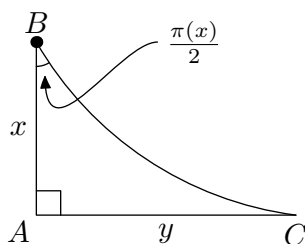
hvor k er en konstant, e^x er den naturlige eksponentiel funktion og $\pi(x)$ er parallelvinklen. For at få et billede af, hvad formel 7.11.1 siger, vil vi nu konstruere en retvinklet trekant, hvor en af vinklerne er $\frac{\pi(x)}{2}$:

1. Et linjestykke (AB) med længden x oprejses vinkelret på en linje l .

2. Der findes nu en L-parallel linje til l , som går gennem B . Denne betegnes m .
3. Vinklen ved B er nu $\pi(x)$:



4. Vinklen ved B kan nu halveres.
5. Derved vil der fremkomme et skæringspunkt med l , som vi kalder C .
6. Vi har nu trekanten ABC , hvor vinklen ved B er $\frac{\pi(x)}{2}$:



7. Længden af siden AC kaldes y .
8. Tangens til vinklen ved B er, som vi er vant til fra sædvanlig trigonometri, forholdet mellem de to kateter. Altså forholdet mellem x og y :

$$\frac{y}{x} = \tan \frac{\pi(x)}{2} = e^{-x/k} \quad (7.11.2)$$

Længden af siden AC kan altså bestemmes som en funktion af x :

$$|AC| = x \cdot e^{-x/k} \quad (7.11.3)$$

Det ses, at resultatet er afhængigt af konstanten k . Det er noget, som måske godt kan være lidt overraskende. k kaldes rum-konstanten, vi vil ikke komme nærmere ind på dennes betydning her.

Ved hjælp af udtrykket for $\tan(x)$ kunne Bolyai udlede sinus-relationen i ikke-euklidisk geometri som har følgende udseende:

$$\frac{\odot a}{\sin A} = \frac{\odot b}{\sin B} = \frac{\odot c}{\sin C} \quad (7.11.4)$$

hvor $\odot a$ betyder omkredsen af den cirkel, som har radius a . Dette resultat adskiller sig fra de sinus-relationer, vi kender. Forskellen ligger i beregningen af en cirkels omkreds, som ikke er uden problemer i ikke-euklidisk geometri. Vi vil ikke komme mere ind på det her.

Hvis man vil vide mere om ikke-euklidisk trigonometri, så kan man eventuelt læse [4] side 104-133.

Kapitel 8

Modeller

I kapitel 7 så vi nogle meget abstrakte overvejelser vedrørende geometri. Den form for geometri kaldte vi *ikke-euklidisk geometri*. Vi vil nu danne os et mindre abstrakt billede af den ikke-euklidiske geometri for at se, om vi kan acceptere ikke-euklidiske geometri på samme måde, som vi accepterer euklidisk geometri.

For at kunne gøre det er vi i første omgang nødt til at sikre os, at postulaterne ikke vil føre til en selvmodsigelse. Det er en vanskelig opgave at afgøre, om den ikke-euklidiske geometri er uden selvmodsigelser, måske endda en umulig opgave. Er der derfor noget andet vi kan gøre, som vil styrke vores tiltro til den geometri, som Lobatjevskij og Bolyai udviklede?

I afsnit 6.1 indførte vi nogle postulater, som i første omgang ikke så ud til at give mening. Efter nogle overvejelser kunne vi alligevel acceptere disse postulater som en beskrivelse af geometri, nemlig som beskrivelse af geometrien på en kugleflade kaldet sfærisk geometri.

Spørgsmålet er nu, om noget tilsvarende kan lade sig gøre for den ikke-euklidiske geometri. Er det muligt på en eller anden måde at tegne den geometri, som Lobatjevskij og Janos Bolyai havde fremsat? Hvis det er muligt, så vil det være nemmere at tro på, at postulaterne ikke vil føre til en selvmodsigelse.

I dette kapitel vil vi se, hvordan det faktisk er muligt at tegne den ikke-euklidiske geometri eller rettere, hvordan det er muligt at tegne et to-dimensionalt billede af den ikke-euklidiske plan. Dette to-dimensionale billede af den ikke-euklidiske plan er at sammenligne med atlasset, som jo var et billede af kuglens overflade. Et sådan ikke-euklidisk 'atlas' kaldes for en model af den ikke-euklidiske geometri.

8.1 Poincarés skive-model

Vi skal nu undersøge den model, man kalder for Poincarés skive-model, efter den franske matematiker Henri Poincaré, som i 1901 foreslog modellen.



Henri Poincaré 1854-1912

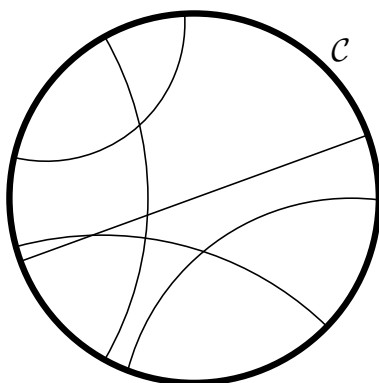
Poincarés model er et billede af den ikke-euklidiske geometri og bygger derfor på postulaterne:

- $P1$ - $P4$.
- non- $P5$.
- De underforståede postulater (se afsnit 2.9).

Når vi ser på modellen, er det vigtigt, at vi vrister os fri af vores sædvanlige forestillinger om planet. Vi skal gøre os klart, hvordan planet, punkter og rette linjer skal tegnes i vores model. Poincarés model er bygget op af en cirkelskive, som vi kalder C . I det følgende skelner vi mellem kanten af C , som er cirkelperiferien og det indre, som er resten. I følgende skema er Euklids objekter placeret over for de tilsvarende objekter i modellen:

Euklid	Poincaré-skiven
planet	det indre af C
punkterne	punkterne i det indre af C
de rette linjer	de cirkelbuer, som står vinkelret på kanten af C eller de linjestykker, som går gennem centrum af C

På figur 8.1 er der vist nogle eksempler på rette linjer i planet C . Det er vigtigt at være opmærksom på, at selve kanten af C ikke er en del af planet.



Figur 8.1: I Poincaré-modellen er rette linjer enten cirkelbuer, som står vinkelret på skivens kant, eller rette linjer gennem skivens centrum.

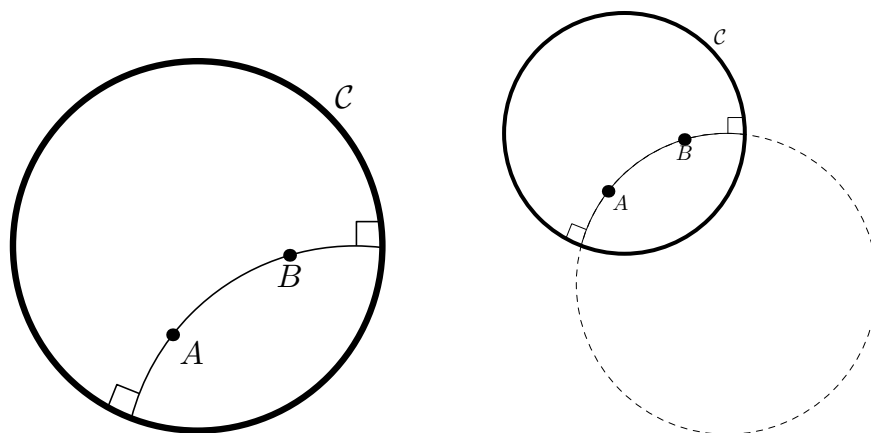
Den ikke-euklidiske geometri kaldes også for *hyperbolsk geometri*. Vi kalder derfor de rette linjer i modellen (altså cirkelbuer som står vinkelret på C osv.) for *hyperbolske linjer*. Hvis det er svært at forestille sig, at de rette linjer er illustreret ved cirkelbuer så tænk på atlasset (afsnit 6.5). Den rette linje fra New York til København, var på kortet afmærket som en bue (ikke en cirkel bue) hen over Grønland.

Vi vil først se, hvordan postulaterne $P1$ og $P2$ er opfyldt i modellen. I Poincarés skive-model vil de to postulater lyde som følgende:

P1 Givet to punkter A og B i det indre af C , så kan man trække det hyperbolske linjestykke gennem disse.

P2 Det hyperbolske linjestykke AB kan forlænges.

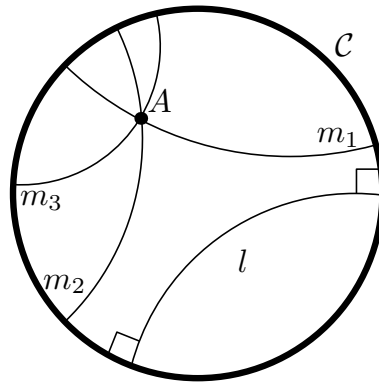
I modellen ser det ud, som om denne egenskab er opfyldt:



Figur 8.2: Den hyperbolske linje gennem de to punkter A og B . Det er kun den del af cirklen, som ligger i det indre af C , som udgør den hyperbolske linje.

Figur 8.2 giver indtryk af, at det hyperbolske linjestykke AB kan trækkes, og at det hyperbolske linjestykke AB kan forlænges til begge sider. Senere vil vi se, hvordan

man i praksis kan tegne den hyperbolske linje gennem to punkter. Faktisk er det sådan, at der findes præcist én hyperbolsk linje gennem de to punkter, noget som vi ikke vil bevise her. Vi kalder nu denne hyperbolske linje for l og ser så på et punkt A , som ikke ligger på l :



Figur 8.3: Det findes mange hyperbolske linjer gennem A , som er parallelle med l .

Det er nu muligt at trække flere hyperbolske linjer gennem A , som ikke skærer l . På figur 8.3 er der afbilledet tre sådanne hyperbolske linjer m_1 , m_2 og m_3 . Vi husker nu på at to rette linjer, ifølge Euklids definition, er parallelle, når de ikke skærer hinanden. I Poincaré's skive-model findes der altså flere paralleller til l gennem punktet A , svarende til hvad Lobatjevskij og Bolyai havde forudsagt om den ikke-euklidiske geometri.

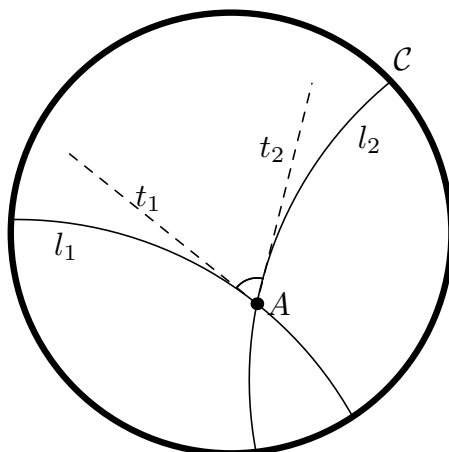
Opgave 8.1.1. *Lad A være et punkt i det indre af C og lad A' være et hjælpepunkt på kanten af C . Konstruer nu, med sædvanlige euklidiske konstruktioner, følgende:

1. Tre forskellige cirkler, som går gennem A og A' .
2. Tre forskellige cirkler, som går gennem A' , og som står vinkelret på C .
3. Den cirkel, som går gennem A og A' , og som står vinkelret på kanten af C .

8.2 Vinkler i Poincaré's model

Vi har nu indført det hyperbolske plan C , hyperbolske punkter og hyperbolske linjer og set, at modellen har nogle af de egenskaber, som ikke-euklidisk geometri har. Mange af de resultater, vi så i kapitel 7, havde med vinkler at gøre. Vi vil derfor se på, hvordan Poincaré indfører et vinkelbegreb i modellen:

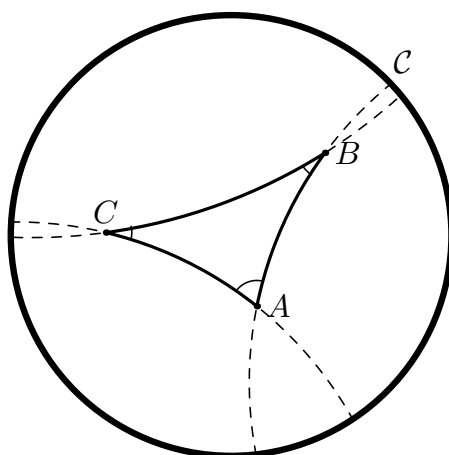
Definition 8.2.1. Lad to hyperbolske linjer l_1 og l_2 skære hinanden i punktet A (se figur 8.4). Cirkelbuerne har hver en tangent i A , som vi kalder t_1 og t_2 . Vinklen mellem de hyperbolske linjer l_1 og l_2 defineres til at være den sædvanlige vinkel mellem tangenterne t_1 og t_2 .



Figur 8.4: Vinklen mellem to skærende hyperbolske linjer.

Vinkler i Poincarés model kan altså måles med en sædvanlig vinkelmåler, som bruges i euklidisk geometri. For at måle den hyperbolske vinkel tegner man først tangenterne til de skærende cirkelbuer. Den hyperbolske vinkel er så vinklen mellem disse tangenter.

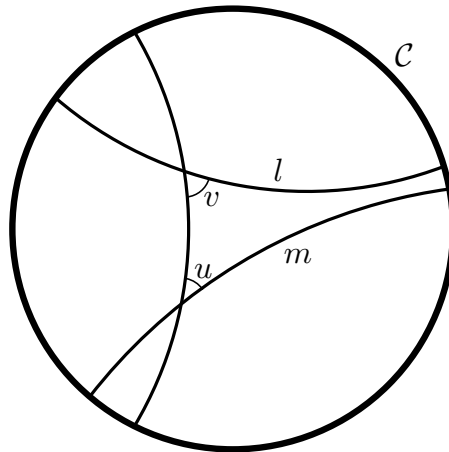
Ved at trække endnu en linje kan vi danne en hyperbolsk trekant ABC :

Figur 8.5: Den hyperbolske trekant ABC .

Det ser umiddelbart ud til at vinkelsummen i den hyperbolske trekant ABC er mindre end 180° , noget som ifølge Bolyai og Lobatjevskij skulle gælde i ikke-euklidisk geometri.

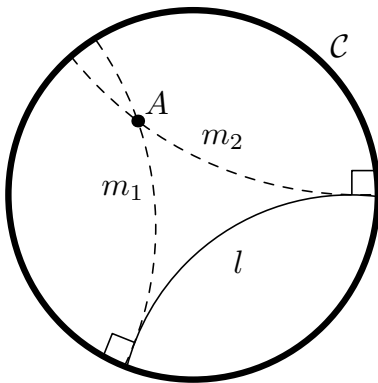
non- $P5$ i Poincaré-modellen

I ikke-euklidisk geometri skal non- $P5$ være opfyldt. Der skal altså findes to ikke-skærende linjer, som skæres af en tredje linje, så de indvendige vinkler på samme side tilsammen er mindre end 180° . Figur 8.6 er et eksempel på at non- $P5$ er opfyldt i modellen:

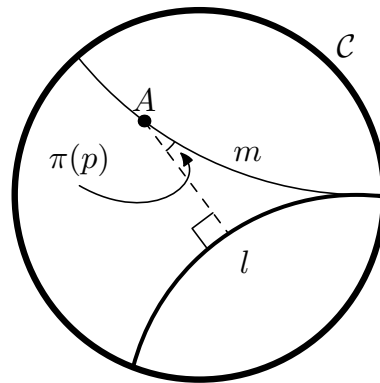


Figur 8.6: $v + u < 180^\circ$ men l og m skærer ikke hinanden.

