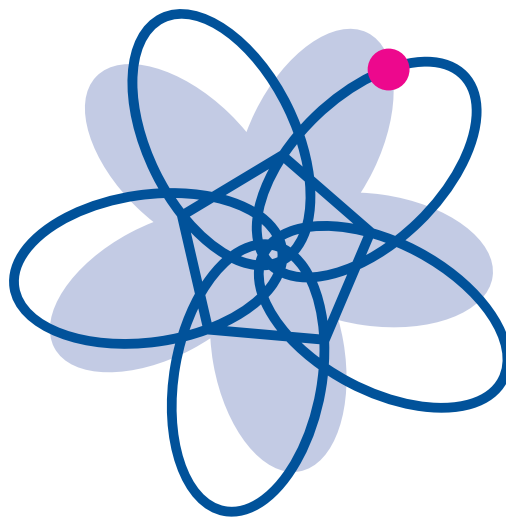


RePoSS #27:

**Picks Sætning: Inspiration til
undervisning om
eksperimenterende udforskning i
matematik med et
videnskabsteoretisk sigte**

Kristian Danielsen, Morten Misfeldt and Henrik Kragh
Sørensen

October 2014



Please cite this work as:

Kristian Danielsen, Morten Misfeldt, and Henrik Kragh Sørensen (2014). *Picks Sætning: Inspiration til undervisning om eksperimenterende udforskning i matematik med et videnskabsteoretisk sigte*. RePoSS: Research Publications on Science Studies 27. Aarhus: Centre for Science Studies, University of Aarhus. URL: <http://www.css.au.dk/reposs>.

Picks Sætning: Inspiration til undervisning om eksperimenterende udforskning i matematik med et videnskabsteoretisk sigte

Kristian Danielsen^{*}

Morten Misfeldt[†]

Henrik Kragh Sørensen[‡]

14. oktober 2014

Resumé

Denne note er udsprunget i forbindelse med et inviteret foredrag ved Henrik Kragh Sørensen om eksperimentelle metoder i matematisk forskning ved Det danske GeoGebra Instituts indvielse 12. december 2012 (afsnit 1–5). Derefter har forfatterne arbejdet videre med at fremstille et undervisningsorienteret materiale om Picks Sætning med brug af computereksp eksperimenter. Formålet er, at denne note kan danne grundlag for videre udforskning — og didaktisk underbygning — af *forskellige* anvendelser af eksperimenter i den matematiske praksis, som udfoldes i undervisningssituationer. Niveauet i noten er tænkt rettet mod STX-B og STX-A-niveau, og der er lagt rigeligt med videnskabsteoretisk refleksion ind i såvel selve erkendelsesforløbet som eksplicit i de involverede skridt og deres perspektiveringer. Dette er også understøttet af en ekskursion om metodologi (afsnit refchap:metodologi), som vi tænker kan inddrages efter behov. Vi har udviklet arbejdssedler og i 2013–14 prøvet dem af i 3.x på Randers Statsskole (afsnit 7). Vi arbejder stadig med både udviklingen af materialet og udfoldning af dets didaktiske og videnskabsteoretiske pointer, se fx Misfeldt, Danielsen og Sørensen (2014), og vi hører meget gerne fra lærere, der har forsøgt at bruge materialet i undervisningen.

Keywords

GeoGebra, Picks Sætning, gitterpolygons areal, Lakatos, Polya, udforskende eksperimenter, bevis.

^{*}Randers Statsskole og Center for Videnskabsstudier, Aarhus Universitet; kd@css.au.dk.

[†]Institut for Læring og Filosofi, Aalborg Universitet; misfeldt@learning.aau.dk.

[‡]Center for Videnskabsstudier, Aarhus Universitet; hks@css.au.dk.

Indhold

1	Indledning: Eksperimenter og matematik i et videnskabsteoretisk perspektiv	1
2	Leg med et virtuelt sømbræt: Åben udforskning, dataindsamling og hypoteseformulering	3
3	Fra hypotese til bevis: Begrebsdannelse, bevisstrategi og syntetisering af det overbevisende argument	8
4	Hvad så hvis nu?: Åbning af problemfeltet til yderligere eksperimenter og et Lakatos-inspireret perspektiv	13
5	Konklusioner og perspektiver	18
6	Metodologisk inspiration fra Polya og Lakatos	21
6.1	En dialog om magiske tal	22
6.2	Aktiviteter	26
6.3	Kappa's bevis	27
7	Arbejdssedler fra forløb i 3.x	28
7.1	Arealer og polygoner	28
7.2	Gitterpolygoner	28
7.3	Simple gitterpolygoner	29
7.4	Gitterpolygoner generelt	29
7.5	Triangulering af gitterpolygoner	30
	Referencer	30

1 Indledning: Eksperimenter og matematik i et videnskabsteoretisk perspektiv

Er matematik en aksiomatisk og deduktiv videnskab? Er det *kun* en aksiomatisk-deduktiv videnskab? Og er der forskelle imellem matematikkens metode som forsknings- og undervisningsfag? Svarene på disse spørgsmål kunne siges at være ja, nej og måske — i det følgende skal vi præsentere, diskutere og illustrere en anden, mere eksperimenterende og udforskende, tilgang til matematikundervisning ved hjælp af en bemærkelsesværdig sætning om polygoners areal.

Forsknings- og erkendelsesprocesser er på flere måder analoger til gode kriminalromaner i og med at målet typisk ikke kendes klart undervejs. Således også med denne note. For selvom der er mening i sammensætningen er *pointen* netop at erkendelse er en individuel konstruktion. Så når man er færdig med at læse noten og selv følge erkendelsesskridtene, skulle man gerne stå tilbage med en helhedsfornemmelse af tilfredsstillelse. Men indtil sidste side skal det ikke være klart, præcist hvilken matematisk sætning, undersøgelserne skal lede frem til.

Inden for de sidste tiår har computeren for alvor gjort sit indtog i den matematiske forskning, også inden for *den rene matematik*. I modsætning til mere anvendte dele af matematikken er *ren matematik* i sin yderste konsekvens kun interesseret i at fremme menneskelig erkendelse af matematiske sammenhænge. Det særlige ved denne form for erkendelse er, at den igennem århundreder er blevet dyrket som en mental, intellektuel udforskning uden at gøre essentiel brug af tekniske apparater, eksperimenter, eller direkte erfaringer fra virkeligheden. Men ved computerens hjælp er et af matematikkens centrale spørgsmål blevet sat på spidsen: Kan et matematisk resultat være sandt uden at noget enkelt menneske er i stand til at følge beviset?¹

Adgangen til interaktive og desktop-baserede computersystemer til matematiske manipulationer og visualisering har muliggjort en ny, udforskende og eksperimenterende tilgang til matematisk forskning. Og fortæller for denne brug af eksperimenter i matematikken har ikke været sene til at fremhæve metoden som en helt ny erkendelsesform i matematikken, der kan supplere det stringente og syntetiske bevis. I et af flere programmatisk værker fremstiller en af bevægelsens ikoner otte forskellige roller for computerekspirimenter i matematisk forskning (J. Borwein og D. Bailey, 2004, s. 2–3):

- i) Opnå *indsigt og intuition*.
- ii) *Opdage nye mønstre* og sammenhænge.
- iii) Bruge grafiske fremstillinger til at *foreslå underliggende matematiske principper*.
- iv) Teste og især *falsificere formodninger*.
- v) Udforske et muligt resultat for at afgøre om det *berettiger et stringent bevis*.
- vi) *Foreslå strategier* for stringente beviser.
- vii) Erstatte lange traditionelle udledninger med *computer-baserede udledninger*.
- viii) *Bekræfte* analytisk (stringent) udledte resultater.

Disse rangerer altså fra heuristiske og induktive elementer (1–3) over pragmatiske og vurderende elementer (4–5) til egentlige begrebs- og bevisudviklende elementer (6–8). Og alle disse elemen-

¹For yderligere diskussion af bevisets ideale og reale rolle i matematikken, se Johansen og Sørensen (2014).

ter kan — i varierende grad og med forskellige virkemidler — inddrages i eksperimenterende udforskning i matematikundervisningen.

Når man ud fra et moderne perspektiv skal redegøre for matematikkens metoder, kan man hurtigt komme på mindst tre forskellige roller, som matematik spiller og tilhørende forskellige dominerende metoder:

- a) Matematik er et *redskabsfag for andre videnskaber*, så matematikkens metode er *modellering* og kvantitativ behandling af fænomener.
- b) Matematik er en *deduktiv og abstrakt videnskab*, så matematikkens metode er *aksiomatisk deduktiv* (bevisende).
- c) Matematik er en *skabende kunst*, så matematikkens metode er *begrebsudviklende* (eksperimenterede, bevisende, udforskende).

Alle disse tre aspekter er centrale dele af matematikken, og de er på ingen måder gensidigt udelukkende. I stedet er det mest passende billede meget mere komplekst:

- Redskabsfags-synet (a) risikerer at reducere matematik og den matematiske erkendelses særegenhed.
- Det deduktive syn (b) risikerer at præsentere matematik som et afsluttet hele, inden for hvilket udvikling ikke er muligt.
- Det udviklende syn (c) risikerer at foreslå at matematik er relativistisk, konstrueret, eller andet “vås”, som forpasser at forklare de matematiske argumenters *oplevede natur* som tvingende nødvendige.

I undervisningssituationer er fokus tit på en af disse fremherskende metoder, og betinget af undervisningens mål er det eksplicitte fokus hyppigt på de to første elementer; måske endda primært på det første. Der er derfor — i forhold til fagets (og herunder forskningsfagets) metoder — brug for i undervisningen at kunne illustrere også punkterne 2 og 3 og *især* at kunne illustrere at metoderne er forbundne og virker dialektisk med hinanden i konkrete erkendelsessituationer. Det er i høj grad disse ambitioner, som dette materiale er tænkt at kunne udfylde.

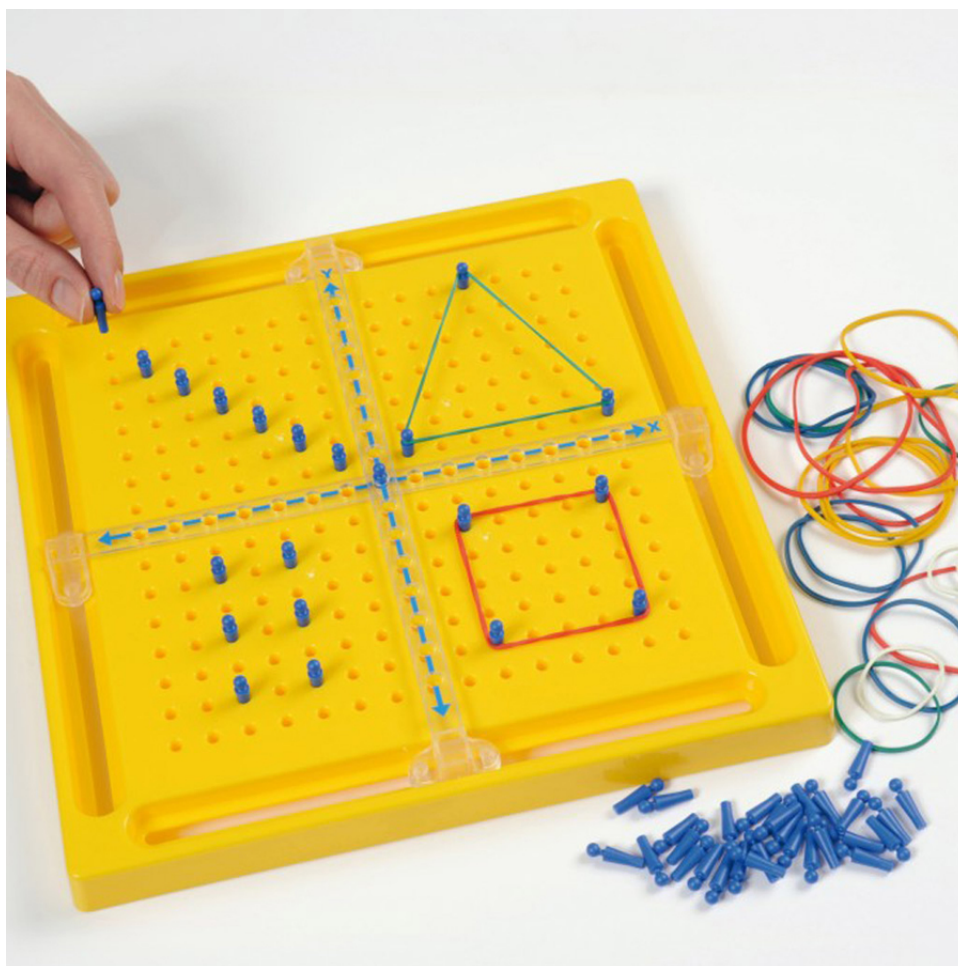
En del af baggrunden for det ny fokus på udforskerskende eksperimenteren i undervisningen er en bevægelse i retning af mere spørgsmåls- og undersøgelses-drevet erkendelse i undervisningen på alle nivåer. Denne udvikling er en forlængelse af andre konstruktivistiske didaktiske metoder, men den adskiller sig blandt andet ved at ikke kun *svaret*, men også *spørgsmålet* kan konstueres af det lærende individ. Derfor bliver det vigtigt at holde sig disse spørgsmål og deres karakter for øje: Det er ikke eksperimenterende på samme måde at spørge „Hvad er relationen mellem antallet af kantpunkter og indre punkter i en gitter-trekant og dens areal?“ som at spørge „Kan man bestemme arealer af gittertrekanter ved at tælle (i modsætning til at måle)?“. Og det skal fremgå i det følgende, at det første spørgsmål — med alle dets begrebsdannelser — er et *produkt* af den udforskende fase, ikke en forudsætning for den.

I det følgende skitseres en erkendelsesproces, der — selvom den leder frem til en bestemt indsigt formuleret i et præcist sprog — følger en åben og udforskende tilgang. Undervejs benyttes geometri-software til at udføre eksperimenter og motivere begrebsdannelser og udforsknings-

og bevisstrategier. Valget af geometri-software er faldet på **GeoGebra**, men mange andre systemer vil også kunne bruges; nogle vil endda være endnu mere skræddersyede til at udføre de tilsigtede eksperimenter. Når valget er faldet på **GeoGebra** skyldes det dels dette systems udbredte brug i undervisningssektoren, men også dets generelle natur og anvendelighed, hvormed softwaren i højere grad bliver tydeliggjort som et *instrument* i eksperimenterne.²

2 Leg med et virtuelt sømbræt: Åben udforskning, dataindsamling og hypoteseformulering

Et af de virkemidler, man kan anvende til at give elever et legende forhold til geometriske figurer er at benytte et sømbræt. I sin simpleste form består et sådant sømbræt af et antal søm monteret i et retvinklet, ækvidistant gitter på en plade — i dag er de fremherskende fysiske former lavet af plastik og findes i mange varianter (se figur 1). Ved at udspænde elastikker mellem sømmene kan eleverne danne forskellige figurer, tale om dem og begynde at udfærdige små ræsonnementer omkring dem. Dette ligger inden for de første og mellemste skoleårs begrebsapparat.



Figur 1: Et sømbræt med søm i et gitter og elastikker kan være en god didaktisk artefakt at inddrage til at lette overgangen fra det konkrete til det computer-medierede eksperiment.

²GeoGebra er et gratis matematiksystem udviklet med særligt fokus på undervisning. Det kan downloades fra <http://www.geogebra.org/>. Tekniske anvisninger er givet i forhold til GeoGebra version 4.2.

En tilsvarende funktionalitet kan man også bruge i **GeoGebra** ved hjælp af “gitre” (i flæng også betegnet “net”, se box 1). Derved åbner sig imidlertid en didaktisk forhindring, idet identifikationen mellem sømmene på sømbrættet og skæringerne af netlinjerne i **GeoGebra** ikke er så enkel, som den forekommer. Men for at kunne identificere disse to repræsentationer med hinanden er det nødvendigt, at begge dele identificeres med matematiske gitterpunkter i den idealiserede, matematiske verden. Dette kan til dels afhjælpes ved at bruge andre, specialdesignede stykker software,³ men disse vil ofte så til gengæld gå ud over den i det følgende beskrevne pointe om uafhængighed af arealberegningen.

Instruktioner til GeoGebra 1. Med **GeoGebra** kan man slå et “net” til, således at alle heltallige gitterpunkter fremstår som skæringer mellem vandrette og lodrette net-linjer (se figur 2(a)). Man kan under **Indstillinger/Fang punkt** vælge **Lås til gitter** og derved begrænse punkter til at ligge på gitterpunkter.

Det er en pointe med dette forløb, at nogle af de centrale begreber ikke defineres i udgangspunktet — sådan som det ellers tit er tilfældet med matematiske lærebøger og syntetiske beviser — men derimod udforskes og udfyldes i løbet af undersøgelserne. Et af disse begreber er ideen om en “polygon i planen”.

Opgave 1 (Begrebsundersøgelse om polygoner). Lav en åben begrebsundersøgelse omkring polygoner. Blandt de mulige veje at gå er fx

- i) en *etymologisk* afklaring: Hvad betyder ordet “polygon”?
- ii) en eksempelbaseret tilgang: Kan vi komme op med eksempler på polygoner?
- iii) en instrumentbaseret tilgang: Findes der redskaber, der kan generere polygoner? Hvordan er begrebet “polygon” så implementeret i dette redskab?
- iv) en enumerativ tilgang: Kan vi måske finde et system, der frembringer (alle) polygoner?
- v) en essentialistisk tilgang: Hvad er polygoners karakteriserende egenskaber? Kan en eller flere af disse bruges til en definition? Kan vi komme op med flere definitioner? Hvordan forholder disse definitioner sig til hinanden?

Selvom ideen med denne begrebsundersøgelse er at frembringe forskellige aspekter af begrebet “polygon”, ved vi godt, hvordan nogle af svarene måske kan gå. Etymologisk betyder “polygon” en “mangekant”, og brugen af begrebet går tilbage i hvert fald til de antikke græske matematikere. I den store Ordbog over det danske Sprog findes ordet både som navneord og som tillægsord.⁴ I forlængelse af den oprindelige græske etymologi betyder det faktisk nærmere “mangehjørnet” eller “mangevinklet”. Denne dualitet mellem hjørner og kanter er en egenskab ved polygoner, som dukker op igen i det følgende. De simplete — og bedst kendte — eksempler på polygoner er helt sikkert trekanter og firkanter, og allerede her kan vi møde et skel mellem

³To rigtig gode bud på specialdesignet software til disse eksperimenter ville være et af disse såkaldte Geoboards: <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Geoboard.shtml> eller <http://www.mathplayground.com/geoboard.html>.

⁴<http://ordnet.dk/ods/ordbog?select=Polygon,1&query=polygon>.

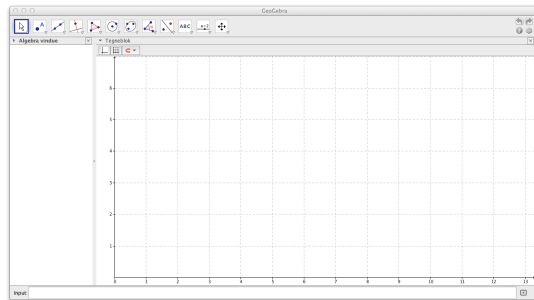
konvekse og konkave figurer (alle trekkanter er konvekse, men firkanter kan godt være konkave, selvom de simpleste eksempler som rektangler og kvadrater ikke er det). Dette lærer os, at der er forskellige typer af polygoner — både klassificeret efter antallet af hjørner og efter andre egenskaber som fx hvorvidt de er konkave eller ej. En instrumentbaseret tilgang ville fx kunne fremvises ved at lege med polygon-værktøjet i **GeoGebra**. Dette er baseret på, at polygoner er lukkede kurver af rette linjer. Og selvom dette giver en fin beskrivelse rejser det også nogle udfordringer: Hvad vil man fx sige om figuren udspændt af en lukket kurve af rette linjer i figur 2(d)? — Den er tegnet i **GeoGebra** med polygon-redskaben, men måske strider den alligevel mod nogle intuitioner om polygoner? Nogle ville måske finde det oplagt at springe direkte til at forsøge at karakterisere det essentielle ved polygoner, måske igennem opslag i leksika (traditionelle eller online). På den engelske Wikipedia defineres en polygon således til at være “a flat shape consisting of straight lines that are joined to form a closed chain or circuit”.⁵ Dette er også den beskrivelse, der ligger bag polygon-redskabet i **GeoGebra**. Definitionen på Wolfram MathWorld henviser derimod til en klassisk bog om emnet for definitionen: „A polygon can be defined as a geometric object 'consisting of a number of points (called vertices) and an equal number of line segments (called sides), namely a cyclically ordered set of points in a plane, with no three successive points collinear, together with the line segments joining consecutive pairs of the points. In other words, a polygon is closed broken line lying in a plane’“. ⁶ En af de mest interessante ting ved disse definitioner er, at (især den sidste) eksplicit viser, at der til et matematisk begreb (selv et så simpelt og fundamentalt som “polygon”) ikke findes en entydig definition men derimod en pletora af forskellige karakteristika, som man kan ophøje til definitioner. Det bliver så en efterfølgende opgave at undersøge, hvordan de objekter, som forskellige definitioner bestemmer forholder sig til hinanden. I det konkrete tilfælde vil man finde, at begge definitioner stemmer nogenlunde overens, idet de dog adskiller sig ved fx at have forskellige opfattelser af hvorvidt figuren i figur 2(e) er en polygon eller ej. En yderligere definition, som måske stemmer overens med manges intuitive opfattelse, kunne være at en polygon er en del af planen afgrænset af rette linjestykker; denne definition skal senere i kapitel 4 vise sig at lede til interessante undersøgelser.

Blandt de funktioner, som et generelt instrument som **GeoGebra** stiller til rådighed er beregning af arealer for en lang række figurer, herunder polygoner (se box 2). Når man tegner en lukket polygon i **GeoGebra** beregner den automatisk figurens areal ved hjælp af en generel algoritme; arealet angives i algebra-vinduet på skærmen. Den benyttede algoritme tager ikke hensyn til specifikke egenskaber ved polygonen, for eksempel at den er en gitter-polygon; det kan man overbevise sig om ved at tegne en helt arbitrært polygon, manipulere den (flytte dens punkter og hele polygonen, skalere den, etc.) og se, at arealberegningen hurtigt og interaktivt opdateres. Udtrykt i lidt mere teoretiske termer stiller **GeoGebra** altså et uafhængigt arealberegningssinstrument til rådighed for vores eksperimenter med gitterpolygoner.

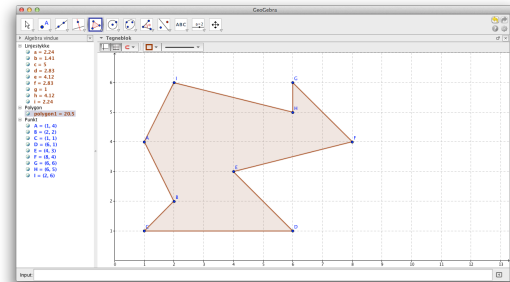
⁵<http://en.wikipedia.org/wiki/Polygon>.

⁶<http://mathworld.wolfram.com/Polygon.html>.

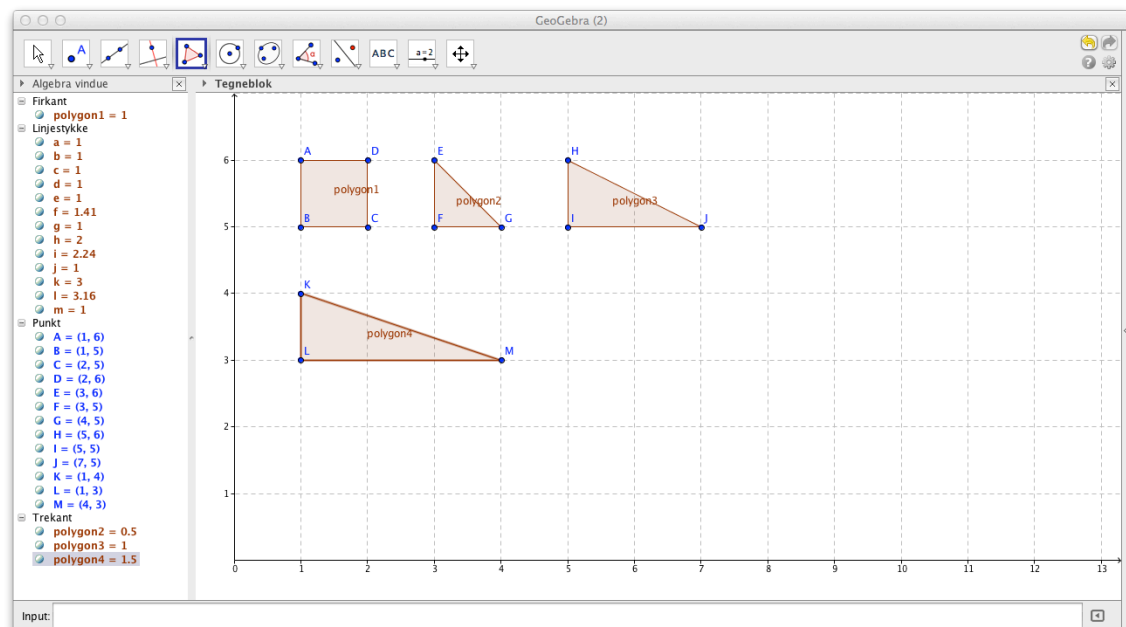
Instruktioner til GeoGebra 2. Ved hjælp af GeoGebra kan man tegne polygoner og få beregnet deres areal. I figur 2(b) er tegnet en ganske tilfældig polygon med 9 hjørner ($A, B, \dots, I$), alle placeret i gitterpunkter. I algebra-delen af billedet kan man se hjørnepunkternes koordinater samt polygonens areal, her beregnet som 20.5.



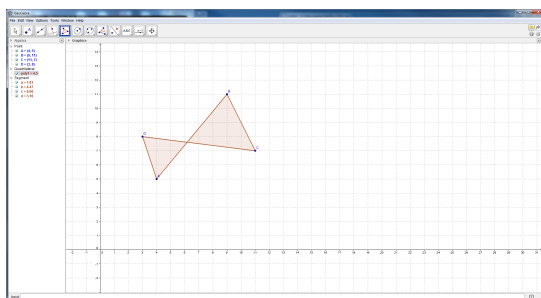
(a) GeoGebra med et gitter slået til.



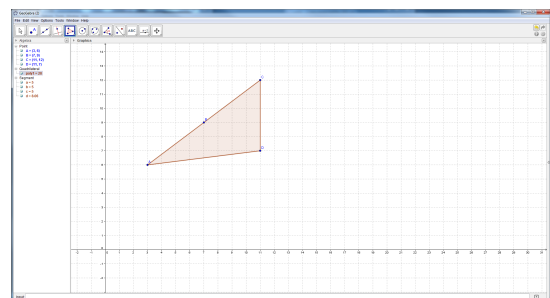
(b) Et eksempel på et gitter-polygon i GeoGebra.



(c) Mere systematisk afprøvning af simple gitterpolygoner.



(d) En figur tegnet med polygon-redskabet i GeoGebra med to krydsende kanter.



(e) En figur tegnet med polygon-redskabet i GeoGebra med tre co-lineære punkter.

Figur 2: Opsætning og eksperimenter med polygoner i GeoGebra.

Opgave 2 (Baconisk eksperimenteren). Med gitter-låsen slået til kan man gå i gang med at udforske gitterpolygoner og deres areal i **GeoGebra**. Til at begynde med kan det være svært at se, hvilke parametre, der er relevante at variere under eksperimenterne, men man kan for eksempel eksperimentere med simple figurer (3-kanter, 4-kanter, se fx figur 2(c)) eller mere komplekse mange-kanter (fx 9-kanter i figur 2(b)). Man kan også forsøge sig med forskellige grader af symmetri og både se på konvekse og konkave polygoner.

I denne fase er eksperimenterne helt åbne data-indsamlinger, hvor man til hver tegnet gitter-polygon noterer fx antallet af hjørner, en lille notits om figurens form og **GeoGebra**'s beregning af arealet. Med **GeoGebra** kan denne form for eksperiment gøres individuelt og alligevel parallelt og hurtigt. Men det ændrer ikke ved, at den er sammenlignelig med den første heuristiske eksperimenteren som beskrevet bl.a. af Polya (1954).

Når man har opstillet en række eksperimenter af denne åbne, forholdsvis teori-frie slags, kan man være nået til nogle foreløbige intuitioner. De har måske ikke form af indsigter endnu, men det kan godt være, at man har skitser til ræsonnementer. Man kan fx have observeret, at for alle de betragtede gitterpolygoner er arealet altid af formen n eller $n + \frac{1}{2}$ for n et heltal. Man har måske også observeret, at nogle kanter går igennem andre gitterpunkter, og at dette tilsyneladende forekommer på kanten mellem gitterpunkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) netop når $\gcd(x_1 - x_2, y_1 - y_2) > 1$. Eller man har måske observeret, at det i **GeoGebra** kan være svært at tegne figurer afgrænsede af retlinjede kanter men med indre "huller".

Alle disse tre typer intuitioner (og sikkert mange flere) er brugbare og værdifulde for den efterfølgende fase. Men som altid er det en balance i en given undervisningssituation, hvor meget man som lærer ønsker at styre processen frem mod disse (og/eller andre) intuitioner, som kan vise sig nyttige senere. Optimalt — i forhold til den åbne, udforskende eksperimenteren — må være, at det enkelte lærende individ aktivt konstruerer sine egne eksperimenter og egne intuitioner; nogle gange skal dette så hjælpes på vej med teknisk, begrebsmæssige eller matematisk stimulans.

På et tidspunkt vil det være naturligt at introducere en ny ide, som sikkert vil forekomme mange af eleverne fremmed: nemlig at man kan forsøge at kvantificere gitterpolygonerne på forskellige måder med det formål at forsøge at udtrykke deres areal gennem tælling (og ikke som intuitionen måske tilsiger gennem opmåling). Der er hertil forbundet en række interessante didaktiske og begrebsmæssige udfordringer, som knytter an til denne "diskrete" tilgang til arealbestemmelse. Disse refleksioner har i sig selv også heuristisk værdi, så nogle af dem skal her beskrives, udfoldes en smule og karakteriseres i lidt mere videnskabsteoretiske termer:

1. Den første type inspiration og intuition kunne siges at være *matematisk og fænomenologisk* i sin karakter, idet man kan tage udgangspunkt i det forhold at gitterpolygoner i **GeoGebra** *opleves* som diskrete (de "hopper", når man trækker i hjørnerne) og at deres areal tilsyneladende er på formen $n + \frac{m}{2}$ for n heltal og $m \in \{0, 1\}$.

2. En anden type intuition kan måske siges at være mere *analogibaseret* i sin natur, idet man kan forsøge at forestille sig sømbrættets gitterpunkter (sømmene eller skæringerne mellem gitterlinjerne) som repræsenterende centrum i små kvadrater med sidelængden 1, som fylder planen ud. Analogien er potent, idet den kan give den intuition, at man måske kan beskrive

polygonens størrelse (areal) ved at tælle antallet af søm (gitterpunkter), som falder i dens indre. Eleverne vil sikkert hurtigt indvende, at dette tilsyneladende kun kan være en approksimation, da man skærer dele af de små kvadrater fra nær polygonens kanter.