Vi vender nu tilbage til figur 8.3, hvor vi så tre hyperbolske linjer gennem punktet A , hvor ingen af dem skar den hyperbolske linje l . Vi vil nu sammenholde figur 8.3 med begrebet L-paralleletet, som Lobatjevskij indførte i afsnit 7.4.2. Lobatjevskij så på mængden af hyperbolske linjer gennem et punkt A og inddelte disse i to mængder: dem, som skærer l , og dem, som ikke skærer l . De to linjer, som adskiller disse to mængder, siges at være L-parallelle til l :



Figur 8.7: To linjer, m_1 og m_2 er L-parallelle til l



Figur 8.8: Den vinkelrette fra punktet A på linjen l . Vær opmærksom på, at den vinkelrette også er en hyperbolsk linje.

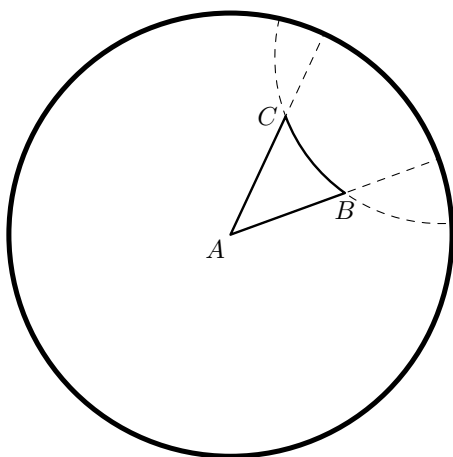
Det ses, at der findes to L-paralleller til l gennem A . På figur 8.7 er disse markeret som stiplede linjer. Fra A kan man nedfælde den vinkelrette på l som vist på figur 8.8. Vinklen $\pi(p)$ er også markeret på figuren.

Opgave 8.2.2. *Sammenlign figur 8.8 med Lobatjevskijs figur 7.2.

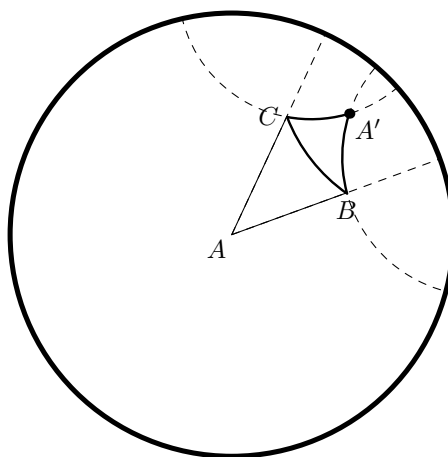
8.3 Legendres bevis i Poincarés model

I afsnit 4.4 så vi, at Poincarés landsmand matematikeren Legendre havde forsøgt at bevise, at vinkelsummen i enhver trekant er 180° (Euklid 32) ved kun at bruge postulaterne $P1 - P4$. Beviset var opdelt i to sætninger, hvor beviset for den første godt kan accepteres. I beviset for den anden sætning (sætning 4.4.7) var der imidlertid en fejl. Fejlen var temmelig godt skjult, og man forstår godt, at Legendre ikke opdagede den. Vi vil nu lave beviset for Legendres anden sætning i Poincarés model for derved at gøre fejlen mere tydelig.

Først ser vi på en trekant ABC (figur 8.9), hvor vinkelspidsen A ligger i centrum af C . Siderne i trekanten er hyperbolske linjer, og de er forlænget for at vise, at de står vinkelret på kanten af C :



Figur 8.9: $\triangle ABC$

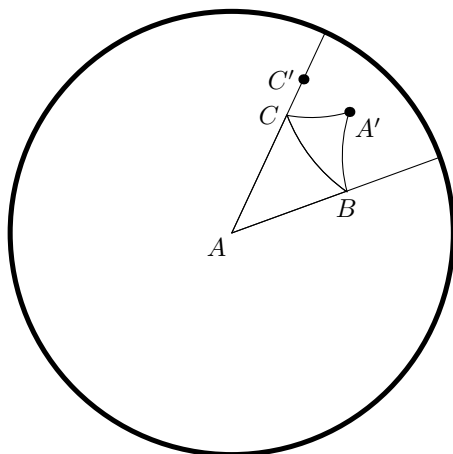


Figur 8.10: $\triangle ABC$ roteres til $\triangle BCA'$.

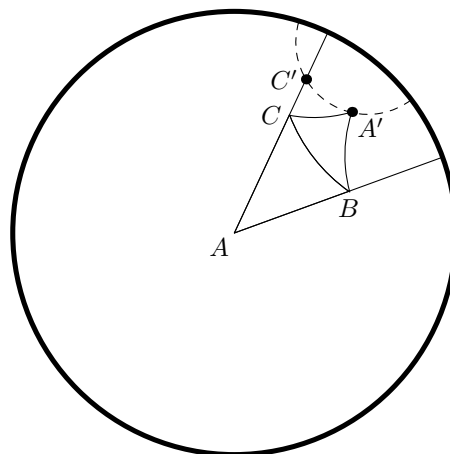
Legendre roterede nu trekant ABC omkring midtpunktet af siden BC . Derved fik han en ny trekant BCA' (figur 8.10). Siderne i trekanten BCA' er også hyperbolske.

Her skal det bemærkes, at rotation kan lade sig gøre ifølge det underforståede postulat som vi kaldte $P8$ (se afsnit 2.9). At $\triangle BCA'$ faktisk er en rotation af $\triangle ABC$ ses ved, at $\angle ACB = \angle A'BC$ og $\angle CBA = \angle BCA'$.

Det næste skridt er nu at forlænge siderne AB og AC i den oprindelige trekant. Legendre ser nu på et punkt C' på forlængelsen af AC (figur 8.11):



Figur 8.11: C' er et punkt på forlængelsen af AC .



Figur 8.12: Det er ikke sikkert, at den hyperbolske linje gennem C' og A' vil skære forlængelsen af AB .

Han kan nu trække den rette linje gennem C' og A' (figur 8.12), hvilket er muligt ifølge $P1$. Han vil så gerne konkludere, at denne vil skære forlængelsen af AB . Som det ses på figur 8.12, så er dette ikke altid tilfældet for hyperbolske linjer. Det fremgår også af figuren, at det slet ikke er sikkert, at der findes et punkt på forlængelsen af AC , som opfylder Legendres krav.

Men hvorfor viser dette så at Legendre lavede en fejl? Legendre arbejdede jo ikke med Poincarés model! Legendres fejl var, at han efter eget udsagn kun ville bruge postulaterne $P1 - P4$. Disse gælder alle fire i Poincarés model, så Legendres bevis skal også kunne gennemføres i modellen. Men det kan det ikke. Legendres bevis har en fejl, og fejlen fremstår tydeligt i Poincarés model.

Opgave 8.3.1. Sammenlign figur 8.12 med Legendres oprindelige figur 4.11.

8.4 Konstruktion af hyperbolsk linje

I dette afsnit vil vi se, hvordan det i praksis er muligt at konstruere en hyperbolsk linje gennem to punkter i Poincarés skive-model. De hyperbolske linjer er, i modellen, cirkler, som står vinkelret på C . Problemet er altså at konstruere den cirkelbue, som går gennem to på forhånd givne punkter inden for C , og som samtidig står vinkelret på Poincaré-skivens side.

Alle konstruktioner vi nu skal følge er helt almindelige euklidiske konstruktioner med passer og lineal. Undervejs bruges der til konstruktionerne således rette linjer tegnet med lineal. Disse er ikke (nødvendigvis) rette linjer i modellen, men er her blot hjælpelinjer.

Øvelser i konstruktion:

Opgave 8.4.1. *Denne opgave går ud på at konstruere en cirkel gennem tre givne

punkter. Alle konstruktioner i denne opgave er sædvanlige euklidiske konstruktioner.

1. Tegn (valgfrit) en trekant ABC .
2. Konstruer midtnormalen til et linjestykke AB .
3. Konstruer nu midtnormalen til hver side i trekanten.
4. Tegn cirklen med centrum i midtnormalernes skæringspunkt og som går gennem trekantens hjørner.
5. Givet tre punkter beskriv da, hvordan man konstruerer den cirkel, der går gennem disse.

Opgave 8.4.2. *Givet et linjestykke AB og et punkt P på AB . Oprejs nu den vinkelrette på AB i punktet P .

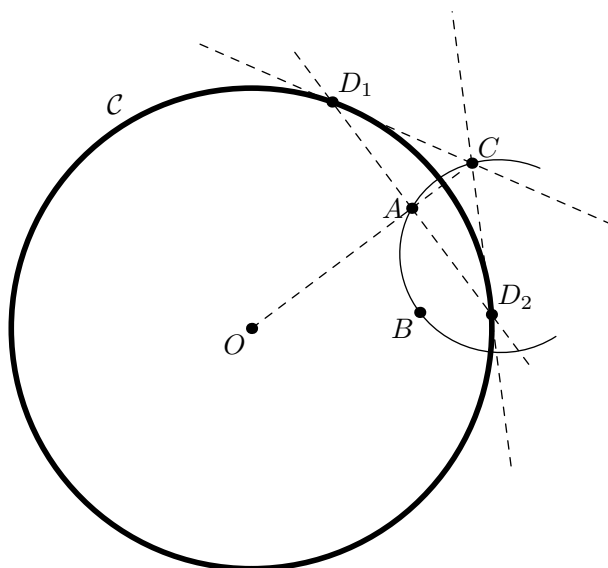
Opgave 8.4.3. *Lad nu P være et punkt på en cirkel bue. Konstruer tangenten til cirklen gennem punktet P (cirkelns centrum er kendt).

Konstruktion af den hyperbolske linje:

Vi vender nu tilbage til det egentlige problem. Hvis A og B er to punkter i det indre af C , så ønsker vi at konstruere den cirkelbue, som står vinkelret på C , og som går gennem A og B . Følgende opskrift kan følges og er illustreret på figur 8.13:

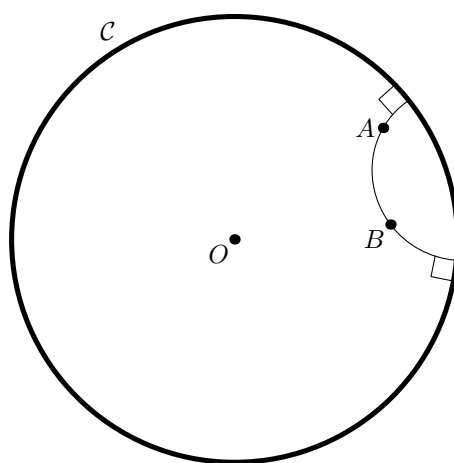
1. Den rette linje gennem O og A trækkes.
2. Den vinkelrette til OA i punktet A rejses.
3. Denne skærer cirkelbuen C i de to punkter $D1$ og $D2$.
4. Tangenterne til cirklen gennem punkterne $D1$ og $D2$ konstrueres.
5. Skæringspunktet mellem de to tangenter kaldes C .
6. Cirkelen der går gennem punkterne A , B og C er den cirkel vi ønsker¹.
7. Cirkelen gennem A , B og C konstrueres.

¹Der gøres ikke rede for, at denne cirkel er præcis den, vi ønsker, det påstås blot. En forklaring på at konstruktionen virker kan findes i [3] kapitel 7, men det er vanskeligt.



Figur 8.13: Konstruktion.

Efter konstruktionen kan vi fjerne de stiplede hjælpelinjer. Vi har så kun den ønskede linje tilbage. Vi har nu konstrueret den ikke-euklidiske rette linje eller den hyperbolske linje gennem punkterne A og B .

Figur 8.14: Den hyperbolske linje gennem punkterne A og B .

Opgave 8.4.4. *Tegn en Poincaré-skive med to punkter A og B , som ikke ligger på samme diameter.

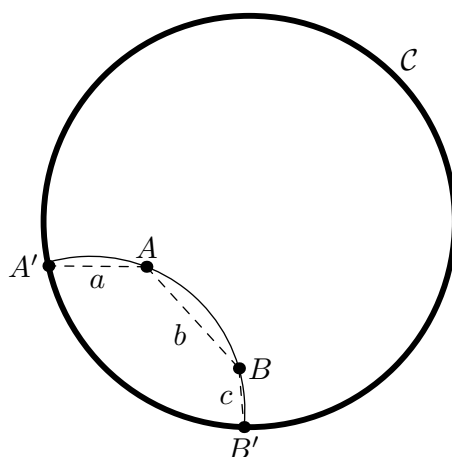
1. Konstruer den hyperbolske linje gennem A og B .
2. Konstruer trekanten OAB hvor O er centrum i C .
3. Mål vinklerne i $\triangle OAB$ og find trekantens vinkelsum.

8.5 Afstand

De hyperbolske linjer konstruerede vi ved hjælp af den sædvanlige Euklidiske geometri i form af cirkelbuer. Tilsvarende vil vi definere den ikke-euklidiske afstand eller den hyperbolske afstand ved hjælp af den sædvanlige euklidiske afstand, altså den afstand som vi kan måle med et centimetermål.

Når vi nu skal til at snakke om afstanden mellem to punkter A og B så mener vi den korteste afstand. Den rette linje er pr. definition den korteste vej. I hyperbolsk geometri er den korteste vej altså langs hyperbolske linjer.

Lad A og B være to punkter, som ligger i C . Den hyperbolske linje gennem A og B har så to skæringspunkter med kanten af C . Disse betegnes A' og B' . Punkterne A' og B' er ikke en del af den hyperbolske geometri, men blot nogle hjælpepunkter. De euklidiske linjestykker $A'A$, AB og BB' indtegnes nu også som hjælpelinjer (figur 8.15):



Figur 8.15: De stiplede linjer er hjælpelinjer.

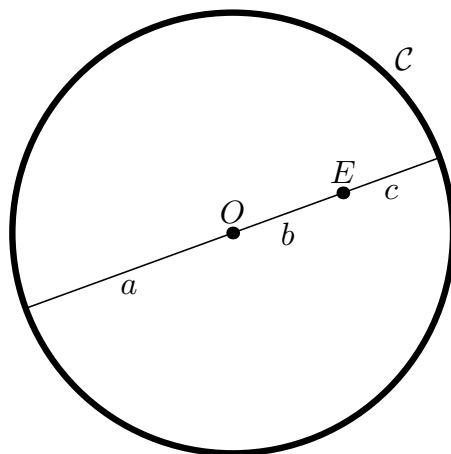
Hjælpelinjernes længde kan måles med centimetermål, og disse længder betegner vi med bogstaverne a , b og c .