3. En vigtig didaktisk forhindring for disse intuitioner har at gøre med det involverede perspektivskifte i elevernes forståelse af arealbegrebet. Men igennem øvelser og udforskning kan eleverne bringes til at supplere deres arealopfattelse med intuitioner, der går helt tilbage til deres første eksperimenter med geometriske figurer. Oversættelsen beskrevet i pkt. 2 er måske mest oplagt for fysiske repræsentationer, mens man måske skal arbejde lidt for at illustrere analogien for elever, der arbejder helt internt i GeoGebra.

3 Fra hypotese til bevis: Begrebsdannelse, bevisstrategi og syntetisering af det overbevisende argument

Den proces, som omdanner en matematisk indsigt til et (acceptabelt) matematisk bevis, er på mange måder kompleks, både for den professionelle matematiker og for den lærende elev. Iblandt såvel forskere som undervisere (og filosoffer) diskuteres det til tider, hvorvidt overgangen overhovedet er nødvendig: Hvis man har opnået en (matematisk) indsigt igennem strukturerede eksperimenter, hvorfor skal den så forsynes med et stringent bevis?⁷ Dette spørgsmål er ofte stillet provokerende, fordi det udfordrer den traditionelle matematiks centrale epistemologiske legitimitet, men svaret kan ikke bare være at henvise til abstrakte normer. I stedet må man undersøge, hvad det er, der forsynes af et bevis frem for en eksperimentelt opnået indsigt.

Nogle gange er overgangen mellem eksperiment og bevis allerede indbygget som sigte for eksperimenternes design.⁸ Det kan både ske ved, at man har forfulgt en dialektik, hvor det mulige bevis og det endnu ikke udførte eksperiment informerer hinanden, og det kan ske ved, at resultaterne af et udført eksperiment peger på mulige begrebsdannelser for det efterfølgende bevis. Der er altså ikke tale om, at eksperiment (heuristik) og bevis nødvendigvis er tidsmæssigt adskilte (lineære) processer — hverken i forskning eller i undervisning. Og for design af læringsforløb er det helt oplagt at en form for design af eksperimenterne i lyset af det mulige bevis nærmest er et uomgængeligt vilkår.

Når det drejer sig om gitterpolygonerne, er overgangen fra induktivt opnået indsigt til matematisk bevist sætning i høj grad et spørgsmål om at etablere et passende begrebsapparat til at indfange regulariteter i de opnåede data. Med udgangspunkt i den “diskrete” version af problemet opnået i de ovenfor beskrevne analogier, syntetiseres følgende begreber og relationer:

4. Der består åbenbart en kvalitativ forskel mellem bidragene til polygonens areal fra de punkter, der ligger *inde i polygonen*, og de punkter, der ligger *på polygonens kanter*. De to typer punkter betegnes i det følgende *indre punkter* og *kantpunkter*, og deres respektive antal benævnes henholdsvis *i* og *b* (for “inner” henholdsvis “boundary” punkter).

⁷Se diskussionen i termer af “matematiske kulturer” i Sørensen (2014). Problemstillingen er også berørt i Sørensen (2013).

⁸Se også pkt. vi) i analysen af computeres brug i matematisk forskning, ovenfor (s. 1).

Figur	Beskrivelse	b	i	Areal
$ABCD$	1×1	4	0	1
$EFGH$	2×2	8	1	4
$IJKL$	3×3	12	4	9
$MNOP$	3×2	10	2	6

Tabel 1: Optællinger for simple kvadrater og rektangler med gitter-parallele kanter, se figur 3(a).

5. For at anskueliggøre de forskellige gitterpunkttypers bidrag til polygonens areal kan man med fordel betragte forskellige firkanter, se figur 3(a). Den simpleste firkant $ABCD$ er kvadratet med sidelængde $s = 1$; den har $b = 4$ kantpunkter og ingen indre punkter ($i = 0$), og dens areal er oplagt $s^2 = 1$. Tilsvarende data kan man se illustreret for andre kvadrater i tabellen 1.

6. Man kan nu drage fordel af, at vi har *begrænset* denne del af eksperimenterne til *kvadrater*. For kvadrater gælder nemlig nogle simple relationer, nemlig $b = 4s$, $i = (s - 1)^2$ og $A = s^2$. Hvis man sætter disse relationer sammen, finder man for kvadrater med sidelængden s :

$$A = s^2 = ((s - 1) + 1)^2 = (s - 1)^2 + 2(s - 1) + 1 = i + \frac{b}{2} - 1. \quad (1)$$

7. Hvis vi nu betragter et lidt mere generelt eksempel på et gitterrektangel med dimensionerne $x \times y$ (se også $MNOP$ i figur 3(a) og tabel 1), så finder man relationerne $b = 2x + 2y$, $i = (x - 1)(y - 1)$ og $A = xy$. Når man samler informationerne, finder man

$$i = (a - 1)(b - 1) = ab - b - a + 1 = A - \frac{b}{2} + 1, \quad (2)$$

hvoraf følger, at

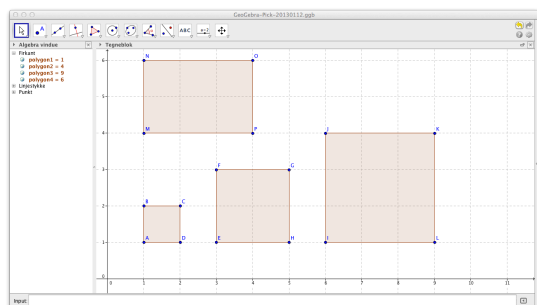
$$A = i + \frac{b}{2} - 1. \quad (3)$$

På dette tidspunkt kan man altså slutte, at for rektangler parallelle med gitteret, består relationen $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

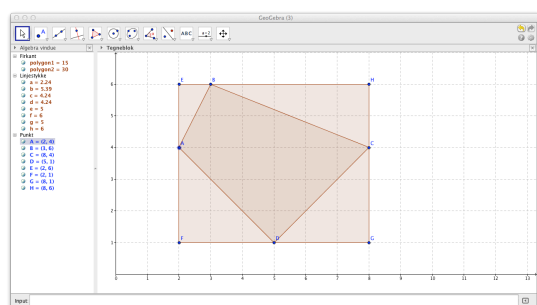
8. Hvis man nu betragter en retvinklet trekant med gitter-parallele kateter (T), så er den jo naturligt halvdelen af et gitter-parallelt rektangel (R): $A(T) = \frac{1}{2}A(R)$. Men hvordan forholder det sig med antallet af indre punkter og kantpunkter? Lad os antage, at x af de indre punkter fra rektanglet ligger på trekantens hypotenuse foruden hjørnerne. Så er altså $i(R) = 2i(T) + x$ og $b(R) = 2(b(T) - x) - 2$. Men $A(R) = 2A(T)$ og $A(R) = i(R) + \frac{b(R)}{2} - 1$, så

$$\begin{aligned} A(T) &= \frac{2i(T) + x}{2} + \frac{2(b(T) - x) - 2}{4} - \frac{1}{2} \\ &= i(T) + \frac{x}{2} + \frac{b(T)}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = i(T) + \frac{b(T)}{2} - 1. \end{aligned} \quad (4)$$

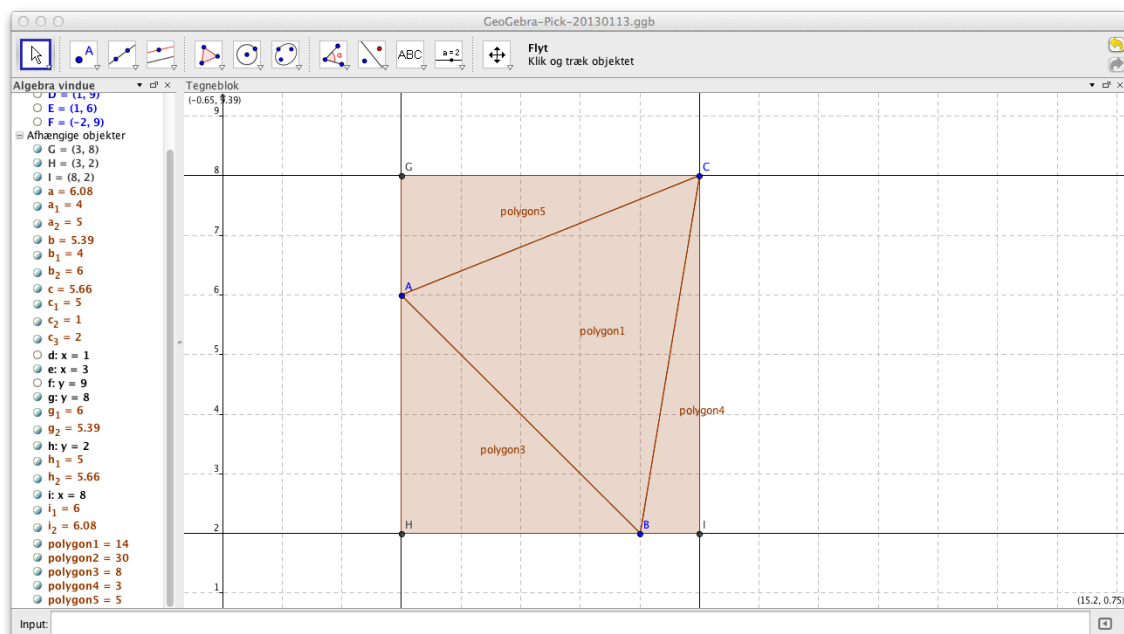
9. Nu er tiden så kommet til at betragte en helt generel gittertrekant T . I stedet for at bestemme dens areal direkte, kan vi betragte det "hylster", der hører til trekanten, nemlig det mindste gitter-parallele rektangel, der indeholder T . Hvis trekanten T ikke indeholder nogen



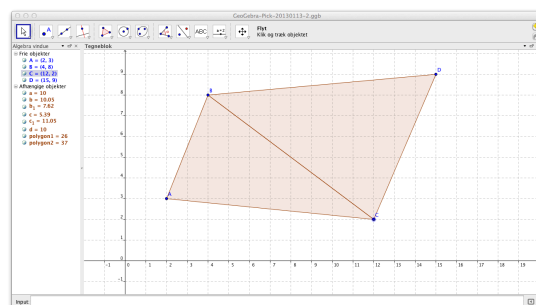
(a) Forskellige firkanter kan bruges til at anskueliggøre kant- og indre punkters bidrag til gitterpolygons areal.



(b) En gitterpolygons areal kan bestemmes både direkte ved triangulering og ved triangulering af dens "hylster".



(c) En næsten vilkårlig gittertrekant og dens hylster.



(d) To gitter-trekanter med en fælles kant.

Figur 3: På vej til et bevis.

stumpe vinkler, er T er omgivet af 3 retvinklede trekanter med gitter-parallele kateter T_1, T_2, T_3 , således at hylsteret udgøres af den disjunkte forening af T og T_1, T_2, T_3 (se figur 3(c)). Hvis vi benævner antallet af gitterpunkter på hypotenusen i T_k med x_k (igen fra regnet hjørnerne), så er altså $b(T) = x_1 + x_2 + x_3 + 3$. Hvis rektanglet har dimensionerne y, z , så er

$$b(T_1) + b(T_2) + b(T_3) = 2(y - 1) + 2(z - 1) + 3 + (x_1 + x_2 + x_3) \quad (5)$$

$$= 2(y - 1) + 2(z - 1) + 3 + (b(T) - 3) \quad (6)$$

$$= 2(y - 1) + 2(z - 1) + b(T) \quad (7)$$

$$= b(R) + b(T). \quad (8)$$

Dette kunne man også indse direkte ved at tælle antallet af gitter-kantpunkter i trekanterne T_1, T_2, T_3 : De må enten være kantpunkter for R eller kantpunkter for T , og hjørnerne i T tælles netop dobbelt, da de både er del af R og T og delt mellem to af trekanterne T_1, T_2, T_3 . Endvidere er $i(R) = i(T_1) + i(T_2) + i(T_3) + x_1 + x_2 + x_3 + i(T)$. Nu er vi klar til at kombinere disse oplysninger og beregne (notationen $\sum i(T_n)$ dækker her over $i(T_1) + i(T_2) + i(T_3)$ og tilsvarende for de andre summer, hvor der her altid summeres over $n = 1, 2, 3$):

$$A(T) = A(R) - \sum A(T_n) \quad (9)$$

$$= i(R) + \frac{b(R)}{2} - 1 - \sum i(T_n) - \frac{\sum b(T_n)}{2} + 3 \quad (10)$$

$$= i(T) + \sum i(T_n) + \sum x_n + \frac{\sum b(T_n) - b(T)}{2} - 1 - \sum i(T_n) - \frac{\sum b(T_n)}{2} + 3 \quad (11)$$

$$= i(T) + \sum x_n - \frac{b(T)}{2} - 1 + 3 \quad (12)$$

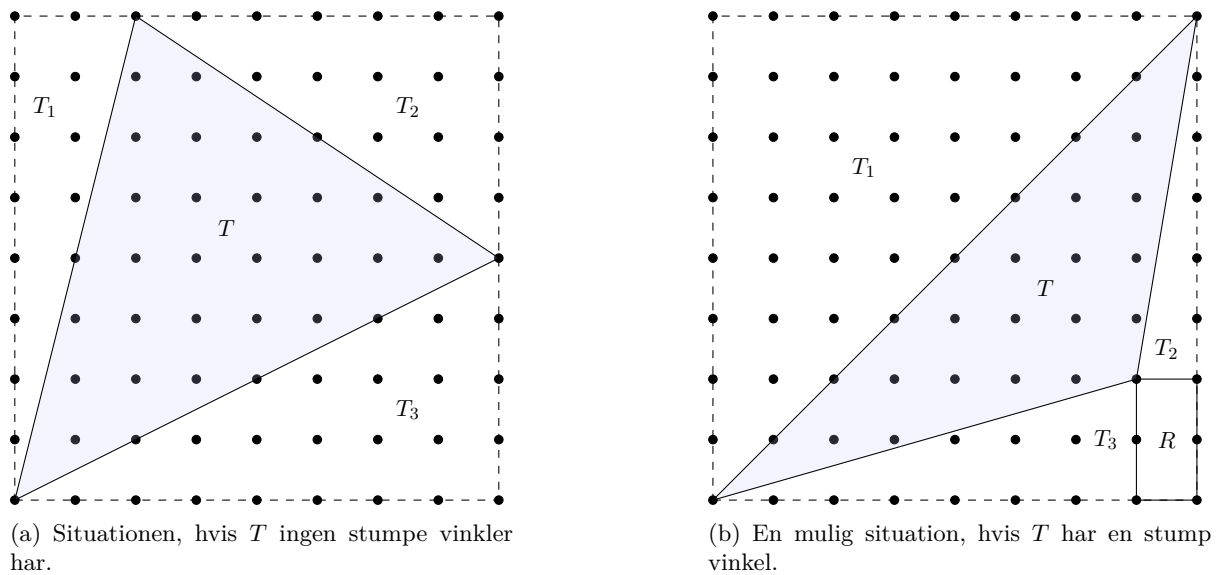
$$= i(T) + (b(T) - 3) - \frac{b(T)}{2} - 1 + 3 \quad (13)$$

$$= i(T) + \frac{b(T)}{2} - 1. \quad (14)$$

10. Der kan opstå en lidt anden situation, hvis T indeholder en stump vinkel, hvilket man også vil opdage ved at eksperimentere med **GeoGebra** (figur 3(c)). I dette tilfælde kan det være, kun to af trekantens hjørner ligger på hylsterets kanter (se figur 4(b)), og så må man modificere ovenstående argument i overensstemmelse hermed. Det modificerede argument kan for eksempel benytte, at hylsteret foruden T stadig er sammensat af retvinklede, gitterparallelle trekanter (men nu 5 i stedet for 3). Derved kan ovenstående argument umiddelbart genbruges.

Dermed er resultatet blevet generaliseret til en vilkårlig gitter-trekant. Nu kunne man så forsøge at udvide til andre givne figurer, fx vilkårlige firkanter. Men her kan en yderligere generalisering være til hjælp. Og samtidig kan et generelt blik og lidt eksperimenten også bidrage en ny form for intuition rettet mod formlen $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

11. Betragt to vilkårlige gitter-trekanter, som deler en fælles kant som illustreret af trekanterne $T_1 = ABC$ og $T_2 = BCD$ i figur 3(d)). Hvis vi kalder den disjunkte forening af T_1 og T_2 for F og betegner antallet af gitterpunkter på den fælles kant BC med x (foruden hjørnerne), så er $A(F) = A(T_1) + A(T_2)$, $i(F) = i(T_1) + i(T_2) + x$, $b(F) = b(T_1) + b(T_2) - 2x - 2$. Når disse resultater



Figur 4: Indlejring af en gittertrekant i dens hylster.

kombineres med vores viden om, at for vilkårlige gitter-trekanter er $A(T_n) = i(T_n) + \frac{b(T_n)}{2} - 1$, får vi følgende

$$A(F) = \sum A(T_N) = \sum i(T_n) + \frac{\sum b(T_n)}{2} - 2 \quad (15)$$

$$= i(F) - x + \frac{b(F) + 2x + 2}{2} - 2 \quad (16)$$

$$= i(F) + \frac{b(F)}{2} - 1. \quad (17)$$

Dette argument er fuldstændig analogt med argumentet i 9, men her er de essentielle egenskaber måske endnu tydeligere. For det første viser dette argument, at formlen er bevaret ved disjunkt forening af vilkårlige gitter-trekanter. For det andet viser selve argumentet (og eksperimentet, der hører til figur 3(d)) hvordan forskellen i “vægt” tildelt kant- og indre gitterpunkter opstår: Et kant-punkt kan blive til et indre punkt ved at tilføje en figur langs samme kant.

Det diste skridt i argumentet er nu at indse, at enhver gitterpolygon kan dekomponeres som en disjunkt forening af gittertrekanter, der alle deler en kant. Dette kan man sikkert forholdsvist let overbevise sig om induktivt ved hjælp af **GeoGebra**, hvis man tegner forskellige gitterpolygoner og faktisk triangulerer dem. Men dette resultat åbner også op for en videre udfoldelse af

forholdet mellem eksperimenter, eksempler (og modeksempler) og beviser (se kapitel 4).

4 Hvad så hvis nu?: Åbning af problemfeltet til yderligere eksperimenter og et Lakatos-inspireret perspektiv

I det foregående kapitel har vi opdaget og bevist, at for enhver gittertrekant T er $A(T) = i(T) + \frac{b(T)}{2} - 1$, samt at for to gittertrekanter T_1, T_2 , der deler en kant, er

$$\begin{aligned} A(T_1 \cup T_2) &= A(T_1) + A(T_2) \\ &= i(T_1) + \frac{b(T_1)}{2} - 1 + i(T_2) + \frac{b(T_2)}{2} - 1 \\ &= i(T_1 \cup T_2) + \frac{b(T_1 \cup T_2)}{2} - 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Man indser også ud fra argumentet, at dette resultat nemt udvides, således at hvis T_1, T_2 blot er to gitterpolygoner (ikke nødvendigvis trekanter), der deler præcis 1 kant, så er identiteten (18) bevaret.

Lad os nu begynde med igennem eksperimenter at få en smag for, hvordan triangulering virker. Hvis man forestiller sig en “tilfældig” gitterpolygon, kan det være, at den ligner en af polygonerne i figur 5(a). Den første polygon i figuren er *konveks*, hvilket er et teknisk matematisk begreb:

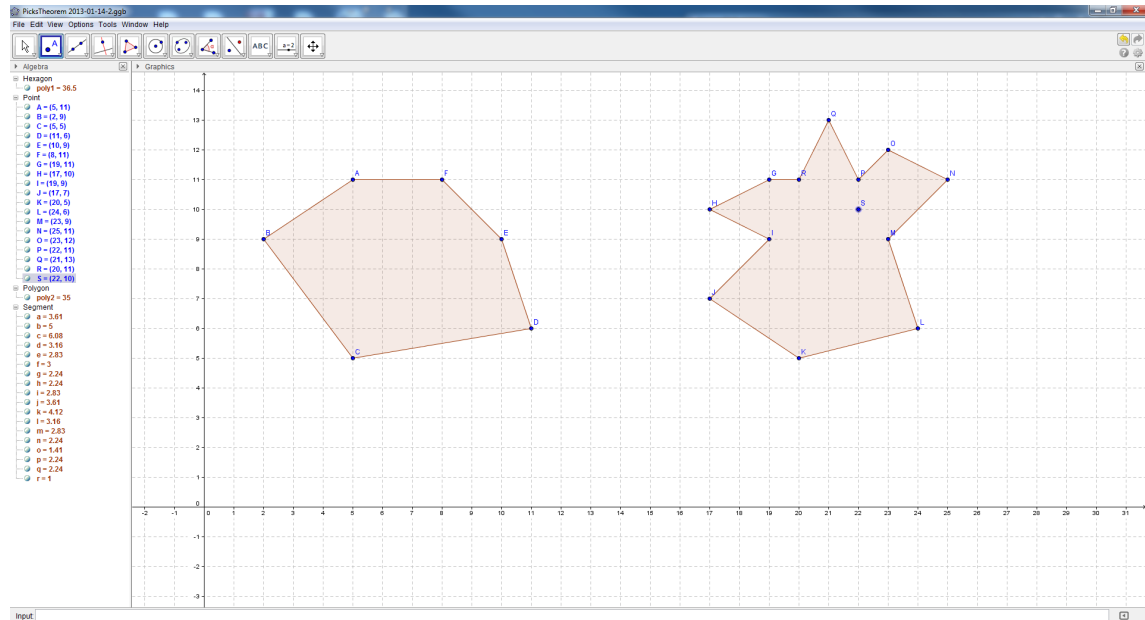
Definition 4.1. En delmængde $M \subset \mathbb{R}^2$ af planen siges at være konveks, hvis der om ethvert par af punkter $A, B \in M$ gælder, at hele det rette linjestykke mellem A og B falder helt inden for mængden M : For alle $t \in [0, 1]$ skal der gælde, at $A + t(B - A) \in M$.

For konvekse gitterpolygoner er det nemt at se, at de kan trianguleres i en række gittertrekanter, sådan at hver figur i rækken deler en kant med den foregående. I tilfældet med den konvekse gitterpolygon $ABCDEF$ i figur 5(a) kan man holde A fast og så trinvis betragte figurerne ABC, ADC, AED, EFE .

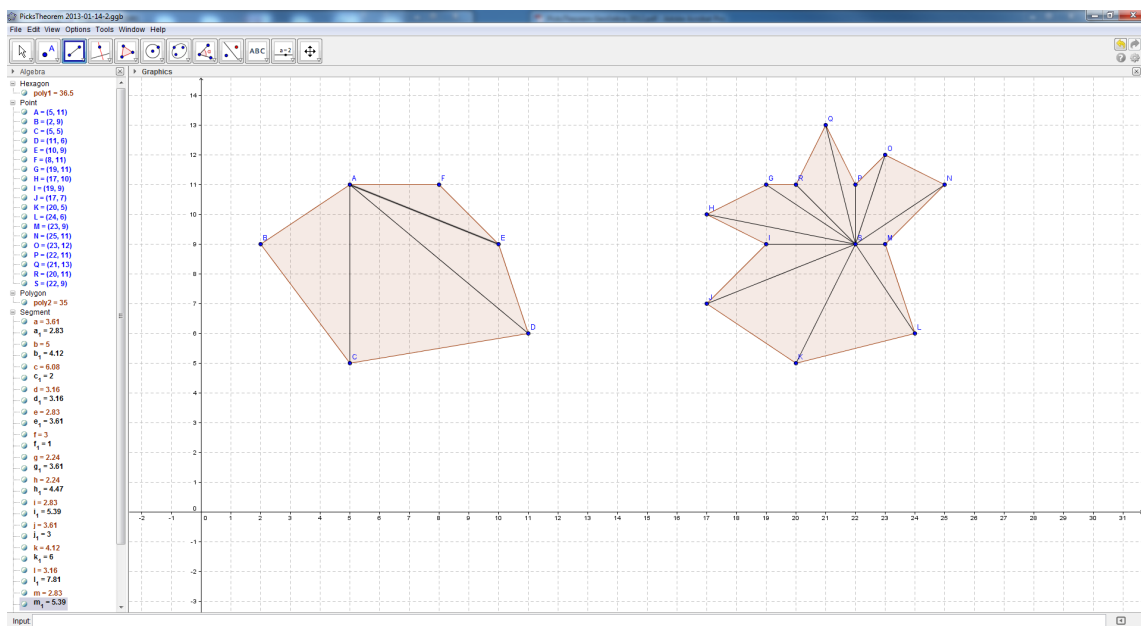
Hvis figuren ikke er konveks, kan det være, at den enten kan opdeles i to (eller flere) konvekse figurer ved at tilføje en kant (eller flere kanter), eller det kan være, at den er *stjerne-konveks*, hvilket er et begreb man kan definere til at indfange situationen illustreret i den anden polygon i figur 5(a):

Definition 4.2. En delmængde $M \subset \mathbb{R}^2$ af planen siges at være stjerne-konveks, hvis der findes et punkt $S \in M$, sådan at der om ethvert andet punkt $A \in M$ gælder, at hele det rette linjestykke mellem A og S falder helt inden for mængden M : For alle $t \in [0, 1]$ skal der gælde, at $A + t(S - A) \in M$.

Hvis figuren er stjernekonveks omkring et gitterpunkt S , er det også muligt at triangulere den på den ønskede måde: Hold S fast og betragt gittertrekanterne, som opstår ud fra successive hjørnepar: $SGH, SGI, SIJ, \dots, SRG$. Disse trekanter udgør en serie af gittertrekanter, der hver især har en kant til fælles med den foregående figur. Men i modsætning til det simpleste tilfælde med en konveks figur, sker der her noget særligt, når vi “kommer hele vejen rundt” og skal tilføje trekanten SRG (se figur 5(b)): Denne trekant har *to* kanter fælles med den samlede



(a) Eksempel på konvekse og stjerne-konvekse gitterpolygoner.



(b) Indtegnning af triangulering.

Figur 5: Triangulering af konvekse eller stjerne-konvekse polygoner er nemt ud fra et enkelt punkt (lokale modifikationer).

figur. Dermed gælder vores argument ikke umiddelbart i den form, vi har bevist det. Man kunne forsøge at reparere på argumentet og bevise det i (endnu) et særtilfælde, men i stedet går vi lidt mere generelt til værks og beviser en hjælpesætning, som generaliserer den tidligere opnåede indsigt en smule. For at lette notationen, indfører vi en betegnelse for den centrale størrelse, som vi allerede har arbejdet meget med:

Definition 4.3. Hvis P er en gitterpolygon, så lader vi $\Pi(P) = i(P) + \frac{b(P)}{2} - 1$.

Lemma 4.1. Hvis P_1 og P_2 er to gitterpolygoner, som har en eller flere på hinanden følgende kanter fælles, så er $\Pi(P_1 \cup P_2) = \Pi(P_1) + \Pi(P_2)$.

Bevis. Beviset er en simpel generalisering af det argument, som vi gav ovenfor. Vi antager nemlig, at $P_1 \cap P_2$ består af en streng af kanter, som indeholder b gitterpunkter. Så er

$$i(P_1 \cup P_2) = i(P_1) + i(P_2) + (b - 2) \quad \text{og} \quad (19)$$

$$b(P_1 \cup P_2) = (b(P_1) - b) + (b(P_2) - b) + 2, \quad (20)$$

idet punkterne på den fælles streng af kanter (pånær endepunkterne) bliver til indre punkter, hvorved de fjernes fra mængden af kantpunkter (se figur 6). Så er

$$\begin{aligned} \Pi(P_1 \cup P_2) &= i(P_1 \cup P_2) + \frac{b(P_1 \cup P_2)}{2} - 1 \\ &= (i(P_1) + i(P_2) + b - 2) + \frac{b(P_1) + b(P_2) - 2b + 2}{2} - 1 \\ &= \left(i(P_1) + \frac{b(P_1)}{2} - 1 \right) + \left(i(P_2) + \frac{b(P_2)}{2} - 1 \right) = \Pi(P_1) + \Pi(P_2). \end{aligned}$$

□

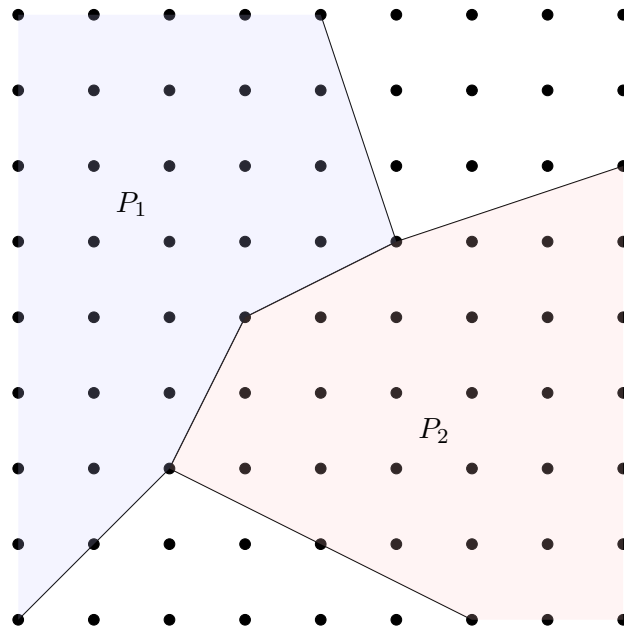
Man bemærker om hjælpesætningen og dens bevis, at det er en umiddelbar generalisering af det tidligere opnåede resultat for en *enkelt* fælles kant, idet det ikke gør nogen forskel hvor mange kanter, der er indeholdt i argumentet, så længe at de blot udgør en samlet streng. Dermed er de eneste egentlige forskelle, at sætningen og beviset nu er udtrykt mere generelt og ved brug af en lidt mere kompakt notation. Man kan udtrykke indholdet af lemma 4.1 ved at sige, at funktionen Π er *additiv* ved forening af tilgrænsende gitterpolygoner.

Vi kan også bevise et mere generelt resultat om dekomposition i konvekse polygoner:

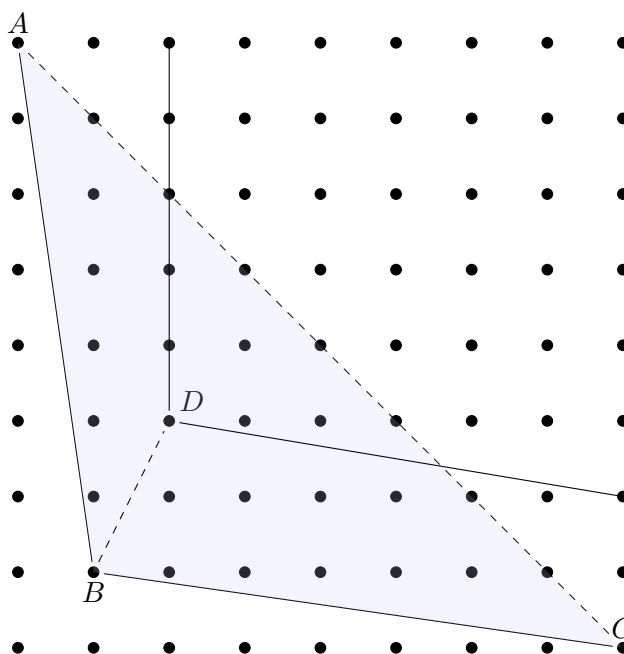
Lemma 4.2. Enhver (simpel) polygon kan dekomponeres i konvekse polygoner.