Definition 8.5.1. Den hyperbolske afstanden mellem de to punkter A og B i C defineres ved udtrykket:

$$|AB|_P = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b+c}{a} \cdot \frac{b+a}{c} \right), \quad a \neq 0, \quad c \neq 0. \quad (8.5.1)$$

$|AB|_P$ læses: *den hyperbolske afstand fra A til B*. Bogstavet P er valgt for at illustrere, at afstanden hører til Poincarés skive-model.

Opgave 8.5.2. Denne opgave går ud på at undersøge nogle af egenskaberne ved den hyperbolske afstand fra definition 8.5.1. Vi ser på en hyperbolsk linje, som går gennem centrum af C . Punkterne O og E ligger på denne hyperbolske linje:



Figur 8.16:

1. Bestem $|EO|_P$ ved at måle på tegningen (med et centimeter mål) og sætte ind i 8.5.1.
2. Forestil dig nu, at figur 8.16 er tegnet i målestoksforhold 1:1000. Beregn $|EO|_P$ i det nye tilfælde.
3. Vis, at:

$$\frac{b+c}{a} \cdot \frac{b+a}{c} = 1 + \frac{b^2 + ba + cb}{ac} \quad (8.5.2)$$

og brug (8.5.2) til at vise uligheden:

$$|EO|_P \geq 0 \quad (8.5.3)$$

4. Hvad skal der til, for at: $|EO|_P = 0$?
5. Hvad sker der med $|EO|_P$, hvis c går imod nul? (du kan godt antage, at O er centrum af C).
6. Hvad betyder det?
7. Undervisningsmaterialets forside er et maleri af den hollandske kunstner M. C. Escher (1898-1972). Billedet kan tolkes som et billede af Poincarés skive-model. Hvordan kommer den hyperbolske afstand til udtryk i billedet?
8. Vis, at $|EO|_P = |OE|_P$
9. Lad D være et punkt mellem E og O . Vis så:

$$|EP|_P + |PO|_P = |EO|_P \quad (8.5.4)$$

10. Hvordan vil de foregående udregninger se ud, hvis den hyperbolske linje ikke går igennem centrum af C ?

8.6 Konsistens

Da begrebet aksiomsystem blev introduceret (afsnit 1.4), blev det gjort klart, at postulaterne skulle vælges således, at de ikke kan føre til en selvmodsigelse. Et aksiomsystem, hvor postulaterne ikke kan føre til en selvmodsigelse, siges at være konsistent. Vi skal derfor stille os selv spørgsmålet: er den ikke-euklidiske geometri konsistent?

Vi har set, at det er muligt, i den euklidiske geometri, at konstruere en model af den ikke-euklidiske geometri. Den model, vi så på, kaldes Poincarés skive-model, men der findes flere sådanne modeller. At det er muligt at lave en sådan model, fortæller os, at der kun vil opstå problemer med den ikke-euklidiske geometri, hvis der i forvejen er problemer med den euklidiske geometri. Ikke-euklidisk geometri er altså konsistent, hvis euklidisk geometri er konsistent.

Undersøgelser af ikke-euklidisk geometri i tre dimensioner har vist, at det faktisk er muligt at lave en model af euklidisk geometri i den ikke-euklidiske geometri (i videoen [22] er der en god illustration af dette). Altså det omvendte af hvad vi har set. Dermed er euklidisk geometri konsistent, hvis og kun hvis ikke-euklidisk geometri er konsistent. Hvis vi accepterer euklidisk geometri, er vi altså også nødt til at acceptere ikke-euklidisk geometri og omvendt.

Er euklidisk geometri konsistent? Det viser sig, at dette spørgsmål er tæt knyttet til spørgsmålet om, hvorvidt de reelle tal ($\mathbb{R}$) er konsistente. Om $\mathbb{R}$ er konsistent er en lang og spændende historie, som vi dog ikke vil komme ind på her.

8.7 Euklid

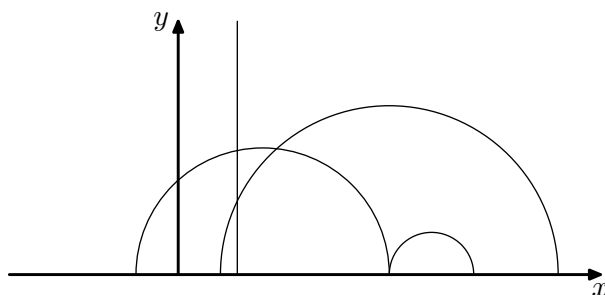
Vi er nu klar til at svare på spørgsmålet om, hvorvidt Euklid havde ret, da han valgte at tage $P5$ med. I modsat fald ville det være muligt at bevise $P5$ ved hjælp af postulaterne $P1$ - $P4$, og $P5$ ville derfor være overflødig som postulat. Vi har set, at $P5$ godt kan erstattes af et andet postulat som f.eks. $A5$, $W5$ eller $L5$, da disse alle er ækvivalente med $P5$. Med den ikke euklidiske geometri og modellerne for denne, har vi en geometri hvor $P1$ - $P4$ gælder, men hvor $P5$ ikke gælder. Derfor kan $P5$ (og ækvivalenserne) ikke bevises ved hjælp af $P1$ - $P4$. Når Euklid så valgte at tage $P5$ med blandt postulaterne, så er det et tegn på Euklids genialitet. Han faldt ikke for den fristelse, som mange af de andre matematikere gjorde. Det, som vi i afsnit 4.1 omtalte som 'en plet på Euklid', var altså slet ikke en plet. At placere $P5$ som et postulat er en genialitet.

8.8 Øvre halvplans-modellen

Poincaré foreslog faktisk endnu en model for ikke-euklidisk geometri. Modellen kalder man for Poincarés øvre halvplans-model, og den minder faktisk en del om skive-modellen. Med det øvre halvplan mener man den halvdel af det sædvanlige koordinatsystem, hvor punkterne har positiv y -værdi. Poincaré definerede nu følgende:

Euklid	øvre halvplans-modellen
planet	det øvre halvplan
punkterne	punkterne i det øvre halvplan
de rette linjer	de halvcirkler som har centrum på x -aksen. eller de rette linjer som står vinkelret på x -aksen.

Det er vigtigt at x -aksen ikke er en del af det hyperbolske plan. På figur 8.17 er der vist nogle eksempler på hyperbolske linjer i øvre halvplan:



Figur 8.17: Eksempler på hyperbolske linjer i halvplans-modellen.

Vinklen mellem to hyperbolske linjer i halvplans-modellen er, som i skive-modellen, den vinkel, der dannes af tangenterne til de hyperbolske linjer i deres skæringspunkt.

Følgende opgaver kan bruges til at udforske modellen:

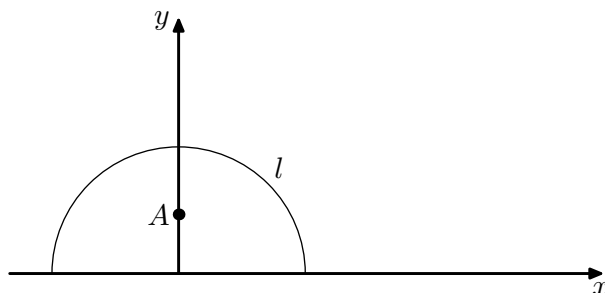
Opgave 8.8.1. Beskriv, ved hjælp af sædvanlige euklidiske konstruktioner, hvordan den hyperbolske linje gennem to punkter i øvre halvplan kan trækkes.

Opgave 8.8.2.

1. Vælg (valgfrit) tre punkter A , B og C i den øvre halvplan.
2. Konstruer den hyperbolske trekant ABC .
3. Mål vinklerne i ABC og find trekantens vinkelsum.

Opgave 8.8.3. Forsøg at gennemføre beviset for Legendres 2 sætning i øvre halvplans-modellen. Det kan hjælpe at se på afsnit 8.3.

Opgave 8.8.4. Betragt følgende figur, hvor l er en hyperbolsk linje:



Figur 8.18:

1. Hvilke hyperbolske linjer gennem A skærer l , og hvilke skærer ikke l ?
2. Hvor ligger den hyperbolske linje, der adskiller de skærende fra de ikke-skærende?
3. Hvordan konstrueres de to hyperbolske linjer, som er L-parallelle til l ?
4. Tegn den hyperbolske linje, som står vinkelret på l , og som går gennem A .
5. Sammenlign med Lobatjevskijs figur 7.2.
6. Hvor kan vinklen $\pi(p)$ aflæses, og hvor kan længden p aflæses?

Opgave 8.8.5.

1. Gør rede for, at rette linjer i øvre halvplans-modellen kan parametriseres som:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(t) + k \\ r \sin(t) \end{pmatrix} \quad (8.8.1)$$

hvor $t \in]0; \pi[$.

2. Betragt nu følgende afbildning:

$$(x, y) \rightarrow \left(\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1 + 2y} \right), \left(\frac{-2x}{x^2 + y^2 + 1 + 2y} \right) \right) \quad (8.8.2)$$

Gør rede for, at afbildningen vil sende ethvert punkt fra øvre halvplan ind i C . Her er C cirkelskiven med centrum i $(0, 0)$ og radius 1. (hint: hvis (x, y) ligger i øvre halvplan så er $y > 0$).

3. Afbildningen sender altså punkter fra det øvre halvplan til en cirkelskive. Indsæt nu parameter fremstillingen for hyperbolske linjer (8.8.1) i afbildningen (8.8.2), således at følgende udtryk fremkommer:

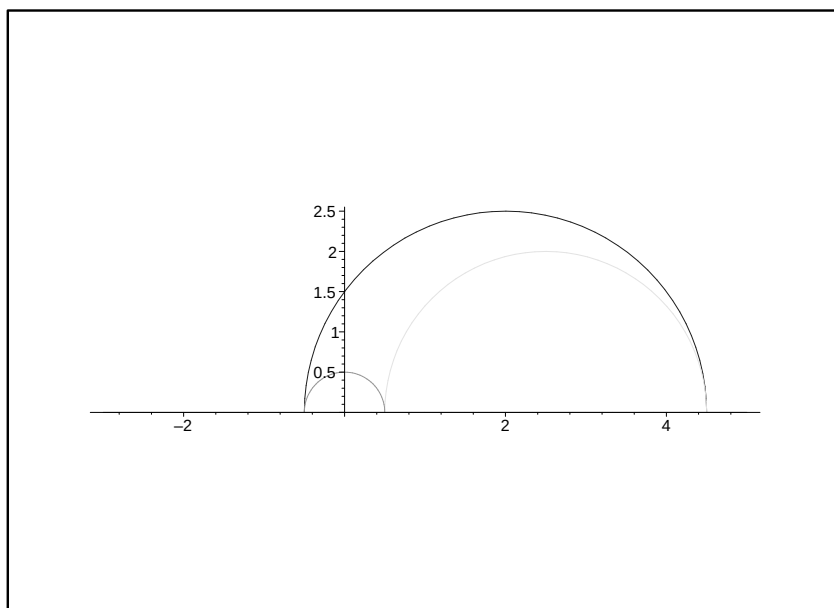
$$x(t) = \frac{r^2 + k^2 + 2kr \cos(t) - 1}{r^2 + k^2 + 2kr \cos(t) + 1 + 2 \sin(t)}$$

og

$$y(t) = \frac{-2r \cos(t) - 2k}{r^2 + k^2 + 2kr \cos(t) + 1 + 2 \sin(t)}$$

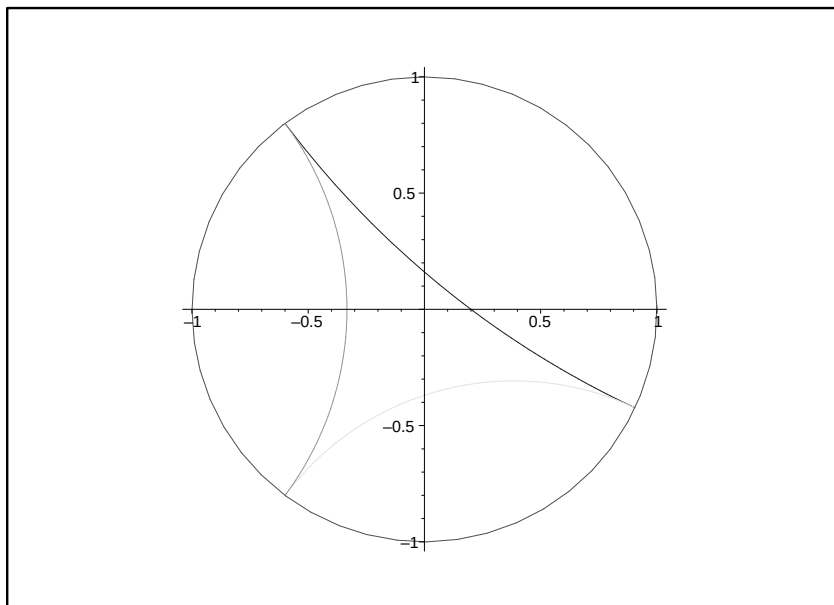
4. Brug et computerprogram (f.eks Maple) til at undersøge, om denne parameterfremstilling kan opfattes som hyperbolske linjer i $\mathcal{C}$.

Afbildningen fra opgave 8.8.5 er faktisk en afbildning fra Poincarés skive-model til Poincarés halvplans -model. Afbildningen sender hyperbolske linjer over i hyperbolske linjer. På figur 8.19 ses tre hyperbolske linjer i øvre halvplan:



Figur 8.19: Tre rette linjer i øvre halvplan, hvor r er $\frac{1}{2}$; 2 og 2,5 og tilhørende k er 0; 2,5 og 2.

Ved hjælp af matematikprogrammet Maple og afbildningen fra opgave 8.8.5 får man følgende billede:



Figur 8.20: Billedet af de tre halvcirkler fra øvre halvplan, som det ser ud i enheds-cirkelskiven.

Kommentar til læreren. Den afbildning, som bruges i opgave 8.8.5, er den komplekse funktion:

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

Denne kan omskrives til koordinat-form ved hjælp af udregningen:

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1+2b} + i \frac{-2a}{a^2+b^2+1+2b}$$

hvor

$$z = a + ib$$

Afbildningen er vinkelbevarende (konform). Der findes en tilsvarende afbildning af den åbne cirkelskive ind i det højre halvplan (altså hvor $x > 0$):

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

Man kan læse om disse afbildninger i Rudin side 299, [10].

Kapitel 9

Arealet af ikke-euklidiske trekanter

I afsnit 6.3 fandt vi en formel for, hvordan man ud fra vinklerne i en sfærisk trekant kan finde arealet af trekanten. Vi vil nu lave nogle tilsvarende overvejelser om areal af trekanter i den ikke-euklidiske geometri. For at illustrere hvad der foregår i de følgende udregninger, lader vi den trekant, vi ser på, ligge i Poincarés skive-model. Egentlig er udregningerne og konstruktionerne også mulige i alle andre modeller af den ikke-euklidiske plan. I euklidisk og sfærisk geometri er det ikke noget problem at forestille sig, hvad arealet af en figur er for noget. I ikke-euklidisk geometri har vi imidlertid mistet den del af intuitionen. Derfor skal vi først gøre os nogle overvejelser om, hvad vi mener med *areal*.