Bevis. Antag, at polygonen P ikke er konveks. Lad ABC være tre på hinanden følgende hjørner fra P og antag, at linien AC falder udenfor P . Så findes altså mindst et hjørne fra P , som falder i trekanten ABC [Overvej!]. Blandt de hjørner fra P , der falder i trekanten ABC vælges D , således at linien BD ligger indenfor P . Ved nu at tilføje linien BD kan man dekomponere P i to polygoner P_1 og P_2 med en fælles kant, således at såvel P_1 som P_2 har færre hjørner end P (se figur 7). Ved induktionen vises lemmaet, da enhver trekant jo er konveks. □

Bemærk, at da vi kun tilføjer kanter — og aldrig hjørner — kommer vi ikke til at skulle tilføje hjørner, der ikke ligger på gitteret. Vi kan altså heraf udlede følgende diskrete version:



Figur 6: Π er *additiv* for to gitterpolygoner, der deler en streng af fælles kanter.



Figur 7: Illustration til beviset for lemma 4.2: Hvis ABC ikke falder helt inden for P , dekomponeres i to polygoner.

Korollar 4.1. *Enhver simpel gitterpolygon kan dekomponeres i konvekse gitterpolygoner.*

Det er vigtigt for dette argument, at polygonen dekomponeres i to dele P_1, P_2 , og dette kunne man faktisk godt forestille sig ikke var tilfældet. For at sikre dette trin i beviset er det derfor nødvendigt at tilføje en antagelse, her at P skal være forudsat at være simpel:

Definition 4.4. *En gitterpolygon siges at være simpel, hvis kun to kanter mødes i ethvert hjørne, og der ingen huller er i polygonen.*

Sætning 4.1 (Picks Sætning). *For enhver simpel gitterpolygon P med $i(P)$ indre gitterpunkter og $b(P)$ kantgitterpunkter, er arealet bestemt ved*

$$A(P) = i(P) + \frac{b(P)}{2} - 1. \quad (21)$$

Bevis. Ved ovenstående lemma 4.2 kan gitterpolygonen P trianguleres i gittertrekanter $T_1, \dots, T_n$. Og vi ved fra lemma 4.1, at funktionen Π er additiv ved forening af tilgrænsende gitterpolygoner. Da vi også har bevist (punkt 9 og 10), at $\Pi(T) = A(T)$ for gittertrekanter, er sætningen bevist. $\square$

Nogle af de eksempler, som kunne medføre, at hjælpesætningen (lemma 4.2) faktisk ikke holder, kunne være gitterpolygoner som de, der er illustreret i figur 8(a). Lad os starte med at betragte “polygonen” sammensat af to trekanter, der deler et hjørne. I det konkrete tilfælde kan man beregne dens relevante data til $i = 11 + 9 = 20$, $b = 6 + 8 - 1 = 13$ og $A = 14 + 12 = 26$, hvor tallene er fremkommet ved at optælle hver af de to trekanter for sig, og vi har trukket 1 fra summen af kantpunkter, idet hjørnet B ellers tælles med to gange. Med denne optælling gælder formelen oplagt ikke, idet $i + \frac{b}{2} - 1 = 20 + \frac{13}{2} - 1 = 26\frac{1}{2}$ hvilket er forskellig fra de 26, som arealet er beregnet til. Nu kunne man så tage flere forskellige tilgange til denne “udfordring” af vores formel:

- I) Man kunne sige, at intet er sket, da vi jo netop har defineret, at denne figur *ikke* er en simpel gitterpolygon, idet *fire* kanter mødes i punktet B . Dermed falder figuren slet ikke under vores formulerede sætning 4.1.
- II) Man kunne også finde på at betragte udregningen lidt nærmere og se, at hele problemet stammer fra, at hjørnepunktet B kun bliver talt med 1 gang i den samlede figur. Man kunne så få den ide at insistere på, at punkter skal *tælles med multiplicitet* og på den måde i hvert fald afværge det konkrete modeksempel, idet man så vil få $b = 14$ og dermed $\Pi = 26 = A$. Om dette så generelt er en vej frem, ville jo bero på en yderligere analyse af *beviset*. Og med den opnåede indsigt omkring additivitet af gitterpolygoner kan man nok indse, at det faktisk kunne være frugtbart. Det er dog vigtigt at indse, at det vil betyde en (yderligere) omdefinering af centrale begreber som “tælle” og “gitterpolygon”: Vi skal til at tælle med multiplicitet, og en gitterpolygon er ikke længere i overensstemmelse med vores (måske ikke formulerede) intuition om en figur, hvor ethvert indre punkt kan forbindes med ethvert andet indre punkt ved en kontinuert kurve, der ikke går igennem randen.

Nogle lidt tilsvarende udfordringer rejses af den anden polygon i figur 8(a), hvis den opfattes som en gitterpolygon med et hul i. En optælling viser, at for denne figur er $i = 29$, $b = 14 + 4 = 18$, og $A = 40 - 2 = 38$. Her er der igen tale om, at vores ønskede formel ikke er opfyldt. Igen kunne man tage anlægge forskellige syn på dette eksempel:

- III) Man kunne — helt i analogi med pkt. (I) ovenfor — sige, at intet er sket, idet vi jo netop har defineret, at dette ikke er en simpel gitterpolygon, og at den derfor ikke falder inden for det domæne, som vores sætning 4.1 skal udtale sig om.
- IV) Man kunne igen også vende sig mod beviset og de argumenter, der har ført os til sætningen. I argumentationen benyttes antagelsen om at polygonen ingen huller har i beviset for lemma 4.2. Dér var det en vigtig del af beviset, idet antagelsen sikrede at en polygon falder i to dele ved at tilføje en kant. Lad os betragte en situation som i figur 8(b), hvor randen af en figur er sammensat af to gittertrekanter ABC og DEF , således at figuren fremstår som en trekant med et trekantet hul i. På figuren er også indtegnet en fuldstændig triangulering, og man ser, at i hvert fald, når “hullet” er en konveks gitterpolygon, så er problemet, at når vi næsten har foretaget trianguleringen og fx står tilbage og skal tilføje trekanten BEF , så vil den have to kanter fælles med resten af figuren uden at disse to kanter er del af en streng af nabokanter, idet fire kanter da mødes i hjørnet B . Og dette forhold skal formelen tage højde for. For at betragte denne situation går vi igen lidt mere generelt til værks: Hvis Q betegner en gitterpolygon i det indre af gitterpolygonen P , så er

$$\Pi(P \setminus Q) = i(P \setminus Q) + \frac{b(P \setminus Q)}{2} - 1 \quad (22)$$

$$= (i(P) - (i(Q) + b(Q))) + \frac{b(P) + b(Q)}{2} - 1 \quad (23)$$

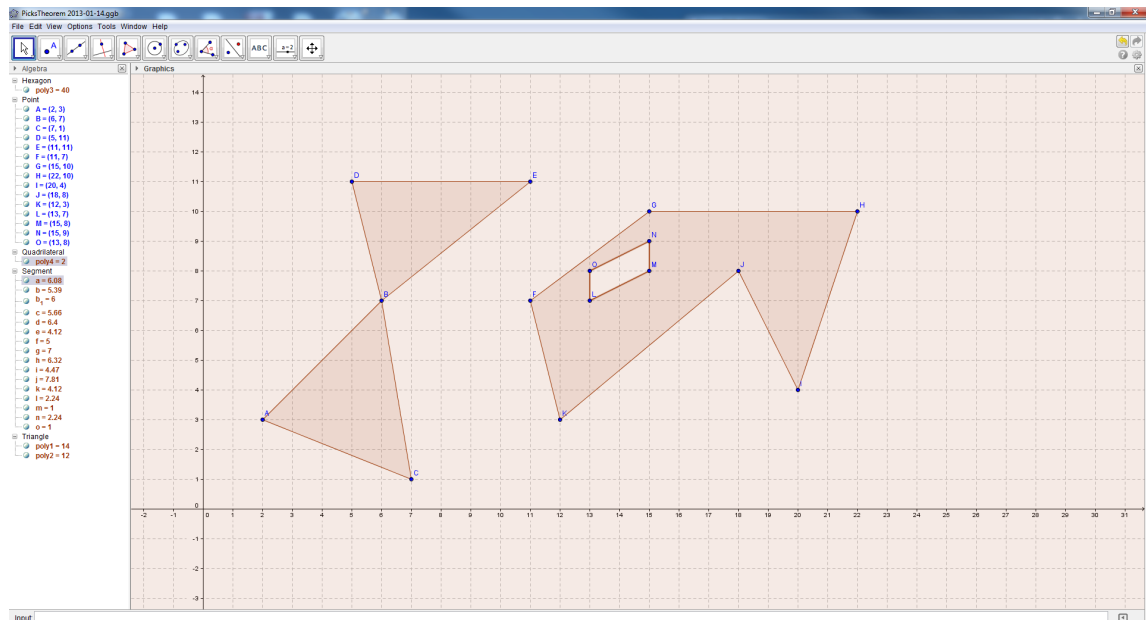
$$= \left(i(P) + \frac{b(P)}{2} - 1 \right) - \left(i(Q) + \frac{b(Q)}{2} - 1 \right) - 1 \quad (24)$$

$$= \Pi(P) - \Pi(Q) - 1 = A(P) - A(Q) - 1. \quad (25)$$

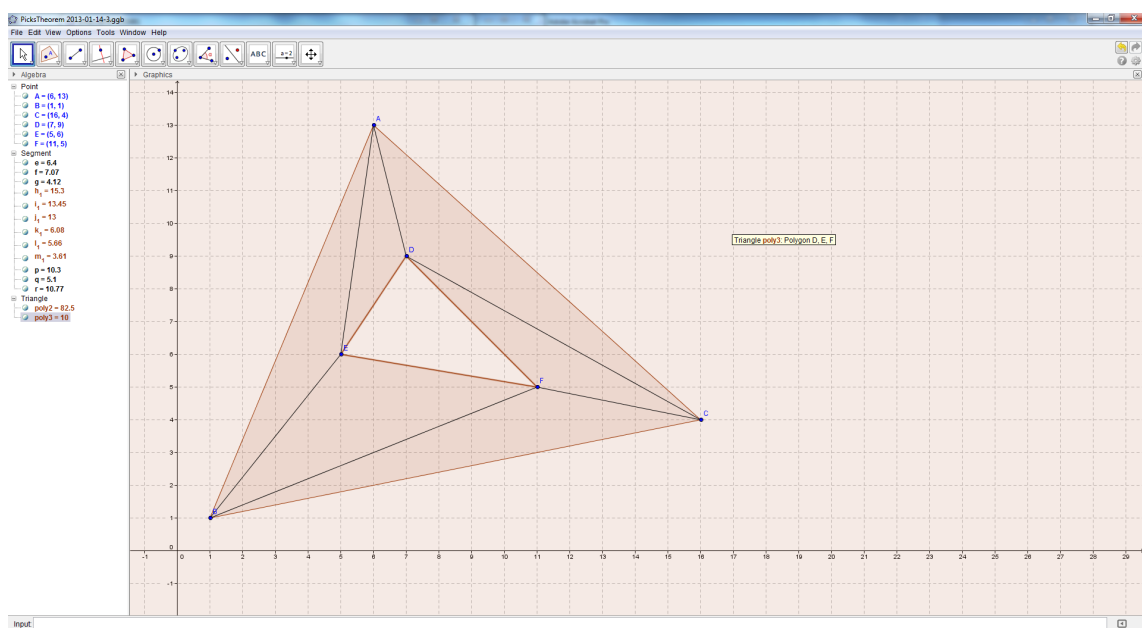
Faktisk kan man bruge forskellen mellem $\Pi(P)$ og $A(P)$ til at tælle antallet af huller i polygonen P ; der gælder nemlig helt generelt, at hvis P er en gitterpolygon med n indre gitterpolygoner fjernet, så $A(P) - \Pi(P) = n$.

5 Konklusioner og perspektiver

Det beskrevne forløb har indeholdt en længere række matematiske og videnskabsteoretiske pointer. Matematisk set har vi lært noget om gitterpolygons areal igennem eksperimenterende udforskning og mere klassiske matematiske argumenter og beviser. Man kunne have ladet den matematiske del af historien slutte ved beviset for, at for enhver simpel gitterpolygon P er $A(P) = \Pi(P)$ (sætning 4.1). Dette resultat er kendt som “Picks Sætning” opkaldt efter den østrigske matematiker GEORG ALEXANDER PICK (1859–1942). I litteraturen kan man finde flere korte og gode “syntetiske” beviser for Picks Sætning — de fleste af dem mere direkte end det, som her fremkommer igennem flere led af eksperimenter. Men det var også en matematisk



(a) To typer modelksempler til såvel trianguleringen som selve formodningen (globale modifikationer).



(b) En gittertrekant med et gittertrekantet hul.

Figur 8: Modelksempler og eksempler til udforskning af polygon-begrebet i forbindelse med triangulering.

pointe at betragte nogle af de udfordringer, som denne sætning kan stilles overfor i form af figuren, som sætningen måske burde udtale sig om, men hvor dens udsagn ikke er opfyldt. Sådanne modeksempler spiller nemlig en betydelig rolle i den matematiske praksis, sådan som den er blevet analyseret især af filosofen IMRE LAKATOS (1922–1974).⁹

En vigtig pointe med forløbet har været at reflektere over de metoder, der indgår i matematisk udforskning *inden* den matematiske indsigt bliver syntetiseret til et traditionelt matematisk bevis. Her har især brugen af computer-baserede eksperimenter med **GeoGebra** illustreret adskillige forskellige tilgange, som blev beskrevet i listen over computeres anvendelighed i matematisk forskning (se kapitel 1). Der har været eksempler på en baconisk, induktiv og teori-fri eksperimenteren med gitterpolygoner for at finde frem til nogle intuitioner og nogle sammenhænge, som man kunne gå videre med at udforske. Der har også været eksempler på, hvordan begreber er blevet formet igennem eksperimenterne og forsøgene på at bevise de indsigter, som de har produceret. Nye begreber som “retvinklede gittertrekanter med gitter-parallele kateter” er opstået som *eksperiment- og bevis-skabte* i den forstand, at de indfanger centrale objekter i eksperimenterne og gør dem til genstand for ræsonnementer i form af delbeviser og hjælpesætninger på vejen mod den overordnede formodning. Og andre begreber som fx det centrale “polygonbegreb” er blevet udforsket og udvidet (strakt) i bestræbelserne på at forstå sammenhængen mellem gitterpolygons areal og deres antal af indre gitterpunkter og kant-gitterpunkter. Derved har vi ikke tilføjet nyt indhold til selve Picks Sætning, men derimod set, hvordan den kan generaliseres i forskellige retninger ved at udfordre den med forskellige typer modeksempler. Det forhold, at begreberne er skabt igennem denne dialog mellem eksperimenter og beviser, viser på bedste vis, at eksperimenterne *ikke kun* hører til i den heuristiske fase (opdagelses-konteksten), men også kan spille en vigtig rolle i den bevisende fase (begrundelses-konteksten), og at disse to faser nok ikke kan/bør skelnes skarpt. Derfor illustrerer forløbet på fin vis det nye begreb om *udforskende eksperimenteren* (exploratory experimentation) i matematikken.¹⁰ Der består dog stadig en overgang mellem eksperimenter og beviser, som ikke er helt let at kvalificere og beskrive i alle detaljer. Her er det illustreret ved, at der gives forskellige typer argumenter og beviser. Nogle gange er de formuleret med basis i eksperimenter og figurer og udleder resultater i en mere konkret, mindre generel version. Andre gange er de formuleret som traditionelle matematiske (hjælpe-)sætninger efterfulgt af mere syntetiserede beviser, som også kan involvere ny og mere generel notation. Det er en eksplicit pointe, at alle disse argumentationsformer — og alle deres nuancer — hører til den matematiske praksis. Derfor er denne note også designet til at vise bredden i matematiske argumenter.

Det her beskrevne forløb kan godt stå alene i matematikundervisningen. Men fordi forløbet er så eksplicit omkring de involverede metoder, er det oplagt at perspektivere det med et videnskabsteoretisk element, der fx kan sammenligne til andre fags argumentationsformer.

Man kunne også sætte dette forløb ind i en mere historisk kontekst på flere forskellige måder.

⁹LAKATOS’ vigtigste analyse forekommer i værket Lakatos (1976), der er præsenteret som en dialog i et klasselokale, hvor en række meget dygtige elever og en lærer udforsker en formodning om polyedre, der på mange måder minder om en lidt mere generel version af Picks Sætning. LAKATOS har også udfoldet sine filosofiske pointer i Lakatos (1978). For mere om LAKATOS’ matematikfilosofi henvises til fx Davis og Hersh (1981a) og Johansen og Sørensen (2014).

¹⁰Se også Sørensen (2010), som også er blevet optaget af de udøvende matematikere (D. H. Bailey og J. M. Borwein, 2011).

For eksempel kunne man perspektivere den del, der handler om at oversætte arealbestemmelse fra måling til tælling med en historisk udfoldelse af problemet omkring arealbestemmelse af retlinjede figurer i bog I og II af EUKLID (ca. 295 f.v.t.) *Elementerne*.¹¹ Man kunne også vælge at lægge en mere kontekstuel vinkel og gå dybere ind i PICKS biografi. Hans uddannelse, karriere og livsforløb peger på mange karakteristiske og udfordrende elementer af Europas historie i perioden 1880–1945. Således er der både noget interessant at sige om PICKS baggrund og uddannelse i Wien, om hans karriere i det østrigske imperium og om hans endelig i en nazistisk koncentrationslejr i 1942.

6 Metodologisk inspiration fra Polya og Lakatos

Det kan sommetider være svært at forestille sig, hvordan matematiske ideer og begreber opstår og udvikles. I denne øvelse skal vi arbejde med nogle fælles træk, som nogle gange indgår i matematisk problemløsning. Til det formål kan vi tage udgangspunkt i en konstrueret undersøgelse af en interessant egenskab ved nogle tal. Dialogen er baseret på en oversættelse fra Davis og Hersh (1981b, s. 293–298), som er suppleret med yderligere ideer hentet fra bl.a. Lakatos (1976), Mason (1999) og Pólya (1957). For en sammenhængende, videnskabsteoretisk indføring i heuristik og matematiske begrebers udvikling, se Johansen og Sørensen (2014, kap. 7 og 8).

Matematikeren GEORGE PÓLYA (1887–1985) har beskrevet de faser, som matematikere går igennem, når de løser problemer som en fire-skridts-proces (baseret på Pólya, 1957, s. 5–19; se også Johansen og Sørensen, 2014, kap. 8). Det første skridt består i at studere problemet nok til at forstå, hvad der er kendte (givne) og hvad der er ubekendte størrelser. Derudover kan man tegne en illustration og indføre passende notation. Disse kan hjælpe med det centrale skridt i at formulere en formodning og nå frem til et bevis for den. PÓLYA beskriver dette skridt, nemlig at lægge en plan for at løse problemet, således:

Find sammenhængen mellem data og den ubekendte. Kan du lave en simplere version af problemet? Kender du lignende problemer hvis løsning du kan trække på?
Kan du indføre hjælpeelementer, der gør dit problem lettere? (Pólya, 1957)

Nogle gange kan det især være frugtbart at begrænse sit problem ved enten kun at kigge på nogle særlige tilfælde eller ved at tilføje yderligere begrænsninger i form af ekstra antagelser eller struktur, som man kan bruge i sine undersøgelser.

Når man så har lagt sin plan for at løse det matematiske problem, så skal den også udføres. Det gøres ved at konstruere et argument, som viser, hvordan og især hvorfor de forskellige oplysninger er relaterede til hinanden. Derfor er man også nødt til at overveje, om argumentet er godt, korrekt og klart. I hvert skridt af denne gentagne proces er det vigtigt at undersøge sine løsninger: Kan du tjekke dit resultat på en måde? Kan du udlede resultatet på en anden måde? Kan du bruge resultatet til at løse et andet problem? En vigtig del af dette falder imidlertid tilbage på, at man skal præcisere og udvikle de begreber, som man arbejder med. Nogle matematiske begreber kan synes at være klart definerede, men hvis man skal forstå den fase, hvori ny matematisk viden udvikles, så skal man nok nærmere forstå begreberne som

¹¹Se Euklid (1897–1912) og Glunk m.fl. (2006).

flydende og underbestemte. Det er det, som filosoffen LAKATOS sætter fokus på med sin metode om “beviser og gendrivelser” (Lakatos, 1976).

LAKATOS’ metode tager udgangspunkt i, at matematisk viden fremkommer af en dialog mellem beviser og modeksempler. LAKATOS beskriver denne ide i en bog, som er udformet som en dialog i et klasseværelse, hvoraf denne notes form selvfølgelig er inspireret. Dialogen starter, hvor klassen har formuleret en formodning og et simpelt bevis for den. Beviset har form af et tankeeksperiment, som opdeler formodningen i dele, som kan forsøges bevist. Klassen går så i gang med at konstruere modeksempler ved at udfordre det centrale matematiske begrebs grænser (i deres tilfælde ‘polyeder’, her ‘magisk tal’). De indsigter, som modeksemplerne giver bruges til at forbedre og præcisere formodningen, sådan at modeksemplerne ikke længere er modeksempler til den raffinerede formodning, som i stedet tager højde for dem.

6.1 En dialog om magiske tal

Lad os forstille os en samtale i et matematikklasse med nogle rigtig dygtige elever, Alfa, Beta, Gamma, Delta, Epsilon og Kappa. Det er især Alfa og Beta, som taler, idet de ønsker at udvikle en matematisk erkendelse.

1. Alfa: „Hey, Beta! Har du nogensinde tænkt over, at tal, som ender på 2, også er delelige med 2? 12, 62, 122 er eksempler.“
2. Alfa: „Faktisk gælder noget lignende for tal, der ender på 5 — de er også alle sammen delelige med 5. Er det ikke forunderligt?“

Selvom eksemplet måske synes simpelt, er det et fællestræk ved megen matematisk indsigt, at den tager udgangspunkt i simple observationer af symmetrier og regularitet.

3. Beta: „Jeg kan hjælpe dig med det første eksempel: Et tal, som ender på 2 er *lige* — og alle lige tal er (per definition) delelige med 2.“
4. Beta: „Hvis du nu skriver cifrene i et tal, som ender på 2, sådan her $a_n a_{n-1}, \dots, a_1 2$, så er tallets værdi $A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + 2 = 10Q + 2 = 2(5Q + 1)$ for et heltalligt Q , som vi dog ikke behøver at kende nærmere. Altså går 2 op i hvert led og dermed også i summen.“
5. Alfa: „Jeg kan bruge præcis samme metode for mit eksempel: Hvis et tal ender på 5, og det skrives som $b_m b_{m-1} \dots b_1 5$, så er dets værdi $B = b_m \times 10^m + b_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots + b_1 \times 10 + 5 = 10P + 5 = 5(2P + 1)$ for et heltalligt P .“

På denne måde gøres en observation til et udsagn, som kan formuleres og bevises. Samtidig åbner formuleringen også for generalisering og gæt, som vi skal se.

6. Gamma: „Hey, I har fat i noget! Måske kan ethvert tal, som ender på et tal N , også divideres med N .“

Men straks begynder problemerne at vise sig:

7. Alfa: „Hold nu lige hesten. 14 ender på 4, men 4 går ikke op i 14.“

8. Beta: „Men 4 *går* op i nogle af de tal, som ender på 4, fx 24. Og 9 går op i *nogle* tal, der ender på 9, fx 99.“

De interessante matematiske spørgsmål er næsten altid mere komplekse end simple formodninger. Og tit skal der bruges både begrebsafklaring og gode ideer undervejs. Men først kan det være en god ide at samle op på, hvad man ved:

9. Gamma: „Hm. I har ret, men jeg tror nu alligevel, at jeg har fat i noget interessant. Cifrene $1, 2, \dots, 9$ kan åbenbart inddeles i to typer: Type 1 er de cifre, N sådan at *alle* tal der ender på N kan divideres med N ; Type 2 er de cifre, N sådan at kun *nogle* af de tal, der ender på N kan divideres med N . Med den opdeling er 1, 2, 5 af Type 1 mens 3, 4, 6, 7, 8, 9 er af Type 2.“

Nogle gange kan man *strække begreberne* og opdage spændende nye matematiske forbindelser.

10. Alfa: „Hov! Du glemte noget — eller ingenting! Hvad med tal, som ender i 0 — kan de divideres med 0? Nej, vel? Men de kan divideres med 10. Hm. Måske er der mere i det end som så?“

Og på den måde — igennem at forsøge at undersøge og bevise egenskaber — kan der opstå nye matematiske begreber.

11. Beta: „Det er altså et cool begreb, vi har fat i: Lad os kalde tal af Type 1 for *magiske tal*: De er virkelig spændende!“

12. Gamma: „Og så kan jeg formulere en sætning: '1, 2, 5 er magiske tal — og de er de eneste'!“

Denne proces med begrebsdannelse giver jo så et mere præcist indhold til begreberne — men det er ikke (altid) på forhånd givet, hvilket indhold, de skal indfange.

13. Delta: „25! 25 er også magisk! Er det ikke? Hvis et tal ender på 25, kan det også divideres med 25 — fx 225 eller 625.“

14. Epsilon: „Er du skør?! Vi taler om slut-cifre! 25 er to-cifret — det har ikke noget med magiske tal at gøre!“ Epsilon forlader samtalen og smækker med døren.

15. Alfa: „Nej, jeg er med Delta her. Jeg kan bruge min bevisskitse igen: Hvis et tal ender på 25, og det skrives som $c_k c_{k-1} \dots c_2 25$, så er dets værdi $C = c_k \times 10^k + c_{k-1} \times 10^{k-1} + \dots + c_2 \times 10^2 + 25 = 100R + 25 = 25(4R + 1)$ for et heltalligt R .“

Og netop fordi de nye begreber er *nye* og (tit) *mere generelle* er det en interessant matematisk opgave at forstå dem. Det kan man typisk gøre igennem at karakterisere dem, evt. klassificere dem, og ved at bevise sætninger omkring dem. Det er her vigtigt at understrege, at nye matematiske begreber som oftest har en forbindelse med eksisterende matematiske begreber, fx igennem generalisering (eller fx præcisering, aksiomatisering, abstraktion).

16. Beta: „Spændende! Med den udvidelse af begrebet *magiske tal* kan beviset føres ret direkte over. Men listen må udvides: 10, 20, 25 og 30 er også magiske!“

17. Alfa: „Lær noget hovedregning! 30 er da ikke magisk — 130 kan fx ikke deles med 30!“
18. Beta: „Nå ja, sorry. Men listen er så (indtil videre) 1, 2, 5, 10, 20, 25.“
19. Alfa: „Men også endnu flere: 50, 100, 250, 1000 og helt sikkert rigtig mange andre!“
20. Beta: „Nu vil jeg vide det! Hvilke tal er magiske?“

Her er Beta nået til en vigtig skillevej — hun kan *empirisk* remse en lang række magiske tal op, men det hun i virkeligheden søger er en karakterisering af *begrebet*. Pointen er, at disse to ting ikke er adskilte faser: Man kan bruge den indsigt og inspiration, man har opnået i den empiriske del til at informere den bevisende del.

21. Delta: „Det ser ud til, at alle de magiske tal, vi har fundet, er produkter af 2'ere og 5'ere. Måske er det en måde at komme videre på?“
22. Alfa: „Oh yeah! Lad os prøve at bevise sætningen: 'Ethvert tal N på formen $N = 2^p \times 5^q$ hvor $p \geq 0, q \geq 0$ er et magisk tal'.“
23. Beta: „Nu er det din tur til at drage forhastede konklusioner! Tag $p = 3$ og $q = 1$, så er $N = 2^3 \times 5 = 40$ som ikke er magisk, fx kan 140 ikke divideres med 40.“

Nogle gange skal man — inspireret af Poppers falsifikationisme — fremsætte “modige formodninger” og forsøge at bevise eller gendrive dem. Og nogle gange må man (midlertidigt) opgive sine formodninger og prøve at angribe problemet fra en anden vinkel.

24. Alfa: „Ah, øv! Men ja, du har ret. Hvad så med den anden vej? Kan vi forsøge at bevise sætningen: 'Alle magiske tal er på formen $N = 2^p \times 5^q$ for et valg af $p \geq 0, q \geq 0$ '?“
25. Beta: „Var det ikke det forslag, vi lige jordede?“
26. Alfa: „Nej, det er jo den anden vej rundt. En nødvendig, men ikke tilstrækkelig betingelse. Lad os prøve den først — så kan det være, at vi kan vende tilbage til en tilstrækkelig betingelse om lidt.“

Denne opdeling i at undersøge nødvendige og tilstrækkelige betingelser er en udbredt del af at karakterisere et matematisk begreb. Igen lægger man mærke til, at tidligere empirisk funderet information kan bruges undervejs.

27. Alfa: „Jeg kan gøre min bevisskitse mere præcis og generel, så den kan hjælpe os. Lad os betragte et tal A , som ender i N (hvor N kan være et fler-cifret tal). Hvis vi skriver cifrene i A på formen $a_k a_{k-1} \dots a_0 N$ og indfører notationen $d(N)$ for antallet af cifre i N , så er A i virkeligheden bare

$$A : a_k a_{k-1} \dots a_0 \underbrace{0 \dots 0}_{d(N)} + N. \quad (26)$$

Derfor kan jeg skrive $A = Q \times 10^{d(N)} + N$.

28. Beta: „Ok. Så langt så godt — det passer også fint med ideerne fra bevisskitsen ved nøjes med at betragte $d(N) = 2$ eller $d(N) = 3$.“

29. Alfa: „Nemlig. Alle tal, som ender på N er altså på denne form, og for ethvert heltal Q ender $Q \times 10^{d(N)} + N$ på N . Hvis vi nu bruger antagelsen, at N er magisk, så må N altså gå op i $Q \times 10^{d(N)} + N$ for ethvert heltal Q . Og da N selvfølgelig går op i N , må N også gå op i $Q \times 10^{d(N)}$ for alle Q . Specielt må (for $Q = 1$) N gå op i $10^{d(N)} = 2^{d(N)} \times 5^{d(N)}$. Fordi dette er en primtalsfaktorisering, må N altså selv kunne faktoriseres som et produkt af potenser af 2 og 5.“
30. Beta: „Det kan jeg godt følge, selvom du bruger nogle talteoretiske sætninger undervejs. Heldigvis er de ikke så svære at indse og bevise.“
31. Delta: „Cool! Så har vi bevist, at ethvert magisk tal er af formen $2^p \times 5^q$ for nogle heltal, $p, q \geq 0$. QED, homies!“

Matematisk beviser bygges altid op oven på tidligere matematisk viden og tidligere beviser. Her bruger eleverne således to sætninger, som siger

- Hvis n går op i $a + b$ og n går op i a , så går n også op i b .
- Hvis et tal a går op i $p_1^{k_1} \times \cdots \times p_m^{k_m}$ for $p_1, \dots, p_m$ primtal, så er $a = p_1^{u_1} \times \cdots \times p_m^{u_m}$ hvor $0 \leq u_j \leq k_j$ for alle $j = 1, \dots, m$.

Disse sætninger er simple talteoretiske resultater, som man kan bevise direkte ud fra fx egenskaber ved primtalsfaktorisering.