9.1 Areal

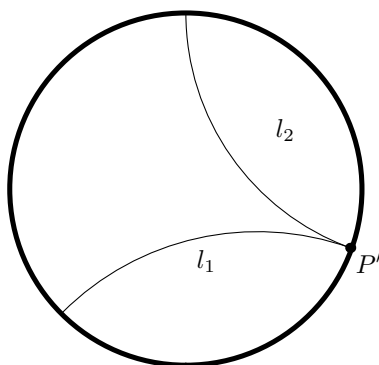
Et areal er et tal, vi vil knytte til en figur, for at beskrive den. I det følgende vil vi bruge ordet *polygon* i stedet for *figur*. Et polygon er en figur, hvor siderne er rette linjer. F.eks. er en trekant et polygon. Til alle polygoner vil vi altså knytte et tal, som vi vil kalde polygonets *areal*. Dette gøres med areal-funktionen, som betegnes $A(P)$. Her henviser P til polygonet. Vi opstiller nogle postulater for denne areal-funktion $A(P)$:

1. For alle polygoner P skal $A(P) > 0$.
2. Hvis et polygon P er begrænset, skal $A(P)$ være endeligt (dvs. ikke uendeligt).
3. Hvis et polygon P opdeles i to polygoner P_1 og P_2 , skal $A(P) = A(P_1) + A(P_2)$.
4. Hvis to polygoner P_1 og P_2 er kongruente, skal $A(P_1) = A(P_2)$.

Disse postulater passer særdeles fint med den intuitive opfattelse, vi har af *areal*. M.h.t. punkt 2 skal det bemærkes, at man godt kan forestille sig en figur, som ikke er begrænset. F.eks. er de asymptotiske trekanter, vi så i afsnit 7.8, ikke begrænsede. Vi kan derfor (foreløbigt) ikke være sikre på, at arealet af disse asymptotiske trekanter er endeligt.

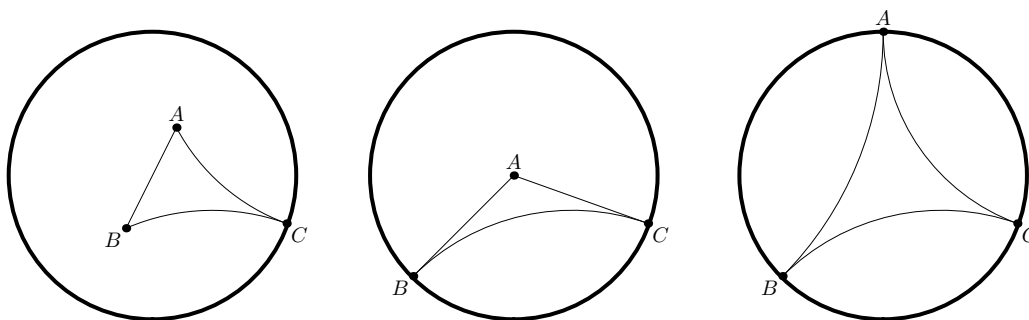
9.2 Arealet af asymptotiske trekanter

Vi har set, at selve kanten af Poincaré-skiven ikke er en del af det hyperbolske plan. Et punkt P' som ligger på cirkelperiferien, er altså ikke et punkt i den ikke-euklidiske geometri. Lad nu l_1 og l_2 være to hyperbolske linjer, som mødes i punktet P' .



Figur 9.1: To rette linjer l_1 og l_2 nærmer sig asymptotisk hinanden.

Da P' ikke er et punkt i den ikke-euklidiske geometri, vil linjerne l_1 og l_2 aldrig mødes, blot komme tættere og tættere på hinanden. Man siger, at linjerne nærmer sig hinanden asymptotisk, og at de er L-parallelle. Man kan nu forestille sig en slags trekanter, hvor et eller flere af hjørnerne ligger på cirkelperiferien således, at to eller tre af trekantens sider er L-parallelle. Hvis et hjørne ligger på cirkelperiferien, kaldes trekanten for enkelt-asymptotisk, hvis to kaldes trekanten for dobbelt-asymptotisk og hvis tre kaldes trekanten triple-asymptotisk. Disse asymptotiske trekanter blev kort omtalt i afsnit 7.8.



Figur 9.2: Enkelt-asymptotisk trekant, dobbelt-asymptotisk trekant og triple-asymptotisk trekant. Vinkler, hvor spidsen ikke er asymptotisk, kaldes for en *egentlige vinkler*.

Fra sætning 7.8.1 ved vi, at to dobbelt-asymptotiske trekanter er kongruente, hvis de egentlige vinkler er lige store. Da arealet af to kongruente trekanter skal være det samme, konkluderer vi, at arealet af en dobbelt-asymptotiske trekant kun afhænger af den egentlige vinkel v . Arealet af en trekant ABC betegner vi med $T_{\triangle ABC}$. Hvis $\triangle ABC$ er dobbelt-asymptotisk med den egentlige vinkel v , kan arealet findes som en funktion af v :

Sætning 9.2.1. *Arealet af en dobbelt-asympotisk trekant er en funktion af den egentlige vinkel v :*

$$T_{\triangle ABC} = f(180^\circ - v)$$

Funktionen f er lidt mærkeligt valgt, idet vi skal indsætte $(180^\circ - v)$ i stedet for v , men det vil senere vise sig at være smart. Det viser sig også, at arealet af en enkelt asympotisk trekant er endeligt på trods af, at den er ubegrænset:

Sætning 9.2.2. *Arealet af enhver enkelt-asympotisk trekant er endeligt.*

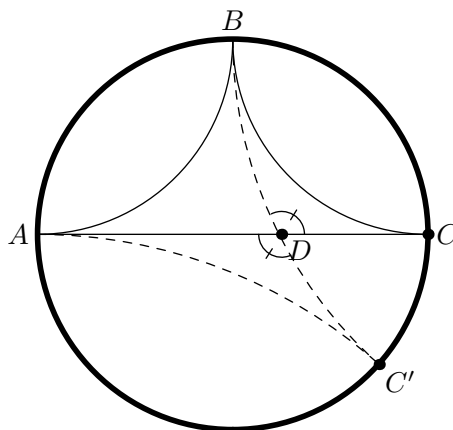
Vi vil ikke bevise sætningen her, men et bevis kan findes i [4] side 134-136. Ideen i beviset er at opdele den enkelt asympotiske trekant i uendeligt mange firkanter, som så alle sammen kan pakkes ind i en endelig firkant.

Opgave 9.2.3. * Gør rede for, at enhver dobbelt-asympotisk trekant kan inddeles i to enkelt-asympotiske trekanter. Gør rede for, at arealet af en dobbelt-asympotisk trekant er endeligt.

Ved hjælp af udtrykket 9.2.1 og opgave 9.2.3 kan vi bevise følgende sætning:

Sætning 9.2.4. *Alle triple-asympotiske trekanter har samme areal, og dette areal er endeligt.*

Bevis. lad nu ABC være en triple-asympotisk trekant i Poincaré-skiven:



Figur 9.3:

Hjørnet C tænkes nu flyttet til C' således, at der dannes en ny triple-asympotisk trekant ABC' (se figur 9.3). Siderne BC' og AC vil nu skære i D . Vi observerer nu følgende:

1. $\triangle ABC$ er opdelt i to dobbelt-asympotiske trekanter $\triangle ABD$ og $\triangle BDC$, som hver især har endeligt areal (opgave 9.2.3). Derfor har $\triangle ABC$ endeligt areal.
2. $\angle CDB = \angle ADC'$, da de er topvinkler (Euklid 15).

3. $T_{\triangle CDB} = f(180^\circ - \angle CDB) = f(180^\circ - \angle ADC') = T_{\triangle ADC'}$.
4. $\triangle ABD$ er fælles for de to triple-asymptotiske trekanter.
5. $T_{\triangle ABC} = T_{\triangle ABD} + T_{\triangle CDB} = T_{\triangle ABD} + T_{\triangle ADC'} = T_{\triangle ABC'}$

Så de to triple-asymptotiske trekanter har altså samme areal. Hvis det ene hjørne af en triple-asymptotisk trekant flyttes langs kanten således, at den danner en ny triple-asymptotisk trekant, så vil disse have samme areal. Ved på den måde at flytte hjørner, kan man komme igennem alle de triple-asymptotiske trekanter, der findes. Derfor har de alle samme areal. $\square$

9.3 Bolyai og Gauss

Frakas Bolyai, far til Janos Bolyai (se afsnit 7.10), var også matematiker. Den unge Janos fik lov til at udgive sine opdagelser om den ikke-euklidiske geometri som et tillæg til en af Frakas' bøger.



Frakas Bolyai 1775-1856.

Frakas sendte et brev til tidens (og måske alle tiders) største matematiker Karl Friedrich Gauss. Her fortalte han om sønnens nye geometriske opdagelser og bad Gauss om at vurdere sønnens arbejde. Gauss og Frakas var gode venner fra deres studietid ved universitetet i den tyske by Göttingen, og Gauss var den største autoritet, når det gjaldt vurderingen af Janos' opdagelser.

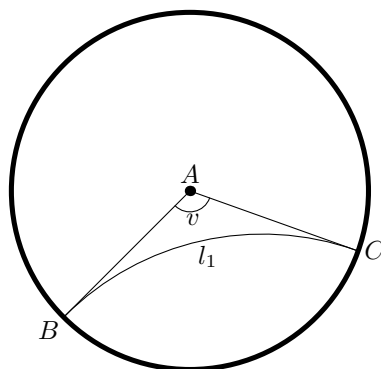


Karl Friedrich Gauss 1777-1855.

Gauss skrev tilbage, at han allerede selv havde tænkt disse tanker om en sådan *ikke-euklidisk geometri*. Han havde ikke udgivet noget om emnet, men han var kommet frem til de samme resultater som Janos. Janos blev naturligvis meget sur over svaret fra Gauss, og han publicerede aldrig efterfølgende noget om emnet. Det har senere vist sig, at Gauss faktisk talte sandt, og at han nogle år før Lobatjevskij og Janos Bolyai havde regnet på konsekvenserne af en geometri, der byggede på non- $P5$. Udregningerne, som vi her skal følge, stammer fra et brev fra 1832, som Gauss efterfølgende sendte til Frakas Bolyai.

9.4 Arealfunktionen

Vi følger her Gauss' udregninger. Lad A være et punkt i Poincaré-skiven og l_1 en linje, som ikke går igennem A . Man kan nu konstruere en enkelt-asymptotisk trekant, hvor A er den ene vinkelspids. Dette gøres ved at trække den rette linje, som er L -parallel til begge vinklens ben. At dette kan lade sig gøre er der redegjort for i afsnit 7.8. Vinklen ved A kalder vi v .

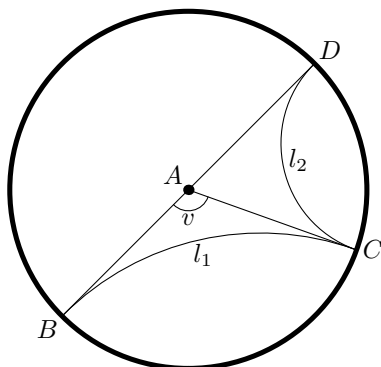


Figur 9.4: Dobbelt-asymptotisk trekant, konstrueret ud fra punktet A og linjen l_1 .

Arealet af trekanten kan nu bestemmes ud fra vinklen $(180^\circ - v)$, som sætning 9.2.1 angiver:

$$T_{\triangle BAC} = f(180^\circ - v) \quad (9.4.1)$$

Forlænges den ene af de ikke-asymptotiske sider, BA , får man et punkt på cirkelperiferien, som kaldes D . Gennem de to punkter C og D på cirkelperiferien kan man nu konstruere den rette linje l_2 . Herved har vi konstrueret en triple-asymptotisk trekant BCD , som er delt i to dobbelt-asymptotiske trekanter BCA og CAD .



Figur 9.5: Triple-asymptotisk trekant, som er sammensat af to dobbelt-asymptotiske trekanter.

Arealet af den triple-asymptotiske trekant BCD er nu bestemt ved:

$$T_{\triangle BCD} = T_{\triangle BAC} + T_{\triangle CAD} = f(180^\circ - v) + f(v) \quad (9.4.2)$$

Denne formel gælder for alle vinkler $v \in]0, 180^\circ[$. Fra sætning 9.2.4 ved vi, at alle triple-asymptotiske trekanter har samme areal, og dette areal kalder vi t . Vi kan derfor konkludere, at:

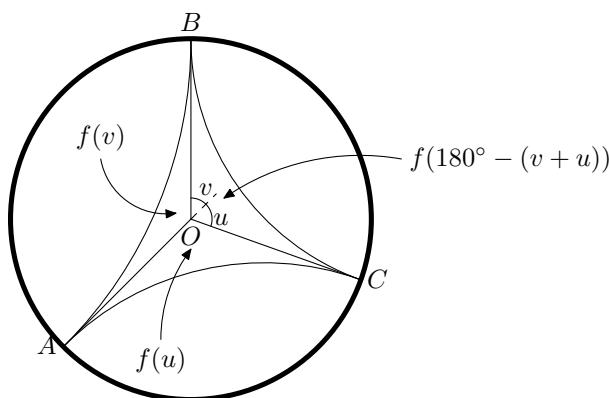
$$t = f(180^\circ - v) + f(v) \quad (9.4.3)$$

hvor $v \in]0, 180^\circ[$. Vi ser nu, hvad der sker, når vi sætter $v = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} t &= f(180^\circ - v) + f(v) = f(180^\circ - 90^\circ) + f(90^\circ) = 2 \cdot f(90^\circ) \\ \Updownarrow \\ \frac{1}{2}t &= f(90^\circ) \end{aligned}$$

Dette resultat får vi brug for senere.

Vi ser nu på en vilkårlig triple-asymptotisk trekant ABC . Punktet O ligger inden i trekanten. Vi kan nu konstruere tre dobbelt-asymptotiske trekanter AOB , AOC og BOC , som det ses på figur 9.6.



Figur 9.6: Den triple-asymptotiske trekant er delt op i tre dobbelt-asymptotiske trekanter.