32. Beta: „Ja, det er lidt cool. Men egentlig var vi jo interesserede i en tilstrækkelig betingelse. Måske kan Alfa's bevis hjælpe os til at sige noget om p, q sådan at $2^p \times 5^q$ bliver et magisk tal?“
33. Gamma: „Jeg vover pelsen: $p \leq q$?“
34. Alfa: „Nej, det er ikke nok. Tag $p = 0, q = 4$. Så er $N = 2^0 \times 5^4 = 625$, men 625 er ikke magisk, da det fx ikke går op i 1625.“
35. Gamma: „ $p = q$?“
36. Alfa: „Så bliver $N = 2^p \times 5^p = 10^p$ og vi får alle 10-potenserne. De er ganske rigtig magiske, men der er jo flere magiske tal end dem.“
37. Gamma: „ $p \geq q$?“
38. Alfa: „Det er heller ikke nok. Tag $p = 3, q = 1$. Så er $N = 2^3 \times 5^1 = 40$, og det har vi allerede set ikke er magisk.“
39. Beta: „Hm. Det er nok ikke helt så ligetil, så. Vi må nok have fat i en anden måde at kategorisere på.“

En udtømmende søgning kan være en god heuristik — men det er aldrig på forhånd sikkert, at det man udtømmer er relevant for problemstillingen. For at gå mere konstruktivt til værks må man kigge på selve beviset og foretage en bevisanalyse: Hvad er det for information, der vil kunne fuldende en bevisskitse?

40. Delta: „Hvad nu hvis vi kigger lidt nærmere på Alfa’s bevis? Det centrale argument i skridt 29 var, at hvis N er magisk, så går N op i $10^{d(N)}$. Måske er det også en tilstrækkelig betingelse?“
41. Alfa: „Ha! Det er sgu da smart — det hele falder på plads. Vi ved, at ethvert tal A , som ender på N har formen $A = Q \times 10^{d(N)} + N$. Og N går selvfølgelig op i N og ved antagelsen også i $10^{d(N)}$, så derfor går det også op i A . Case closed!“
42. Beta: „Så vi har altså bevist sætningen: ’Et tal N er magisk hvis og kun hvis det går op i $10^{d(N)}$.‘“

På den måde kan man komme til at finde den eftersøgte karakterisering i termer af noget, der faktisk svarer på spørgsmålet, men måske ikke gør det helt på den ønskede måde. Her var vi jo faktisk interesserede i et sikkert indicium i termer af N (eller af p, q) og ikke via størrelsen $d(N)$, som synes at være et teknisk artefakt. Så selvom et svar er opnået er vejen ikke slut.

43. Kappa: „I er kommet langt, men det er jo stadig ikke noget kriterium, som direkte relaterer til N . Jeg vil postulere sætningen: ’Et tal N er magisk hvis og kun hvis $N = 2^p \times 5^q$, hvor $0 \leq q - p + 1 \leq 4$.‘“
44. De øvrige: „Wow! Hvor kom det fra? Det må du vise os i næste uge!“

Nedenfor er Kappa’s bevis præsenteret i en kortere form. Og selvom det giver en meget præcis og kortfattet karakteristik af magiske tal, så er kæden af spørgsmål ikke engang slut der! Man kan sagtens generalisere yderligere (for eksempel ved i stedet for base 10 at betragte spørgsmålet i base p eller p^n for primtal p), og de indgående metoder — heuristik, beviser og modeksempler — vil sikkert gå igen og igen. Men det må virkelig vente til en anden uge!

6.2 Aktiviteter

Aktivitet 6.1. Hvad kan du på nettet eller i dine bøger (fx Johansen og Sørensen, 2014, kap. 8) finde ud af om LAKATOS’ *Beviser og Gendrivelser* (engelsk: *Proofs and Refutations*)? Find især beskrivelser og eksempler af de to typer modeksempler, som kaldes “lokale” og “globale” modeksempler, og de bevismodifikationer, LAKATOS foreslår til at imødegå dem.

Aktivitet 6.2. Læs dialogen herover igennem og fokusér i første omgang på at følge elevernes matematiske ræsonnementer. Prøv dernæst at karakterisere de forskellige former for viden, som de når frem til i løbet af dialogen: Er der tale om formodninger, gæt, eksempler, systematiseringer, beviser, modeksempler, undtagelser, monstre, ...

Aktivitet 6.3 (undersøgelse). Beskriv jeres forskellige bud på regler fra level 5 ved at sammenholde den med en lakatosk dialog og de termer, som blev introduceret i aktiviteterne 6.1 og 6.2. Hvad var det, I havde glemt at tænke på ved de forkerte bud i level 5?

Aktivitet 6.4 (buffer). Læs gennemgangen af Kappa's bevis nedenfor. Den er skrevet i et lidt mere teknisk sprog — kan du forstå det og følge hvert skridt? Kan du måske endda udfylde argumenter for nogle af de få udeladte skridt? Kan du overbevise dig selv om både udsagnet og bevisets korrekthed?

Aktivitet 6.5 (refleksion). Betragt igen hele jeres proces med at arbejde henimod et bevis for Picks sætning og jeres analyse af denne dialog. Hvori består forskelle og ligheder imellem de to opdagelsesprocesser? Hvilken rolle spiller eksempler og eksperimenter i de to processer? Hvilke roller spiller beviser og modeksempler? Hvor generelt er det billede for den slags matematik, som I har mødt indtil nu i jeres uddannelse?

6.3 Kappa's bevis

Ideen i Kappa's raffinerede bevis er at forsøge at udtrykke $d(N)$ ved hjælp af eksponenterne p og q . Han observerer, at det er en tilstrækkelig og nødvendig betingelse for at $N = 2^p 5^q$ går op i $10^{d(N)}$ at $p \leq d(N)$ og $q \leq d(N)$. Han vælger nu at skrive betingelsen $p, q \leq d(N)$ som

$$\max p, q \leq d(N) = d(2^p 5^q), \quad (27)$$

og han skriver $q = p + h$ for et $h > 0$ (det vender vi tilbage til). Ideen er så at forsøge at "parre" hver 2-faktor i N med en 5-faktor, da de sammen giver anledning til yderligere et ciffer i N .

Skriv nu betingelsen (27) som

$$\max p, p + h \leq d(2^p 5^{p+h}) = d(2^p 5^p 5^h) = d(10^p 5^h). \quad (28)$$

Men da $h > 0$ er $\max p, p + h = p + h$. Og antallet af cifre i $10^p \times Q$ er altid $p + d(Q)$, når Q er et heltal og $d(Q)$ er antallet af cifre i Q . Altså er $p + h \leq p + d(5^h)$ eller med andre ord: $h \leq d(5^h)$.

Men om hvilke h gælder mon, at $h > 0$ og $h \leq d(5^h)$? Eneste udvej er at gennemløbe alle (de få) tilfælde:

$h = 1$: $1 \leq d(5^1)$ OK

$h = 2$: $2 \leq d(5^2) = d(25) = 2$ OK

$h = 3$: $3 \leq d(5^3) = d(125) = 3$ OK

$h = 4$: $4 \leq d(5^4) = d(625) = 3$ NEJ

$h = 5$: $5 \leq d(5^5) = d(3125) = 4$ NEJ

Og for alle $h > 5$ er det kun endnu værre (overladt til læseren!). Så de eneste h for hvilke betingelserne $h > 0$ og $h \leq d(5^h)$ er opfyldt er $h = 1, 2, 3$.

Men vi sprang over tilfældet $p > q$ ovenfor. Det kan nu gennemføres helt analogt med det foregående. Vi sætter $p = q + k$ for et $k > 0$ og skriver $q + k = \max q + k, q \leq d(2^{q+k} 5^q) = d(10^q 2^k) = q + d(2^k)$. Så hvornår er $k > 0$ og $k \leq d(2^k)$? Igen skal vi prøve tilfældene igennem:

$k = 1$: $1 \leq d(2^1)$ OK

$k = 2$: $2 \leq d(2^2) = d(4) = 1$ NEJ

Og igen kan vi opsummere, denne gang som $k \leq d(2^q)$ hvis og kun hvis $k = 1$ (overladt til læseren!).

Vi kan derfor sammenfatte undersøgelsen og konkludere, at N er et magisk tal, hvis og kun hvis det er en potens af 10 ganget med 1, 2, 5, 25 eller 125. Eller med andre ord på formen $N = 2^p 5^q$ hvor $0 \leq q - p + 1 \leq 4$.

7 Arbejdssedler fra forløb i 3.x

7.1 Arealer og polygoner

Arbejdsseddel 1.1. Vi skal arbejde polygoner i denne lektion. Hvad er en polygon og hvor stammer ordet fra? Kender I nogle eksempler på polygoner?

Arbejdsseddel 1.2. Åbn den vedlagte TI-fil “Polygoner 1”. Her kan I se eksempler på nogle polygoner. Hvordan vil I beskrive dem? Kan I inddele dem i nogle grupper? Lav jeres egne eksempler.

Arbejdsseddel 1.3. I kan se at TI kan bestemme arealerne af figurerne, få TI til at bestemme arealerne af jeres egne eksempler.

Er der nogle af polygonerne I kan bestemme arealet af uden at bruge TI? (tænk tilbage til 1.g eller folkeskolen).

Arbejdsseddel 1.4. Overvej om alle polygoner har et areal, hvad taler for, hvad taler imod? Skriv jeres argumenter og konklusion ned.

Arbejdsseddel 1.5. Beskriv den situation I har blotlagt: hvilke polygoner har arealer og for hvilke af dem har vi/kender vi formler til at beregne det? Skriv jeres konklusioner ned.

Arbejdsseddel 1.6. Hvad nu hvis TI ikke kunne finde arealerne? Har I nogle ideer til hvad man så kan gøre? Prøv at kigge på et polygon i første omgang. (hint: tænk på de arealformler i allerede kender og tænk på at man godt kan klippe polygonerne i mindre stykker).

Prøv jeres idé af på et par polygoner.

Arbejdsseddel 1.7 (buffer). Virker jeres idé for alle polygonerne?

Arbejdsseddel 1.8. Overvej hvad I har lært om polygoner indtil nu og Formulér jeres idé fra 1.4 som en opskrift andre kan følge når de skal bestemme arealer af polygoner.

7.2 Gitterpolygoner

Arbejdsseddel 2.1. Nu skal vi se på en speciel slags polygoner, nemlig gitterpolygoner. En gitterpolygon er et polygon hvor hjørnerne ligger på et gitter. Åbn TI-filen “Polygoner 2” og se på eksemplerne.

Lav jeres egne eksempler på gitterpolygoner.

Arbejdsseddel 2.2. I kan igen se at TI kan bestemme arealerne af polygonerne. Få TI til at bestemme arealerne af jeres egne eksempler.

Arbejdsseddel 2.3. Kig på arealerne af gitterpolygonerne. Ser arealerne ud på en bestemt måde? Sammenlign med arealerne af de andre polygoner.

Arbejdsseddel 2.4 (buffer). Prøv at lave de vildeste gitterpolygoner og se om arealerne stadig opfører sig på samme måde.

Arbejdsseddel 2.5. Overvej hvad der sker med polygoner når vi laver den regel at deres hjørner kun må ligge på gitterpunkter og beskriv hvordan arealerne af gitterpolygoner ser ud.

Arbejdsseddel 2.6. Kender andre eksempler fra matematiktimerne hvor vi laver regler om objekter? Skriv jeres tanker ned.

7.3 Simple gitterpolygoner

Arbejdsseddel 3.1. I den vedlagte TI-fil “Polygoner 3” er der en række simple gitterpolygoner. Overvej hvilke der har det samme areal og bestem derefter arealerne.

Arbejdsseddel 3.2. Polygonerne ligger i et punktgitter. Hvilke typer punkter kan man tale om ved et sådant polygon? (hvordan ligger punkterne ift. polygonet?). Tæl punkterne.

Arbejdsseddel 3.3. Kan I kombinere jeres viden om arealer og punkter til en formel for arealet af en gitterpolygon? Prøv jer frem — I skal sikkert afprøve flere bud på formler.

Arbejdsseddel 3.4 (buffer). Lav selv nogle simple polygoner og afprøv jeres formel.

Arbejdsseddel 3.5. Overvej hvor god din formel er? Hvor virker den? Har den begrænsninger? Hvad mangler den for at du kan sige om den virker generelt? Skriv jeres konklusioner ned.

7.4 Gitterpolygoner generelt

Arbejdsseddel 4.1. Virker din formel på mere komplicerede polygoner. Afprøv på de polygoner du har i “Polygoner 2”.

Arbejdsseddel 4.2. Prøv selv at lave nogle polygoner og afprøv din formel.

Arbejdsseddel 4.3. Er der begrænsninger? Tænk på nogle af de polygoner vi talte om i starten, virker formelen på dem? Hvad med polygoner med huller? Lav nogle forsøg på TI.

Arbejdsseddel 4.4. Overvej hvorfor der er begrænsninger, er det formelen der har begrænsninger? Eller er det polygonerne? Skriv jeres konklusion ned.

7.5 Triangulering af gitterpolygoner

Arbejdsseddel 5.1. Hvad sker der med punkter og arealer når man deler et polygon i to (eller flere dele)? Brug filen “Polygoner 4” som inspiration.

Arbejdsseddel 5.2. Hvad sker der med punkter og arealer når man sammensætter to (eller flere) polygoner?

Arbejdsseddel 5.3. Formulér nogle regler for punkterne i gitterpolygoner, når du sammensætter og deler dem. Du kan evt. Indfør nogle passende navne til elementerne. Formuler reglerne så enkelt som muligt og gem alle dine bud på regler (også de forkerte).

Arbejdsseddel 5.4 (buffer). Undersøg om dit bedste bud på regler holder ved at tjekke mange tilfælde. Brug TI til at vise de cases du kigger på. Ret på reglerne hvis det er nødvendigt formuleringen. Gem alle dine bud på regler (også de forkerte).

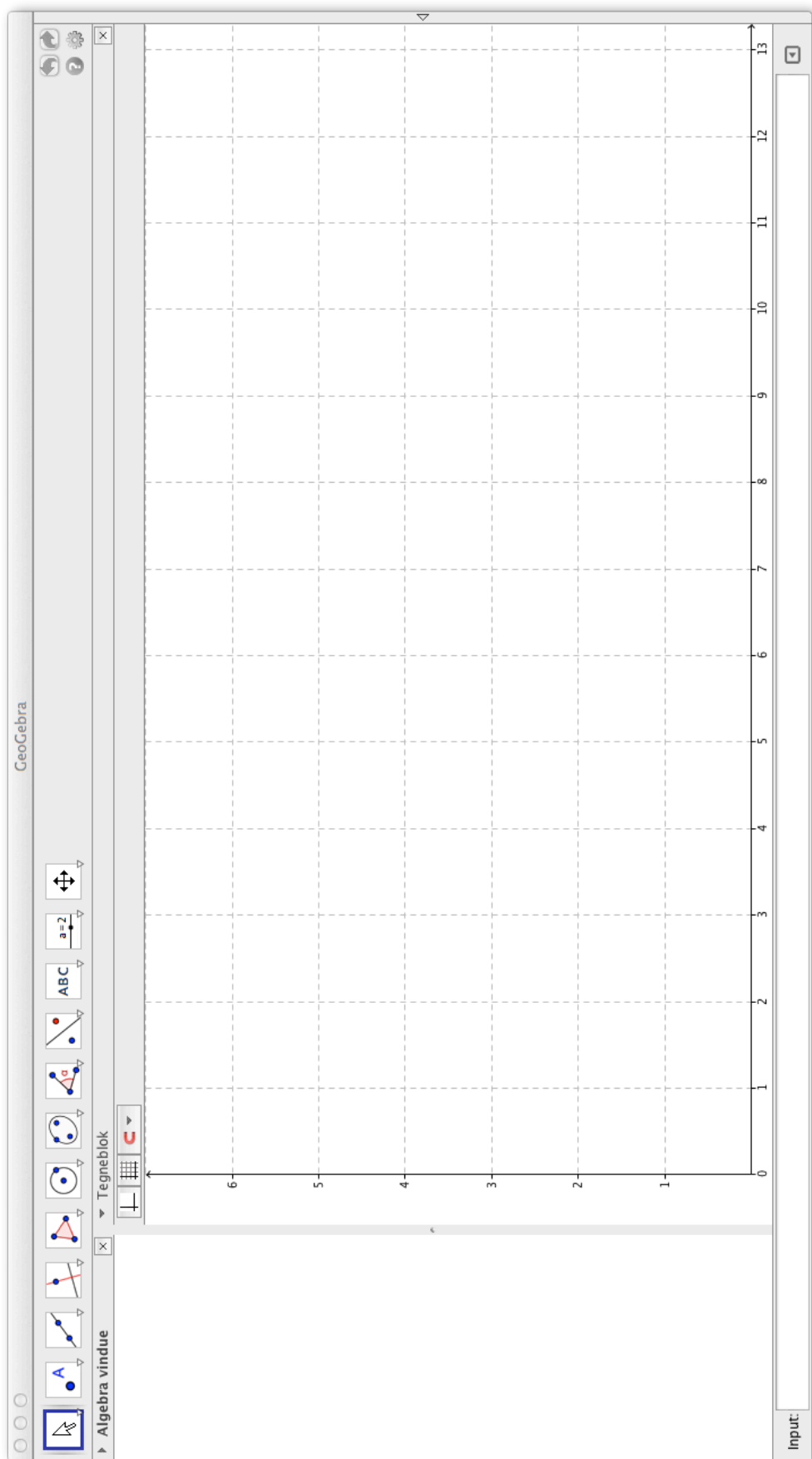
Arbejdsseddel 5.5. Overvej om din formel gælder i alle tilfælde? Kan vi kalde en sætning? En sætning med et bevis?