Arealet af $\triangle AOB$ kan findes ud fra vinklen v :

$$T_{\triangle AOB} = f(v) \quad (9.4.4)$$

og arealet af $\triangle AOC$ kan findes ud fra vinklen u :

$$T_{\triangle AOC} = f(u) \quad (9.4.5)$$

Vi vil nu finde arealet af trekanten BOC ved hjælp af de to vinkler v og u . $\angle BOC$ er summen af vinklerne v og u , og arealet af trekant BOC er derfor:

$$T_{\triangle BOC} = f(180^\circ - (v + u)) \quad (9.4.6)$$

Arealet af den triple-asymptotiske trekant ABC er t , så vi har følgende sammenhæng:

$$t = T_{\triangle AOB} + T_{\triangle AOC} + T_{\triangle BOC} = f(v) + f(u) + f(180^\circ - (v + u)) \quad (9.4.7)$$

Da $(v + u) \in]0, 180^\circ[$ får vi ved at indsætte i formel 9.4.2 at:

$$f(180^\circ - (v + u)) + f(v + u) = t \quad (9.4.8)$$

Ved nu at sammensætte 9.4.7 og 9.4.8 får vi:

$$t = f(v) + f(u) + t - f(v + u) \iff f(v) + f(u) = f(v + u) \quad (9.4.9)$$

for $u, v, (u + v) \in]0, 180^\circ[$.

Vi har nu to vigtige observationer om funktionen f :

1. $f(90^\circ) = \frac{1}{2}t$
2. $f(v) + f(u) = f(v + u)$

En funktion, der opfylder punkt 2, kaldes for en additiv funktion. Vi vil i næste afsnit undersøge denne type funktion nærmere. Vi har endnu to observationer om funktionen f :

3. f er en kontinuert funktion af vinklen v
4. f afhænger af størrelsen af Poincaré-skiven, dvs. af radius af skiven.

9.5 Additive-funktioner

I dette afsnit vil vi vise følgende resultat for den additive funktionen f , som er beskrevet i afsnit 9.4.

Sætning 9.5.1. For den additive kontinuerte funktion f , som er defineret på intervallet $]0, 180^\circ[$, gælder at:

$$f(rx) = r \cdot f(x)$$

hvis $rx \in]0, 180^\circ[$, $x \in]0, 180^\circ[$ og $r \in \mathbb{R}_+$.

Vi kan først overveje, hvad der sker, hvis r er et helt tal. Hvad vil der f.eks. ske, hvis $r = 2^\circ$?

$$f(2^\circ) = f(1^\circ + 1^\circ) = f(1^\circ) + f(1^\circ) = 2 \cdot f(1^\circ) \quad (9.5.1)$$

Hvis $v = 3^\circ$ kan man bruge samme trick:

$$f(3^\circ) = f(1^\circ + 2^\circ) = f(1^\circ) + f(2^\circ) = f(1^\circ) + 2 \cdot f(1^\circ) = 3 \cdot f(1^\circ) \quad (9.5.2)$$

Så længe vinklen er et helt, tal som ligger i intervallet $]0, 180^\circ[$, vil man kunne bruge denne fremgangsmåde, og man får derfor:

$$f(n^\circ) = n \cdot f(1^\circ) \quad (9.5.3)$$

for $n \in \mathbb{N}$.

Ved samme tankegang indser man følgende:

$$f(nx) = f(\underbrace{x+x+\cdots+x}_n) = \underbrace{f(x)+f(x)+\cdots+f(x)}_n = n \cdot f(x) \quad (9.5.4)$$

hvor $n \in \mathbb{N}$ og $nx \in]0, 180^\circ[$.

Vi vil nu se, hvad der sker, når r er en brøk. Først observeres følgende:

$$f\left(\frac{a}{b}x\right) = f\left(a \cdot \frac{1}{b}x\right) = a \cdot f\left(\frac{1}{b}x\right) \quad (9.5.5)$$

da a jo er et helt tal. Vi mangler nu at finde ud af, hvad der sker med $f(\frac{1}{b}x)$ og for at finde ud af det, laver vi følgende omskrivning:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(b \cdot \frac{1}{b}x\right) = b \cdot f\left(\frac{1}{b}x\right) \\ \Downarrow \\ \frac{1}{b} \cdot f(x) &= f\left(\frac{1}{b}x\right) \end{aligned}$$

Vi har altså nu følgende:

$$f\left(\frac{a}{b}x\right) = a \cdot f\left(\frac{1}{b}x\right) = \frac{a}{b} \cdot f(x) \quad (9.5.6)$$

Vi har nu vist følgende resultat:

$$f(qx) = q \cdot f(x) \quad (9.5.7)$$

når $qx \in]0, 180^\circ[$ og $q \in \mathbb{Q}_+$. Vi har altså vist sætning 9.5.1, når r er et helt positivt tal eller en positiv brøk. Det er lidt mere besværligt at vise resultatet for alle positive reelle tal. Vi vil ikke lave beviset her, men det kan findes i [4] side 196-197. Det er i denne del af beviset, man har brug for oplysningen om, at f er kontinuert.

9.6 Arealfunktionen

Lad os se på, hvad vi nu ved om denne arealfunktion f .

1. $f(90^\circ) = \frac{1}{2}t$
2. $f(v) + f(u) = f(v+u)$
3. $f(rx) = r \cdot f(x)$ for $r, rx \in]0, 180^\circ[$ og $r \in \mathbb{R}_+$

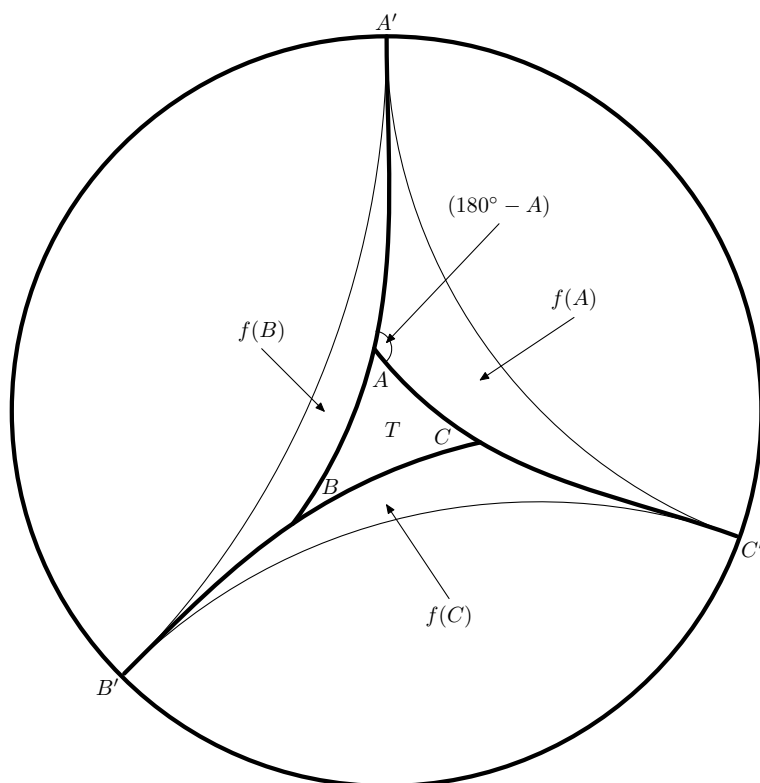
Ved hjælp af punkt 1 og punkt 3 kan vi finde et nyttigt udtryk for $f(v)$:

$$f(v) = f\left(\frac{v}{90^\circ} \cdot 90^\circ\right) = \frac{v}{90^\circ} \cdot f(90^\circ) = \frac{v}{90^\circ} \cdot \frac{1}{2}t = \frac{v}{180^\circ} \cdot t \quad (9.6.1)$$

her er t arealet af en triple-asymptotisk trekant.

9.7 Arealet af en vilkårlig trekant

Vi er nu klar til at finde arealet af en vilkårlig ikke-euklidisk trekant. Vi forestiller os en trekant i Poincaré-skiven (figur 9.7). Trekanten kaldes for ABC . Linjestykket AC forlænges til C' 's side, som det ses på figuren.



Figur 9.7: Den ikke-euklidiske trekant ABC . Siderne AC , CB og BA forlænges til den ene side. Herved kan man konstruere en triple-asymptotisk trekant $A'B'C'$.

Siderne CB og BA forlænges på tilsvarende måde. Herved har vi tre punkter på cirkelperiferien, som vi kalder A' , B' og C' . Ud fra disse tre punkter kan vi konstruere en triple-asymptotisk trekant $A'B'C'$, som det ses på figur 9.7.

Ved at betragte figuren ses det at følgende ligning kan opstilles:

$$t = f(A) + f(B) + f(C) + T_{\triangle ABC} \quad (9.7.1)$$

hvor T er arealet af trekanten ABC . Ved nu at bruge 9.6.1 kan vi regne videre:

$$\begin{aligned} t &= \frac{A}{180^\circ}t + \frac{B}{180^\circ}t + \frac{C}{180^\circ}t + T \\ \Updownarrow \\ t &= \frac{A+B+C}{180^\circ}t + T \\ \Updownarrow \\ T &= t - \frac{A+B+C}{180^\circ}t = \left(\frac{180^\circ - (A+B+C)}{180^\circ} \right)t \end{aligned}$$

Vi har nu vist følgende resultat for arealet af en ikke-euklidisk trekant:

Sætning 9.7.1. *Arealet af en ikke-euklidisk trekant er givet ved:*

$$T = \left(\frac{180^\circ - (A+B+C)}{180^\circ} \right)t$$

hvor t er en positiv konstant, som også er arealet af de triple-asymptotiske trekanter.

Ligheden med formel 6.3.1 er tydelig. Da vi har forudsat, at arealet er større end nul, kan vi ved hjælp af sætning 9.7.1 konkludere:

Sætning 9.7.2. *Vinkelsummen i enhver ikke-Euklidisk trekant er mindre end 180° .*

Kapitel 10

Og hvor blev vores verden af?

Grunden til, at vi i kapitel 1 startede med at interessere os for geometri, var, at vi ville undersøge det fysiske rum (se side 3). Vi har i alle de foregående kapitler set på tre forskellige geometrier, som alle er matematisk mulige eller konsistente: den euklidiske geometri, den sfæriske geometri og til sidst den ikke-euklidiske geometri. De overvejelser, vi har gjort os, har været meget abstrakte, og det er her ved enden meget nærliggende at undre sig over, hvordan disse abstrakte overvejelser skal opfattes i forhold til vores forståelse af rummet.

10.1 Fra 2 dimensioner til 3 dimensioner

De tre typer geometri, vi i de foregående kapitler har set på, er alle to-dimensionale geometrier. Sfærisk geometri foregår godt nok på overfladen af en 3-dimensional kugle, men selve overfladen af en kugle er også to-dimensional. Vi har set, at de tre geometrier bl.a. adskiller sig ved vinkelsummen i en trekant:

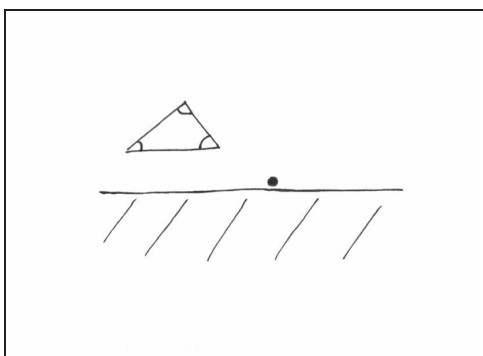
Mulige geometrier:		Vinkelsummen i en trekant:
Euklidisk	flad geometri	180°
Sfærisk	elliptisk geometri	$> 180^\circ$
Ikke-euklidisk	hyperbolsk geometri	$< 180^\circ$

I slutningen af 1800-tallet fandt matematikerne på at lave en masse forskellige geometrier. De tre typer, vi har set på, adskiller sig fra mængden ved, at de er de eneste geometrier, hvor man kan flytte en trekant uden at ændre på vinklerne og siderne. Man siger, at disse tre geometrier har konstant *krumning*. Den euklidiske geometri kan udvides til tre dimensioner, som vi kender det fra sædvanlig rum-geometri. Det viser sig, at det også er muligt at udvide sfærisk geometri og ikke-euklidisk geometri til tre dimensioner. Udvidelsen til tre dimensioner af de to sidste geometrier er vanskelig at forestille sig. F.eks skal udvidelsen af sfærisk geometri ses som geometrien på overfladen af en 4-dimensional kugle.

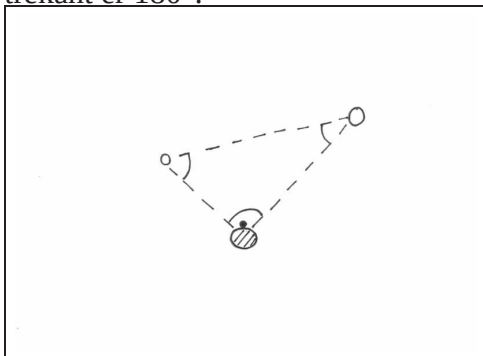
10.2 Prikkers-rum-filosofi

For at få en idé om, hvordan et krumt tre-dimensionalt rum skal forstås, går vi nu én dimension ned. Vi vil nu se, hvordan en to-dimensional prik oplever det rum, den lever i. En prik er altså i denne sammenhæng et væsen, som lever i 2 dimensioner og rumligt kun kan forstå to dimensioner. En prik er altså flad og prikkens rum er to-dimensionalt. For at forklare, hvordan prikkens rum-forståelse ændrede sig igennem tiden, er der i næste afsnit (10.3) en lille tegneserie om prikken (næste side).

10.3 Historien om prikkerne

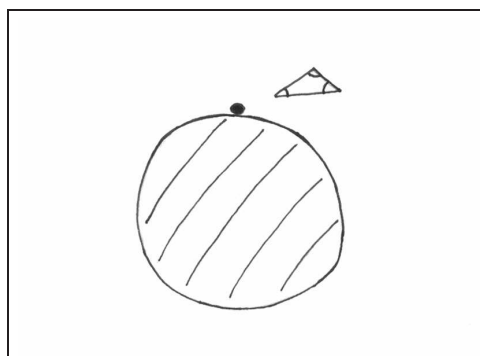


Først troede prikkerne, at de boede på en flad linje i et to-dimensionalt rum. Prikkerne kunne lave geometri i to dimensioner, hvor vinkelsummen i en trekant er 180° .

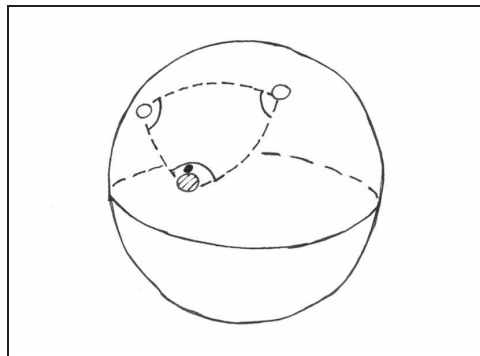


Prikkernes geometri kunne dog stadig bruges. Prikkerne kunne bruge geometrien til at finde afstanden til andre cirkler i det to-dimensionale verdensrumme.

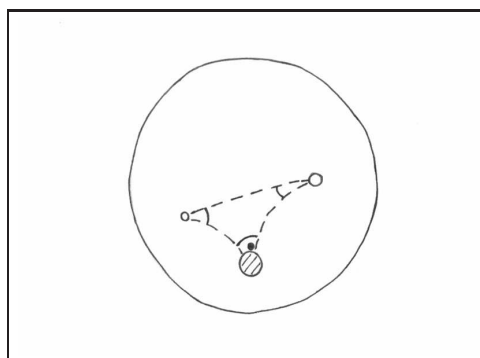
Prikkerne havde meget svært ved at forestille sig denne tre dimensionale kugle. De var jo kun vant til at tænke i to dimensioner. Men de kunne ikke finde nogle argumenter, der kunne udelukke kuglen som en mulighed. Endnu mere kompliceret blev det den dag, en af prikkerne foreslog, at prikkernes verden var en Poincaré-skive, hvor vinkelsummen i en trekant er mindre end 180° . Der var nu tre muligheder for prikkernes geometri.



En dag gik det op for prikkerne, at de boede på en cirkel. Cirklen var bare så stor, at prikkerne havde troet at den var en flad linje.



En dag var der en prik, der foreslog at prikkernes rum lå på overfladen af en tre dimensional kugle. Her ville vinkelsummen i en trekant være større end 180° .



For at finde ud af, hvilken geometri der var den rigtige, var prikkerne nødt til at måle vinklerne i en stor trekant. Hvad vinkelsummen i den store trekant målte, melder historien ikke noget om.

10.4 Hvilken geometri lever vi så i?

Når vi skal afgøre, hvilken geometri rummet har, er vi nødt til at gå ud og måle. På samme måde som *prikkerne*, så kan vi måle vinkelsummen i en trekant og derved afgøre rummets natur. Det fortælles, at Gauss, efter opdagelsen af ikke-euklidisk geometri, regnede på vinkelsummen af en trekant, som var udspændt af tre bjergtoppe¹. Gauss kunne, inden for måleinstrumenternes usikkerhed, ikke afgøre, om vinkelsummen var over, under eller præcist 180° . Af sætning 9.7.1 så vi, at vinkeldefekten ($180^\circ - (A + B + C)$) er proportional med trekantens areal. En stor trekant vil altså fremhæve vinkeldefekten, hvis den er til stede, mere end en lille trekant. Lobatjevskij målte også, som Gauss, på en stor trekant udspændt af stjernen *Sirius* samt Jordens placering til to forskellige tidspunkter². Heller ikke her kunne der måles en afvigelse fra 180° , som lå inden for måleusikkerheden. Efter disse udregninger konkluderede Lobatjevskij, at det fysiske rum godt kan antages at være euklidisk eller fladt.

Den euklidiske geometri er altså en ganske god beskrivelse af rummet, så længe afstandene ikke er alt for store. Men hvad nu, hvis afstandene bliver endnu større end den trekant Lobatjevskij så på? Hvordan ser det så ud? Dette er et spørgsmål, som moderne astronomer og kosmologer beskæftiger sig med, og man er ikke kommet frem til et endeligt resultat.

10.5 Einsteins relativitets teori

I 1915 udgav den tysk fødte fysiker Albert Einstein den banebrydende *almene relativitets teori*. Einstein arbejder i denne teori med et 4-dimensionalt rum bestående af de tre rumlige koordinater og en fjerde koordinat, som er tiden. Dette rum kaldes rum-tiden. Ifølge relativitets teorien kan tyngdekraften beskrives som en krumning af rum-tiden. Når Jorden roterer omkring solen, er det altså ikke, fordi solen trækker i Jorden, men fordi Jorden hele tiden falder ned i det hul, som solens masse laver i rum-tiden.

Den fire-dimensionale rum-tid er et rum, som krummer i nærheden af store masser. En af konsekvenserne af en sådan krumning er, at lys vil blive afbøjet, når det passere store masser som f.eks. solen (det antages, at lys vil følge rette linjer i rummet, dvs. den korteste vej). Allerede i 1919 kunne man eksperimentelt afgøre, at lys faktisk blev afbøjet, når det passerede solen, og at rummet derfor krummer i nærheden af store masser.

Rummet er altså krumt i lokale områder omkring store masser. Der findes steder i universet, hvor der er ekstremt stor masse på et meget lille område, såkaldte sorte huller. Rummets geometri i nærheden af sådanne sorte huller er i en vis forstand ikke-euklidisk.

Vores interesse har dog ikke været sådanne lokale egenskaber ved rummet. Vi har fokuseret på geometrien af det globale billede. Hvilken karakter, den globale geometri

¹[11] side 872

²[1] side 95.

har, er afhængigt af den samlede masse i hele rummet. Dette spørgsmål er endnu ikke afgjort.

Kapitel 11

Appendix

11.1 Modstrids beviser

Et *modstrids bevis* eller et *indirekte bevis* er type bevis, som bruges meget ofte hos Euklid (og i meget anden matematik). Modstrids beviser kan være meget forskellige, men de bygger alle på den samme overordnede strategi. Strategien kan beskrives på følgende måde:

1. Starter med et udsagn $\mathcal{P}$.
2. Laver helt korrekte udregninger, hvor $\mathcal{P}$ indgår.
3. Kommer frem til noget, som er åbenlyst forkert, som f.eks. at $2 = 1$.
4. Så må udsagnet $\mathcal{P}$ være forkert.

Ideen med et modstrids-bevis er nu, at man lader $\mathcal{P}$ være det modsatte af det, man ønsker at bevise. Når $\mathcal{P}$ er falsk, er man kommet frem til det, man ønskede.

Eksempel 11.1.1. Vi vil nu se et simpelt eksempel på et modstrids bevis. Undervejs i beviset henvises der til punkter fra ovenstående opdeling af argumentet¹:

Sætning 11.1.2. For alle $n \in \mathbb{N}$ gælder:

$$n^2 \text{ er et lige tal} \Rightarrow n \text{ er et lige tal} \quad (11.1.1)$$

Bevis. Vi vil gerne bevise, at n er et lige tal. Vi vil nu antage det modsatte af det, vi gerne vil bevise (punkt 1), dvs:

$$\mathcal{P} : n \text{ er ulige} \quad (11.1.2)$$

¹Eksemplet er hentet fra [23] side 56

Vi vil nu lave udregninger, hvor udsagnet $\mathcal{P}$ indgår (punkt 2). Da n er ulige, må der findes et helt tal k , så:

$$n = 2k + 1 \quad (11.1.3)$$

og regnes der videre på dette, får man:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 1 + 4k = (4k^2 + 4k) + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \quad (11.1.4)$$

hvorved det ses, at n^2 er et ulige tal. Men vi ved jo også, at n^2 er et lige tal. Vi er nu kommet frem til noget, som er åbenlyst forkert (punkt 3). Et tal kan ikke både være lige og ulige. Så er $\mathcal{P}$ forkert (punkt 4), n er derfor lige og sætningen er bevist. $\square$

11.2 Brug af litteratur

Kapitel 2:

Jeg har hovedsageligt brugt Thyra Eibes danske oversættelse af *Euklids Elementer* [5] og en engelsk kommenteret oversættelse af Heath [14]. Mine kilder til afsnittet om underforståede aksiomer har primært været [9] og [3].

Kapitel 4:

For faktuelle oplysninger om de historiske personer har jeg brugt DSB [26]. I forbindelse med Al-Tusi og Wallis har min primære kilde været Bonola [1], og til Legendre-delen har den primære kilde været [6] hvor Legendres oprindelige bevis er oversat til engelsk. Med hensyn til fremstillingen af Legendre, har jeg været meget inspireret af fremstillingen i Erik Kristensens: *Ikke-Euklidisk Geometri*[4].

Kapitel 7:

Min primære kilde har her været den danske oversættelse af Lobatjevskijs *Geometriske Undersøgelser over Teorien for Parallelle Linier* [7]. Fremstillingen er inspireret af Erik Kristensens: *Ikke-Euklidisk Geometri*[4].

Kapitel 8:

Den primære kilde har været Marvin Jay Greenbergs *Euclidean and Non-Euclidean Geometries - Development and History* [3].

Kapitel 9:

Den primære kilde er Gauss' oprindelige brev, som kan findes i [17]. Igen er fremstillingen inspireret af Erik Kristensens: *Ikke-Euklidisk Geometri*[4].

Kapitel 10:

Kilderne til afsnittet om relativitetsteori har hovedsageligt været [2], [25], [24] og [12].

Del II

Didaktiske overvejelser

Kapitel 12

Hensigter

Jeg vil i dette kapitel beskrive de hensigter, jeg har haft med inspirationsmaterialet i de foregående kapitler. Jeg vil beskrive, hvilke oplevelser jeg forestiller mig, at en gymnasieelev kan få ved at læse materialet og overveje, hvorfor netop ikke-euklidisk geometri og dennes historie er interessant med henblik på undervisning af unge mennesker. Jeg vil i denne forbindelse undervejs komme ind på, hvilke matematiske kompetencer der vil blive stimuleret ved at læse materialet. Jeg holder mig her til de otte undergrupper som matematisk kompetence er opdelt i. Denne opdeling er beskrevet i KOM-arbejdsgruppens rapport 'Kompetencer og matematiklæring' [18].

I det efterfølgende kapitel 13 vil jeg beskrive de enkelte erfaringer, jeg har med at undervise elever på gymnasialt niveau i ikke-euklidisk geometri. Til sidst vil jeg i kapitel 14 overveje, om eleverne faktisk fik de oplevelser, jeg ønskede, og om man overhovedet kan forvente, at elever på gymnasieniveau kan få de ønskede oplevelser.

Kompetencer

I KOM-arbejdsgruppens rapport [18] beskrives matematisk kompetence som:

... en matematisk kompetence er indsigtfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematisk udfordring ([18] side 43).

Jeg vil kort skitsere de otte kompetencer, som matematisk faglighed opdeles i. Beskrivelsen er hentet direkte fra KOM-arbejdsgruppens rapport.

Tankegangskompetencen

Kompetencen består i at være klar over, hvilke slags spørgsmål som er karakteristiske for matematikken, i selv at kunne stille sådanne spørgsmål, og i at have blik for hvilke typer af svar som kan forventes. At håndtere givne matematiske begrebers rækkevidde og begrænsning. At forstå hvad der ligger i generalisering af matematiske resultater.

At kunne skelne, både passivt og aktivt, mellem forskellige slags matematiske udsagn, påstande, betingede udsagn, definitioner, sætninger og formodninger ([18] side 47).

Problembehandlingskompetencen

Kompetencen består i at kunne opstille, detektere, formulere, afgrænse og præcisere forskellige slags matematiske problemer. At kunne løse sådanne matematiske problemer i færdigformuleret form ([18] side 49).

Modeleringskompetencen

Kompetencen består i at kunne analysere grundlaget for og egenskaber ved foreliggende modeller. At kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed. At kunne udføre aktiv modelbygning i en given sammenhæng, dvs. at bringe matematik i spil og anvendelse til behandling af anliggender uden for matematikken selv ([18] side 52).

Ræsonnementskompetencen

Kompetencen består i at kunne følge og bedømme et matematisk ræsonnement. At forstå hvad et matematisk bevis er. At kunne udtænke og gennemføre ræsonnementer på basis af intuition ([18] side 54).

Repræsentationskompetencen

Kompetencen består i at kunne forstå og betjene sig af forskellige slags repræsentationer af matematiske objekter, fænomener, problemer eller situationer. At kunne forstå de indbyrdes forbindelser mellem forskellige repræsentationsformer for det samme sagsforhold ([18] side 57).

Symbol- og formalismekompetencen

Kompetencen består i at kunne afkode symbol- og formelsprog. At kunne behandle og betjene sig af symbolholdige udsagn og udtryk. At have indsigt i karakteren af og 'spillereglerne' for formelle matematiske systemer (typisk aksiomatiske teorier) ([18] side 59).

Når jeg efterfølgende omtaler denne kompetence vil det være i forbindelse med den sidstnævnte del vedrørende aksiomatisk teori.

Kommunikationskompetencen

Kompetencen består i at kunne sætte sig ind i og fortolke andres matematikholdige tekster. At kunne udtrykke sig på forskellige måder og på forskellige niveauer af teoretisk eller teknisk præcision om matematikholdige anliggender ([18] side 61).

Hjælpemiddelkompetencen

Kompetencen består i at have kendskab til eksistensen og egenskaberne ved diverse former for relevante redskaber til brug for matematisk virksomhed og have indblik i deres muligheder og begrænsninger i forskellige slags situationer. At betjene sig af sådanne hjælpemidler ([18] side 62).

Kompetencerne i sammenspil

Det er klart, at det kun er meget få situationer, som blot kræver eller stimulerer en enkelt af de otte kompetencer. For det meste vil man se et sammenspil mellem to eller flere af kompetencerne. I det følgende vil jeg fremhæve, hvilke kompetencer der hovedsageligt bliver brugt i en given situation.

Et historisk forløb

Jeg har fra projektets start været bevidst om, at jeg ville lægge en historisk vinkel på materialet. Ikke for at pakke emnet pænt ind eller gøre matematikken lettere at sluge, men fordi jeg synes historien er rigtig god og afspejler nogle vigtige aspekter ved den ikke-euklidiske geometri.

Både historisk og mere matematik-teknisk er *Euklids Elementer* det mest naturlige udgangspunkt. Dels er de nogle af de første seriøse geometriske værker, man kender, og dels beskriver de den flade geometri, som eleverne kender fra skolen.

Efterfølgerne (Al-Tusi, Wallis og Legendre) er taget med af flere grunde. For det første for at illustrere, hvordan Euklids stil føres videre. Derudover for at vise, hvordan tilgangen til geometri alligevel har ændret sig igennem historien. Og sidst, fordi de resultater, som de historiske personer kommer frem til (bevidst eller ubevidst), giver os en forståelse af problemets kerne. Her får eleverne brug for **kommunikationskompetencen**, når de skal sætte ind i og fortolke de forskellige matematikeres tankegang.

Derudover viser historien også, hvordan matematikken som videnskab har udviklet sig. Et vigtigt punkt i forbindelse med denne udvikling er, at få eleverne til at se, hvordan forskellige tilgange til det samme emne kan give vidt forskellige resultater. Jeg tænker her på de forskellige tilgange til *P5*: en udvikling fra at være sikker på *P5*s gyldighed (aksiom eller ej) til at kunne sætte spørgsmålstegn ved *P5* og overveje andre muligheder. At få indsigt i dette kræver **tankegangskompetence** hos eleverne.

Mit håb er, at eleverne når de er kommet igennem dette historiske forløb, har forstået, hvor vigtig Euklid er i matematikkens historie. Der ud over håber jeg, at eleverne forstår, hvordan matematik hele tiden videreudvikles ved, at matematikere tager forgangernes problemstillinger op og arbejder videre på dem.

Aksiomsystemet

Forståelse af ikke-euklidisk geometri hænger uløseligt sammen med forståelse af aksiomsystemet for geometrien. Jeg har derfor valgt at ligge stor vægt på, at eleverne skal forstå opbyggelsen af, nødvendigheden af og spillereglerne for geometriens aksiomsystem. Dette vil udfordre elevernes **symbol- og formalismekompetence** på et niveau, som de ikke er vant til fra hverdagens matematiktimer.

Helt naturligt har jeg i denne sammenhæng også lagt stor vægt på de forskellige ækvivalenser til *P5*. Eleverne skal forstå, at de ækvivalente postulater er forskellige, men at de dybest set har samme konsekvens for udfaldet, altså den resulterende geometri. Det kræver en temmelig abstrakt udnyttelse af **repræsentationskompetencen** at forstå, at de ækvivalente postulater i denne henseende er ens.

For at forstå aksiomsystemet og det geometriske system mener jeg, at det er af afgørende betydning, at eleverne ser systemet i brug. Det vil i første omgang sige, hvordan postulaterne blive brugt til at bevise sætninger, og senere hvordan sætninger, som allerede er vist, kan bruges til at bevise en ny sætning (**ræsonnementskompetencen**). Denne *sætning på sætning* -fremgangsmåde, som er typisk for Euklid, har jeg gerne ville fremhæve. Et sådant forløb har jeg fokuseret på i afsnit 2.5. For at gøre det nemmere for eleverne at følge brugen af postulater og sætninger, har jeg for det meste angivet, hvilket postulat eller hvilken sætning, der bliver brugt. Jeg kan være bange for, at læseren nemt kan fristes til ikke at konsultere de relevante sætninger og postulater tidligere i materialet. Hvis dette er tilfældet er der stor fare for, at læseren vil gå glip af nogle vigtige pointer, og at aksiomsystemets styrke derfor ikke bliver tydelig for læseren. Derfor har jeg vedlagt en oversigt over de postulater og sætninger, som bliver brugt mest. I beviset for de to sætninger af Legendre (afsnit 4.4) stiller jeg en opgave, hvor eleverne skal finde ud af, hvilke postulater der bruges, og hvornår de bruges. At løse denne opgave vil kræve en mere aktiv udnyttelse af **ræsonnementskompetencen**, end eleverne er vant til. De skal nemlig selv ind og vurdere, hvad bevisets enkelte skridt kræver og endda finde fejlen i Legendres anden sætning.

Beviserne og udregningerne er selvfølgelig nødvendige for at forstå emnet. Det er mit håb, at eleverne, når dette er gjort, alligevel kommer til at se ind bag ved alle de tekniske detaljer og forstå, hvilken matematisk struktur, der ligger som fundament (**symbol- og formalismekompetencen** i sammenspil med **tankegangskompetencen**).

Modeller

Hele forløbet med at forstå aksiomsystemet og indførelsen af ikke-euklidisk geometri er en temmelig abstrakt proces. Modellerne af den ikke-euklidiske geometri spiller en afgørende rolle som noget konkret at hænge denne abstrakte matematik op på.

Det er mit indtryk, at Poincarés skive-model er nemmere at forestille sig intuitivt i forhold til øvre halvplans-modellen. Konstruktionerne i skive-modellen er desværre meget vanskelige. Det kræver f.eks. en helt stribe (euklidiske) konstruktioner at trække

den rette linje igennem to punkter. Der er derfor en vis fare for, at pointerne med modellen vil forsvinde i tekniske problemer med at udføre konstruktionerne i praksis. Jeg har alligevel valgt at bruge skive-modellen som den primære model i materialet. Det har været mit mål, at læseren skal få et intuitivt forhold til, hvordan rette linjer ser ud i modellen. Opgaver, hvor eleven i praksis konstruerer rette linjer, er selvfølgelig med til at fremme denne intuitive forståelse. Gennemgangen af Legendres anden sætning (afsnit 8.3) i Poincarés skive-model er et eksempel på et forløb, hvor den intuitive fornemmelse kræves. Selve konstruktionerne af de hyperbolske linjer gennemføres ikke, og læseren skal have en intuitiv fornemmelse af, at noget sådant alligevel er muligt. Skridtet fra at kunne lave en konstruktion i praksis til at bruge oplysningen om, at konstruktionen er mulig, vil kræve en intuitiv brug af **tankegangskompetencen**.

Konstruktioner i øvre halvplans-modellen er meget nemmere at udføre i praksis. Jeg har derfor valgt at indføre modellen via opgaver. Her kan eleverne i højere grad end med skive-modellen udføre konstruktioner. F.eks. er det overkommeligt at gennemføre alle konstruktionerne i forbindelse med Legendres anden sætning (opgave 8.8.3). Jeg anser det for vigtigt, at eleverne selv arbejder med disse modeller, så de prøver det på deres egen krop. Det er oplagt, at øvre halvplans-modellen bruges i denne sammenhæng.

Hvis **modelleringskompetencen** skal nævnes i denne sammenhæng, bliver det i en lidt anden forstand, end man normalt vil gøre. Normalt vil man udvikle noget matematik til at beskrive en bestemt situation uden for matematikken. I denne her sammenhæng spiller modellerne en noget anden rolle. Modellerne er her noget, som giver mening til den matematik, som vi har udviklet. Det er i en vis forstand omvendt brug af **modelleringskompetencen**. Modellerne er en repræsentation af den ikke-euklidiske geometri, derfor sker forståelsen af modellerne også i sammenspil med **repræsentationskompetencen**.

Det er min egen erfaring, at jeg først rigtig forstår et matematisk emne, når jeg selv har arbejdet med det i praksis (ikke-euklidisk geometri inklusive). Jeg er overbevist om, at dette også vil gælde for hovedparten af eleverne i gymnasiet. Modellerne skal netop give eleverne denne oplevelse.

Konstruktion

Konstruktion med passer og lineal spiller en vigtig rolle i undervisningsmaterialet. De grundlæggende konstruktioner bliver indført som opgaver (opgaverne 2.4.6, 2.4.7 og 2.4.8), og det er min forestilling, at eleverne skal arbejde med opgaverne for derved at blive fortroelige med hvordan konstruktionerne foregår i praksis (**hjælpe-middelkompetencen**). Den måde, vi anvender konstruktionerne, i materialet er for det meste af mere abstrakt karakter. Konstruktionerne bliver brugt på følgende måde: det er muligt at konstruere den vinkelrette i A , lad nu AB være denne vinkelrette osv. Konstruktionerne kommer her til at indgå som en del af **ræsonnementskompetencen**. Det vigtige her er ikke, hvordan konstruktionen bliver udført, men kun det faktum at konstrukti-

nen kan lade sig gøre.

I kapitel 7, om ikke euklidisk geometri, bliver konstruktionerne brugt i den sidste forstand. Eleverne skal for det første forstå, at konstruktionerne er mulige i ikke-euklidisk geometri (absolut geometri) og for det andet, at vi kun har brug for at vide, at konstruktionen kan lade sig gøre. Dette er en vanskelig og **tankegangskompetence**-krævende proces.

I forbindelse med behandlingen af Poincarés modeller har jeg fundet det vigtigt, at eleverne lærer, hvordan man rent praktisk kan trække de hyperbolske linjer. Dette omfatter desværre nogle vanskelige euklidiske konstruktioner, som godt kan forvirre en del. Eleverne skal her skelne mellem de euklidiske hjælpe-konstruktioner og de hyperbolske konstruktioner.

Det er mit håb, at eleverne gennem materialet skal lære at koble den praktiske udførelse af konstruktioner med den mere teoretiske brug af konstruktionerne.

Et glimt af en anden verden

Overordnet har mit ønske med undervisningsmaterialet været at rykke ved elevernes rum-opfattelse. Jeg har valgt at kalde denne oplevelse for *et glimt af en anden verden*. Denne oplevelse kan, som jeg ser det, deles op i fire skridt.

1: Rum-forståelse er geometri.	2: Matematisk grundlag for geometrien.	3: Grundlaget er ikke entydigt.	4: Ny forståelse af rum.
---	---	---------------------------------------	--------------------------------

Mit ønske har været at guide eleverne igennem disse fire skridt. Alle fire skridt skal tages for, at eleven kan få den fulde *et glimt af en anden verden*-oplevelse. Jeg vil kort kommentere hvert skridt:

1. Første skridt indebærer at indse, at vores forståelse og beskrivelse af rum er knyttet til geometriske begreber som punkter, linjer, planer og trekanter. Det handler her om at noget meget fysisk, nemlig det rum vi lever i, skal gøres til matematik i form af geometri. I første omgang euklidisk geometri. Jeg vil tro, at dette første skridt er temmelig abstrakt for eleverne, og det vil kræve veludviklet **modelleringskompetence** for at forstå dette skridt. Fordelen er, at eleverne på forhånd er meget fortrolige med selve modellen; altså den euklidiske geometri. I undervisningsmaterialet bliver dette skridt taget allerede i det indledende kapitel 1.
2. Dette skridt handler om, at eleven forstår meningen med et postulat og et aksiomsystem; altså brug af **Symbol- og formalismekompetencen**. Men også at

eleven forstår, at den velkendte geometri nødvendigvis bygger på et sådant aksiomsystem. I materialet bliver dette skridt hovedsageligt taget i kapitlet om Euklids geometri (Kapitel 2). Eleverne skal også kunne skelne mellem definitioner, postulater og sætninger. Det kræver og stimulerer **tankegangskompetencen**.

3. Det handler her om at forstå, at det giver mening at snakke om en geometri, som bygger på $P1-P4$ sammen med non- $P5$. Dette skridt handler om at kunne løs-rive sig fra den sædvanlige opfattelse af geometri. At turde dette og forstå at det faktisk giver mening at stille sådanne spørgsmål. Det er her **Tankegangskompetencen**, som specielt bliver udfordret.
4. Med det sidste skridt skal eleven indse, at den meget abstrakte geometri, som er blevet indført i kapitel 7, kapitel 8 og kapitel 9 måske ikke er så virkeligheds-fjern endda. Eleven skal slutte en kreds til første skridt, som netop gik ud på at erkende, at rumforståelse er tæt knyttet til geometri. Det optimale vil her være at eleven straks selv får lyst til at gå ud og måle på rummets geometri. Dette skridt er måske det mest abstrakte. Også dette skridt vil, hvis det tages, i høj grad stimulere elevens **tankegangskompetence**.

Kapitel 13

Erfaring

Jeg har i flere forbindelser holdt foredrag og undervist elever på gymnasialt niveau i ikke-euklidisk geometri. De niveauer, jeg har stiftet bekendtskab med, er 2.g(A), 3.g(A), 2HF, og 2 HTX.

Statsgymnasiet

De erfaringer, jeg vil beskrive i dette kapitel knytter sig til en spørgeskema-undersøgelse, som jeg foretog efter et foredrag på Århus Statsgymnasium. Holdet var 3.g, A-niveau. Jeg vil kort skitsere det materiale, jeg valgte at gennemgå på de to lektioner:

Dagens program

1. Indledende overvejelser om aksiomsystemet og indførelse af Euklids 5 postuler.
2. Wallis' bevis for $P5$ gennemgås på tavlen.
3. Vinkeldefekt indføres og opgave 4.4.6 stilles.
4. Legendres anden sætning gennemgås på tavlen. En elev opdager fejlen.
5. Sfærisk geometri indføres, illustreret ved en basketball. Sætning om vinkelsummen i en sfærisk trekant udledes.
6. Introduktion til ikke-euklidisk geometri.
7. Lobatjevskij 20 (7.3.1) gennemgås.
8. Poincaré-modellen indføres og udforskes af eleverne via konstruktioner.
9. Overvejelser over rummet i det nye lys.

Spørgeskemaet

Efter timerne udleverede jeg et spørgeskema med 7 spørgsmål, som jeg bad eleverne udfylde. Jeg vil i det følgende se på svarene til 4 af disse spørgsmål. Gruppen jeg undersøgte var lille (12 udfyldte skemaer blev indleveret). Spørgsmålene er formuleret med henblik på, at få eleverne til at sætte ord på deres oplevelser. I det følgende vil hvert spørgsmål være efterfulgt af udvalgte svar. De, for dette speciale, mest repræsentative og de mest interessante svar er udvalgt.

Hvordan oplevede du sværhedsgraden af dagens stof i forhold til det matematik, som du til dagligt ser?

1. Gennemgangen af de forskellige beviser var ikke voldsomt udfordrende - det var mere selve forståelsen på det abstrakte niveau, der var interessant og udfordrende.
2. Egentlig var det ikke så svært ... det svære var nok, at det var forholdsvis filosofisk i forhold til det, vi plejer at beskæftige os med.
3. Ikke særlig svært, men meget anderledes. Man skulle tænke i helt andre baner.
4. ... det var forståeligt, men det var nok lidt meget at få smidt i hovedet i løbet af kun 3 timer.

Når eleverne her giver udtryk for, at stoffet ikke var svært, ser jeg det som et udtryk for, at de enkelte argumenter i beviserne ikke var mere vanskelige end, hvad de er vant til, og at eleverne besidder den nødvendige **ræsonnementskompetence**. Svarene 1-3 giver udtryk for, at vanskelighederne havde abstrakt og filosofisk karakter. Jeg læser disse som et udtryk for, at der i materialet bliver lagt mere vægt på brug af **tankegangskompetence** og **Symbol- og formalismekompetencen**, end man sædvanligvis gør i gymnasiet.

Svar 4 giver udtryk for en meget vigtig pointe: to lektioner er slet ikke nok til at komme igennem alle dele af historien. Min idé med dagens foredrag var at give eleverne, ikke hele historien, men dog et indblik i hver enkelt del, dvs. Euklid, nogle af efterfølgerne, sfærisk geometri, ikke-euklidisk geometri og modellerne. Jeg ville give eleverne *et glimt af en anden verden*-oplevelsen og følte det derfor nødvendigt strejfe hver del. Dette ændrer dog ikke på, at to lektioner ikke er nok til at komme hele vejen. Det ville nok være mere passende med to lektioner til hver enkelt del.

Hvad fangede mest din interesse i løbet af de tre timer?

1. Eksemplet med basketballen gav rigtig god forståelse, da man kan forholde sig til noget konkret, som vi kender, ellers bliver det noget, som befinder sig som noget teoretisk matematik.

2. Den sfæriske geometri.
3. Selv at skulle lave "lige linjer" i Poincarés skive-model.
4. At lede efter fejl i matematiske beviser ...
5. Til allersidst, da jeg fandt ud af, at det, jeg havde tegnet, modbeviste Legendres anden sætning ... og så det med basketballen.
6. Opgaverne med vinkeldefekt.
7. Det med $d(ABC)$ (vinkeldefekt) og opgaverne i samme område.
8. Det filosofiske aspekt.
9. ... at en ret linje ikke nødvendigvis var ret - i den normale opfattelse.

Der er ingen tvivl om, at den sfæriske geometri har en positiv virkning. Eleverne har ingen problemer med at forestille sig, at man kan lave geometri på overfladen af en kugle og den fysiske tilstedeværelse af en kugle (i form af basketballen) fanger de fleste elevers opmærksomhed. Denne kobling af **hjælpemiddelkompetencen** og **repræsentationskompetencen** har stærk virkning på eleverne.

De elever, som har taget eller er på vippen til at tage det tredje skridt i *et glimt af en anden verden*-oplevelsen, finder konstruktionerne i skive-modellen interessante. Jeg tænker her på svar 3 og specielt på svar 5.

To elever svarer, lidt overraskende, at de blev mest fanget af opgaverne om vinkeldefekten (opgave 4.4.6). Problemet, som eleverne skal løse, er temmelig klart. Man starter med et udtryk og skal så ved simple udregninger komme frem til et andet udtryk. Når to elever bliver fanget af denne opgave, tror jeg, det handler om, at de bliver stimuleret af at bruge **problembehandlingskompetencen**. En overskuelig regneopgave, som opgave 4.4.6, kan give nogle af eleverne en succesoplevelse, som måske medfører, at de vil have mere mod på at forsøge sig med de mere teoretiske dele af materialet.

Hjælp opgaverne/konstruktionerne dig til forståelse af emnet?

1. Ja, det gik først rigtig op for mig, hvad det gik ud på, da vi skulle tegne parallelle linjer.
2. Ja meget, lige til at starte med fattede jeg ikke, hvad jeg skulle tegne, og da jeg var kommet i gang, forstod jeg heller ikke helt, hvad jeg tegnede, men lige pludselig fattede jeg det, og så var det vældigt illustrativt, så opgaven var god, men lidt svært tilgængelig.
3. ... opgaverne omkring vinkeldefekt var unødvendige, men opgaverne omkring Poincarés skive-model var gode og gav god forståelse.

4. ... det tvang mig til at indlære det mere abstrakte stof.
5. De første opgaver gjorde (vinkeldefekt), men de sidste gjorde mig bare forvirret (Poincarés modellen).

De konstruktioner, der henvises til i spørgsmålet, er konstruktioner i Poincarés skive-model (opgave 8.4.4). Eleverne kan her lidt groft deles op i to grupper: dem, der finder opgaven god (svar 1-3), og dem der finder opgaven forvirrende (svar 5). Jeg tror, det handler om, hvor langt man er nået, altså hvor mange skridt man har taget i retningen af *et glimt af en ny verden*-oplevelsen. Hvis eleven har taget det 3. skridt, altså forstået at grundlaget for geometrien ikke er entydigt, så vil disse konstruktionsopgaver have en virkning, der kan sammenlignes med basketbolden.

Hvordan har min undervisning påvirket dit syn på geometri?

1. Det har givet mig forståelse for, at der findes andre former for geometri ...
2. Jeg har fået øjnene op for nogle langt mere tankevækkende og interessante perspektiver af geometrien, end man normalt arbejder med.
3. ... en ret linje er ikke nødvendigvis, som vi normalt opfatter det. Det handler om udgangspunkterne.
4. ... geometri er stadig geometri, og så findes der tilsyneladende bare en mærkelig anden geometri.
5. Jeg er blevet mere glad for euklidisk geometri, da det andet ville være meget forvirrende.
6. Ja, nu tror jeg ikke på noget mere.
7. ... for indviklet og abstrakt for mig, jeg kan bedst lide tal.
8. At alt er relativt, selv matematik, som ellers er noget jeg ser som entydigt.

Noget kan tyde på at eleverne bag svarene 1 og 2 har taget det tredje skridt. Eleven, som giver svar 3, har helt sikkert taget det tredje skridt, og hvad der er mere vigtigt så demonstrerer hans svar (*... det handler om udgangspunkterne*) en forståelse af princippet med aksiomsystemet.

En enkelt elev giver udtryk for, at han *bedst kan lide tal* (7). Jeg ser det som et udtryk for, at eleven helst vil regne opgaver, hvor resultatet er et tal. Sådanne opgaver er svære at stille inden for det emne, jeg har valgt.

5 af svarene har negativ karakter (svar 4-8), hvilket er tæt på halvdelen af de indleverede spørgeskemaer. Dette passer med min egen oplevelse af lektionerne og de andre erfaringer, jeg har med undervisning i emnet. Eleverne kan inddeles i to cirka lige store grupper. Den ene del får en god og anderledes oplevelse med materialet, og de bliver til en vis grad chokeret (på en positiv måde). Den anden halvdel fanger ikke de overordnede pointer og finder emnet forvirrende og måske endda usandt.

Kapitel 14

Konklusion

Jeg vil i dette kapitel samle op på de overvejelser, jeg gjorde mig i kapitel 12 og sammenholde disse overvejelser med spørgeskema-undersøgelsen fra kapitel 13.

Aksiomsystemet

Det store omdrejningspunkt i undervisningsmaterialet er aksiomsystemet. For at få det optimale ud af materialet skal eleverne have en god forståelse af dette aspekt. I spørgeskema-undersøgelsen gav eleverne udtryk for, at det netop var den aksiomatiske del af emnet, de fandt vanskelig. For at give et mere overskueligt billede af dette aspekt har jeg tilføjet kapitel 5, hvor en skematisk beskrivelse af aksiomsystemet indføres. Disse skemaer skal hjælpe eleverne med at se bort fra alle de tekniske detaljer og gøre det klart, hvilken matematisk struktur der ligger bag.

Hvis eleverne skal fange de overordnede pointer med materialet, er det af afgørende vigtighed, at de får forståelse for aksiomsystemet, postulaterne og spillereglerne for aksiomsystemet. Mine erfaringer siger, at det er svært at opnå denne forståelse i en hel klasse. Det er muligt, at et længere forløb (måske et par uger) vil betyde, at flere elever får denne oplevelse.

Modeller

For de elever, der har fanget pointerne med aksiomsystemet, ser det ud til, at modellen (skive-modellen) har den ønskede virkning. For de elever, der ikke har fanget de overordnede pointer, kommer modellen til at virke forvirrende. En enkelt elev giver udtryk for, at han har haft en *aha*-oplevelse med modellen:

Til allersidst, da jeg fandt ud af, at det, jeg havde tegnet, modbeviste Legendres anden sætning. . .

Det er især sådanne oplevelser, modellerne skal give eleverne. Jeg vil tro, at arbejdet med øvre halvplans-modellen kan give flere sådanne oplevelser, da konstruktionerne her ikke er nær så vanskelige.

Et glimt af en anden verden

At fremkalde denne oplevelse hos eleverne er en vanskelig proces. Det er min erfaring, at ikke alle elever er modtagelige over for denne oplevelse. Efter min mening kan man heller ikke forvente, at alle elever i gymnasiet er matematisk modne nok til at få denne oplevelse. Det er dog også min erfaring, at enkelte elever i hver klasse (på alle de niveauer, jeg har stiftet bekendtskab med) får oplevelsen. Det er tydeligt, at oplevelsen ryster dem (positivt), og at deres nysgerrighed bliver vækket.

Om brug i gymnasiet

Ikke-euklidisk geometri adskiller sig fra de obligatoriske emner i gymnasiet ved, at det ikke er fokuseret på at løse konkrete problemstillinger. I stedet er emnet en introduktion til at forstå matematikkens og specielt geometriens grundlag. Denne forskel kan godt skræmme elever, som er mere fokuseret på problem- og opgaveløsning. Omvendt kan andre elever få nogle tankevækkende og rystende oplevelser med materialet som f.eks. *et glimt af en anden verden*-oplevelsen. Det er vigtigt, at man som lærer, der skal undervise i emnet, er bevidst om denne forskel.

Spørgeskema-undersøgelsen fra kapitel 13 viste, at sværhedsgraden af de enkelte argumenter og beviser ikke var højere, end hvad eleverne er vant til. I forhold til det tekniske niveau er det også min opfattelse, at materialet godt kan bruges i forbindelse med klasse-undervisning i gymnasiet. Det skal dog siges, at de mest vanskelige beviser fra kapitel 7 og kapitel 9 ikke blev gennemgået den pågældende dag. Grundigt arbejde med disse mere vanskelige sætninger egner sig ikke umiddelbart til klasseundervisning. Det vil være oplagt, at mere interesserede elever ser på disse sætninger - f.eks. i forbindelse med 3 års opgave.

Bekendtgørelsen

I gymnasie-bekendtgørelsen for matematik på A-niveau og B-niveau gøres det klart, at matematikundervisningen, udover de obligatoriske emner, skal indeholde tre aspekter, hvoraf de to er:

Det historisk aspekt: Eleverne skal udbygge deres kendskab til elementer af matematikkens historie og matematik i kulturel og samfundsmæssig sammenhæng ([19] § 19.1).

Matematikkens indre struktur: Eleverne skal udbygge deres forståelse af de for matematik karakteristiske tankegange og metoder og indsigt i, hvordan disse indgår i udvikling og strukturering af matematiske emneområder ([19] § 19.1).

Undervisningen skal fremhæve matematik som teoribygning og som sprog. Begreber som abstraktion og generalisation diskuteres, og der arbejdes med aksiomatisk-deduktiv teoriopbygning ([19] § 19.2).

Envidere står der om behandlingen af disse aspekter:

Behandlingen af de tre aspekter skal sker i forbindelse med behandlingen af de to hovedemner og gennem særlige undervisningsforløb tilrettelagt med henblik på et eller flere af aspekterne ([19] § 19.3).

Det er min overbevisning, at materialet dækker disse to aspekter, og at forløbet i materialet fint kan indgå som det omtalte undervisningsforløb.

I forbindelse med det **historiske aspekt** kan kapitel 2 bruges som en introduktion til at læse Euklid. Forløbet kan udvides med nogle af de sætninger, som findes i Thyra Eibes danske oversættelse [5], men som ikke er behandlet i materialet. At læse Euklid i den mere rå form, som det er præsenteret i [5], er for mig selv altid en stor oplevelse, og jeg er overbevist om, at mange gymnasieelever også vil få noget positivt ud af dette. Et sådan forløb vil uden tvivl fremstille matematik på en måde, som eleverne ikke er vant til, men hvor enkelte elementer alligevel kan genkendes. Dette vil øge rækkevidden af elevernes **kommunikationskompetence**. Det er min overbevisning, at materialet giver den nødvendige baggrund for, at eleverne selv kan arbejde med sådanne udvalgte sætninger. Opgave 2.4.5 i materialet er et eksempel på dette.

Matematikkens indre struktur er gennem hele materialet belyst ved fokuseringen på geometriens aksiomsystem. Her tænker jeg på den del, der omtales som *aksiomatisk-deduktiv teoriopbygning*. Denne del af aspektet kan være svær at nå med de emner, man normalt ser præsenteret i gymnasiet. Mit materiale kan være en måde at introducere dette aspekt i et spændende sammenspil med det historiske forløb.

Kapitel 15

Summary in English

This material is divided into two separate parts. The first part consists of 11 chapters of educational material, on non-Euclidean geometry for students in the Danish high school. The second part contains some didactical thoughts concerning the material from the first part.

The subject of the educational material is non-Euclidean geometry and the history of non-Euclidean geometry. After a short introduction in chapter 1, the reader is introduced to the first book of *Euclid's Elements* in chapter 2. This chapter is mostly concerned with the five postulates of Euclid, some of the first theorems, and the use of the parallel postulate. The next major part describes some of Euclid's successors and their attempts to prove the parallel postulate using only the first four postulates of Euclid. The mathematicians introduced are Al-Tusi Nasîr-Eddîn, John Wallis and Adrien-Marie Legendre. Spherical geometry is introduced in chapter 6 as an example of geometry that is different from the Euclidean geometry. In chapter 7 Non-Euclidean geometry is presented as in Lobatjevskijs *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*. As a model of this rather abstract geometry, the disc-model of Henri Poincaré is introduced in chapter 8. In chapter 9 the reader will be taken through some calculations done by Karl Friedrich Gauss leading to an expression which connects the area of a non-Euclidean triangle with its angles. Finally some general thoughts about space are presented in chapter 10.

In the didactic part, I describe my intentions with the material and what experiences that I imagine a high school student would get out of reading it. My major reference in this part is the report *Kompetencer og matematiklæring* [18]. As a part of the writing process I did some teaching in non-Euclidean geometry in a high school class. The last two chapters is an analysis of this experience and a description of how it influenced the final result.

Litteratur

- [1] Bonola, Roberto: *Non-Euclidean Geometry*, New York (1911)
- [2] Gray, Jeremy: *Ideas of Space - Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic*, Oxford (1979)
- [3] Greenberg, Marvin Jay: *Euclidean and Non-Euclidean Geometries - Development and History*, Santa Cruz (1973).
- [4] Kristensen, Erik: *Ikke-Euklidisk Geometri*, København (1975).
- [5] Euklid: *Euklids Elementer*, Oversat af Thyra Eibe. København (1897).
- [6] Fauvel, John and Jeremy Gray: *The History of Mathematics: A Reader*, London (1987).
- [7] Lobatjevskij, N.I.: *Geometriske Undersøgelser over Teorien for Parallele Linier*, ved Lars Mejlbo, Århus (1988).
- [8] Bolyai, John: *The Science of Absolute Space*, ved George Bruce Halsted, New York (1911). (del af [1])
- [9] Hilbert, David: *Foundations of Geometry (Grundlagen der Geometrie)*, Open Court Publishing Company (1971).
- [10] Rudin, Walter: *Real & Complex Analysis*, New York (1966).
- [11] Kline, Morris: *Mathematical Thought, from Ancient to Modern Times, Volume 1-3*, Oxford (1972).
- [12] Gamow, George: *Mr. Tompkins in Paperback*, Cambridge (1965).
- [13] Jeppesen, Jesse Louie: *Euklids femte postulat*, 2. delsopgave ved IVH Aarhus Universitet (1998).
- [14] Heath, Sir Thomas L.: *The Thirteen Books of Euclid's Elements, Volume 1*, New York (1956).

- [15] Henriksen, Niels K.: *Girolamo Saccheri og Geometrien*, speciale ved IVH Aarhus Universitet (1996).
- [16] Olsen, Jacob: *Et trekantsdrama - János Bolyais opdagelse af ikke-euklidisk geometri*, Bachelorprojekt ved IVH Aarhus Universitet (2003).
- [17] Gauss, Carl Friedrich: *Werke, bind 8*, Göttingen (1900).
- [18] KOM-arbejdsgruppen: *Kompetencer og matematiklæring, Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*, IMFUFA, RUC (2002).
- [19] Gymnasebekendtgørelsen: *Undervisnings ministeriets Gymnasebekendtgørelsen, matematik*. <http://www.uvm.dk> (1999).
- [20] Heiede, Torkil: *Hvad skal en matematiklærer med ikke-euklidisk geometri?*, Nordisk Matematisk Tidsskrift Vol. 48 (2000), s 23-39.
- [21] Heiede, Torkil: *Hvorfor undervise i matematikkens historie?*, Nordisk Matematisk Tidsskrift Vol. 39 (1991), s 153-161.
- [22] Gray, Jeremy: *Non-Euclidean Geometry*, Video fra Open University, BBC.
- [23] Brandt, Jørgen & Knud Nissen: *Q.E.D. - en introduktion til matematisk bevis.*, Forlaget ABACUS (1995).
- [24] Guth, Alan H.: *The Inflationary Universe*, USA (1997).
- [25] Pedersen, Olaf & Helge Kragh: *Fra Kaos til Kosmos, verdensbilledets historie gennem 3000 år*, København (2000).
- [26] *Dictionary of Scientific Biography*, U.S.A. (1970).