Referencer

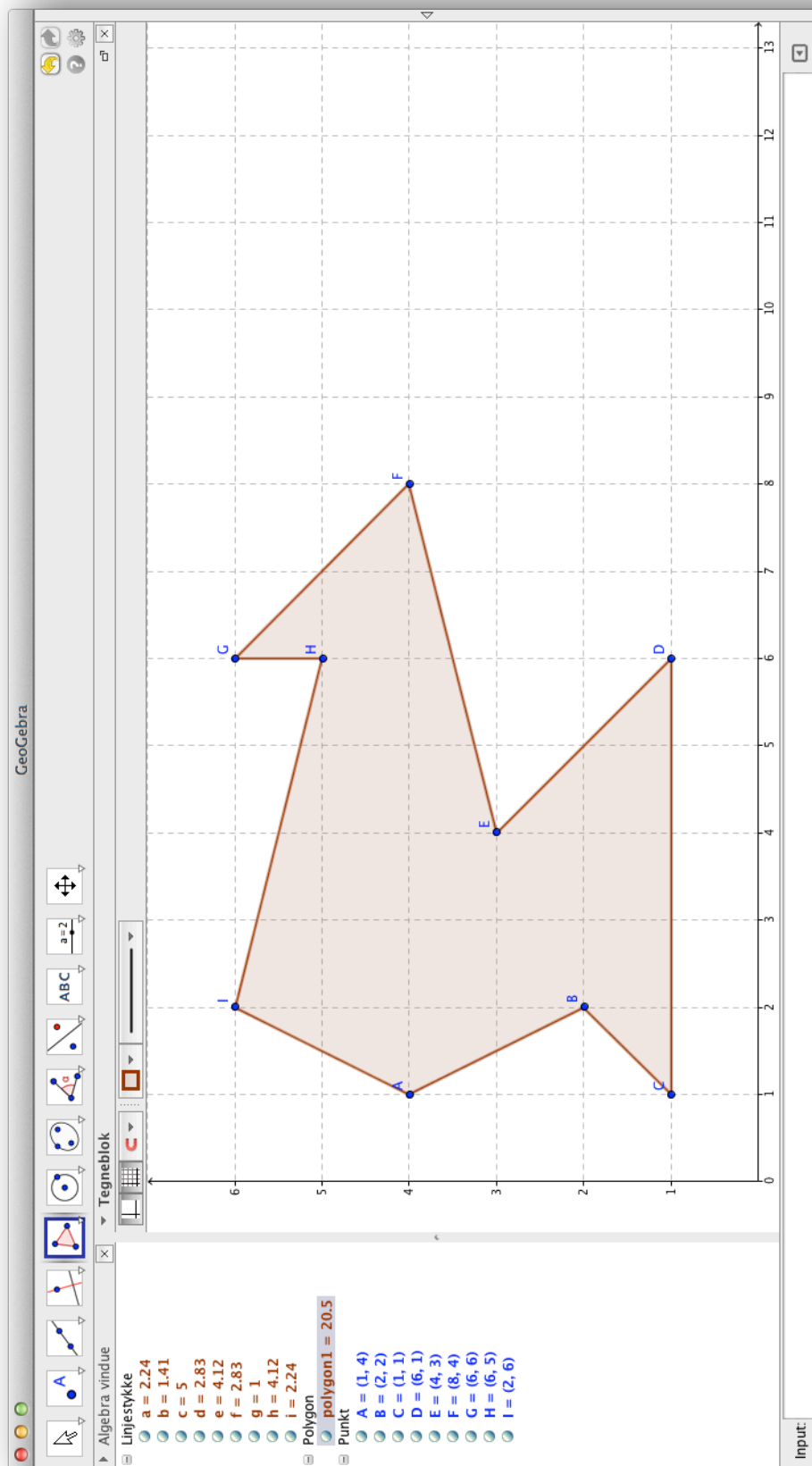
- Apostol, Tom M. (2000). „Lattice Points“. *Cubo Matemática Educacional*, bd. 2, s. 157–173.
- Arzarello, Ferdinando m.fl. (2012). „Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs“. I: *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Udg. af Gila Hanna og Michael de Villiers. New ICMI Study Series 15. Springer. Kap. 5, s. 97–143.
- Bailey, David H. og Jonathan M. Borwein (nov. 2011). „Exploratory Experimentation and Computation“. *Notices of the AMS*, bd. 58, nr. 10, s. 1410–1419.
- Balacheff, Nicolas (2010). „Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective“. I: *Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives*. Udg. af Gila Hanna, Hans Niels Jahnke og Helmut Pulte. Springer. Kap. 9, s. 115–135.
- Borwein, Jonathan Michael (2012). „Exploratory Experimentation: Digitally-Assisted Discovery and Proof“. I: *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Udg. af Gila Hanna og Michael de Villiers. New ICMI Study Series 15. Springer. Kap. 4, s. 69–96.
- Borwein, Jonathan og David Bailey (2004). *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*. Natick (MA): A K Peters.
- Cabassut, Richard m.fl. (2012). „Conceptions of Proof — In Research and Teaching“. I: *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Udg. af Gila Hanna og Michael de Villiers. New ICMI Study Series 15. Springer. Kap. 7, s. 169–190.
- Davis, Philip J. og Reuben Hersh (1981a). „Lakatos and the Philosophy of Dubitability“. I: *The Mathematical Experience*. Boston: The Harvester Press. Kap. 7, s. 345–359.
- (1981b). *The Mathematical Experience*. Boston: The Harvester Press.
- Del Centina, A. (jun. 2000). *Pick's Theorem*. URL: <http://www.unife.it/geometria/Divulg.php3> (sidst set 14.01.2013).

- Dreyfus, Tommy, Elena Nardi og Roza Leikin (2012). „Forms of Proof and Proving in the Classroom“. I: *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Udg. af Gila Hanna og Michael de Villiers. New ICMI Study Series 15. Springer. Kap. 8, s. 191–213.
- Durand-Guerrier, Viviane m.fl. (2012). „Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom“. I: *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Udg. af Gila Hanna og Michael de Villiers. New ICMI Study Series 15. Springer. Kap. 15, s. 349–367.
- Euklid (1897–1912). *Euklids Elementer*. Oversat af T. Eibe. 6 bd. København: Nordisk Forlag.
- Funkenbusch, W. W. (1974). „From Euler’s Formula to Pick’s Formula Using an Edge Theorem“. *The American Mathematical Monthly*, bd. 81, nr. 6, s. 647–648.
- Glunk, Claus m.fl. (2006). *Q. E. D. Platon og Euklid tegner og fortæller*. København: Gyldendal.
- Grünbaum, Branko og G. C. Shephard (1993). „Pick’s Theorem“. *The American Mathematical Monthly*, bd. 100, nr. 2, s. 150–161.
- Hanna, Gila (2000). „Proof, Explanation and Exploration: An Overview“. *Educational Studies in Mathematics*, bd. 44, nr. 1–2, s. 5–23.
- Hanna, Gila, Hans Niels Jahnke og Helmut Pulte, red. (2010). *Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives*. Springer.
- Hanna, Gila og Michael de Villiers, red. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. New ICMI Study Series 15. Springer.
- Hsieh, Feng-Jui, Wang-Shian Horng og Haw-Yaw Shy (2012). „From Exploration to Proof Production“. I: *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Udg. af Gila Hanna og Michael de Villiers. New ICMI Study Series 15. Springer. Kap. 12, s. 279–303.
- Johansen, Mikkel Willum og Henrik Kragh Sørensen (2014). *Invitation til matematikkens videnskabsteori*. København: Forlaget Samfundslitteratur.
- Jones, Keith og Patricio Herbst (2012). „Proof, Proving, and Teacher-Student Interaction: Theories and Contexts“. I: *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Udg. af Gila Hanna og Michael de Villiers. New ICMI Study Series 15. Springer. Kap. 11, s. 261–277.
- Lakatos, Imre (1976). *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Udg. af John Worrall og Elie Zahar. Cambridge: Cambridge University Press.
- (1978). „What does a mathematical proof prove?“ I: *Mathematics, science and epistemology. Philosophical Papers. Mathematics, science and epistemology. Philosophical Papers*. Udg. af J. Worrall og G. Currie. Cambridge m.fl.: Cambridge University Press. Kap. 4, s. 61–69.
- Lin, Fou-Lai m.fl. (2012). „Principles of Task Design for Conjecturing and Proving“. I: *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Udg. af Gila Hanna og Michael de Villiers. New ICMI Study Series 15. Springer. Kap. 13, s. 305–325.
- Mason, John (1999). *Learning and Doing Mathematics*. 2. udg. Tarquin.
- Misfeldt, Morten, Kristian Danielsen og Henrik Kragh Sørensen (2014). „Cognitive conflicts and exploratory experimentation: How can the continuous overlap between empirical and deductive proof schemes be conceptualized?“ For the ESU-7 proceedings. Under udarbejdelse.
- Niven, Ivan og H. S. Zuckerman (1967). „Lattice Points and Polygonal Area“. *The American Mathematical Monthly*, bd. 74, nr. 10, s. 1195–1200.

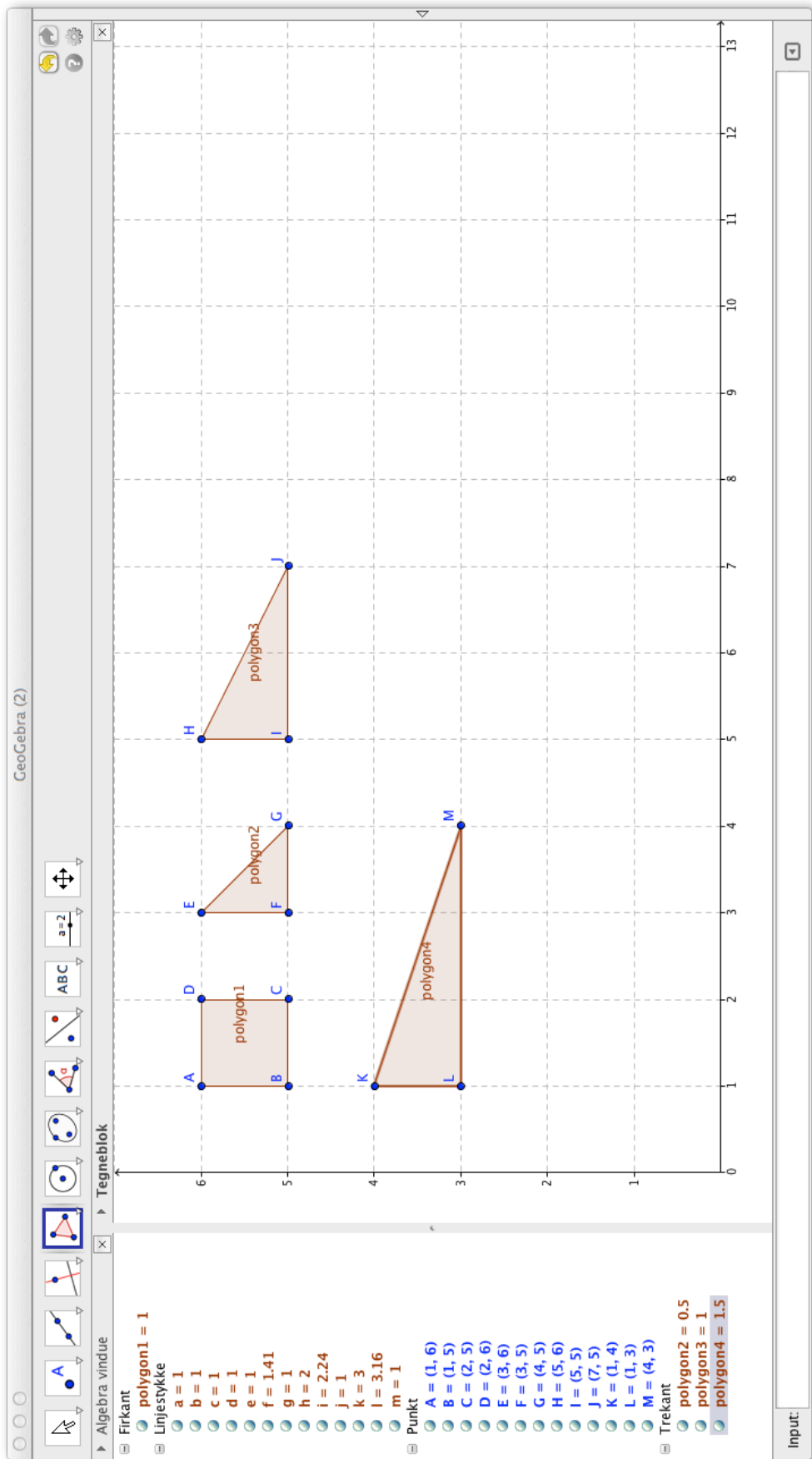
- Nunokawa, Kazuhiko (2010). „Proof, Mathematical Problem-Solving, and Explanation in Mathematics Teaching“. I: *Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives*. Udg. af Gila Hanna, Hans Niels Jahnke og Helmut Pulte. Springer. Kap. 15, s. 223–236.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton (NJ): Princeton University Press.
- Pólya, G. (1957). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. 2. udg. New York: Garden City Doubleday Anchor Books.
- Quinn, Frank (2012). „Contemporary Proofs for Mathematics Education“. I: *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Udg. af Gila Hanna og Michael de Villiers. New ICMI Study Series 15. Springer. Kap. 10, s. 231–257.
- Sørensen, Henrik Kragh (2010). „Exploratory experimentation in experimental mathematics: A glimpse at the PSLQ algorithm“. I: *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*. Udg. af Benedikt Löwe og Thomas Müller. Texts in Philosophy 11. London: College Publications, s. 341–360. URL: <http://www.lib.uni-bonn.de/PhiMSAMP/Book/>.
- (2013). „Er det matematiske bevis ved at dø ud?“ I: *Fremtiden*. Udg. af Ole Høiris. Aarhus: Aarhus Universitetsforlag, s. 99–132.
- (aug. 2014). „'The End of Proof'? The integration of different mathematical cultures as experimental mathematics comes of age“. Manuscript based on lecture at *Mathematical Cultures I*, London, September 2012. Acceperet.
- Varberg, Dale E. (1985). „Pick's Theorem Revisited“. *The American Mathematical Monthly*, bd. 92, nr. 8, s. 584–587.
- Villiers, Michael de (2010). „Experimentation and Proof in Mathematics“. I: *Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives*. Udg. af Gila Hanna, Hans Niels Jahnke og Helmut Pulte. Springer. Kap. 14, s. 205–221.
- Zaslavsky, Orit m.fl. (2012). „The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives“. I: *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Udg. af Gila Hanna og Michael de Villiers. New ICMI Study Series 15. Springer. Kap. 9, s. 215–229.



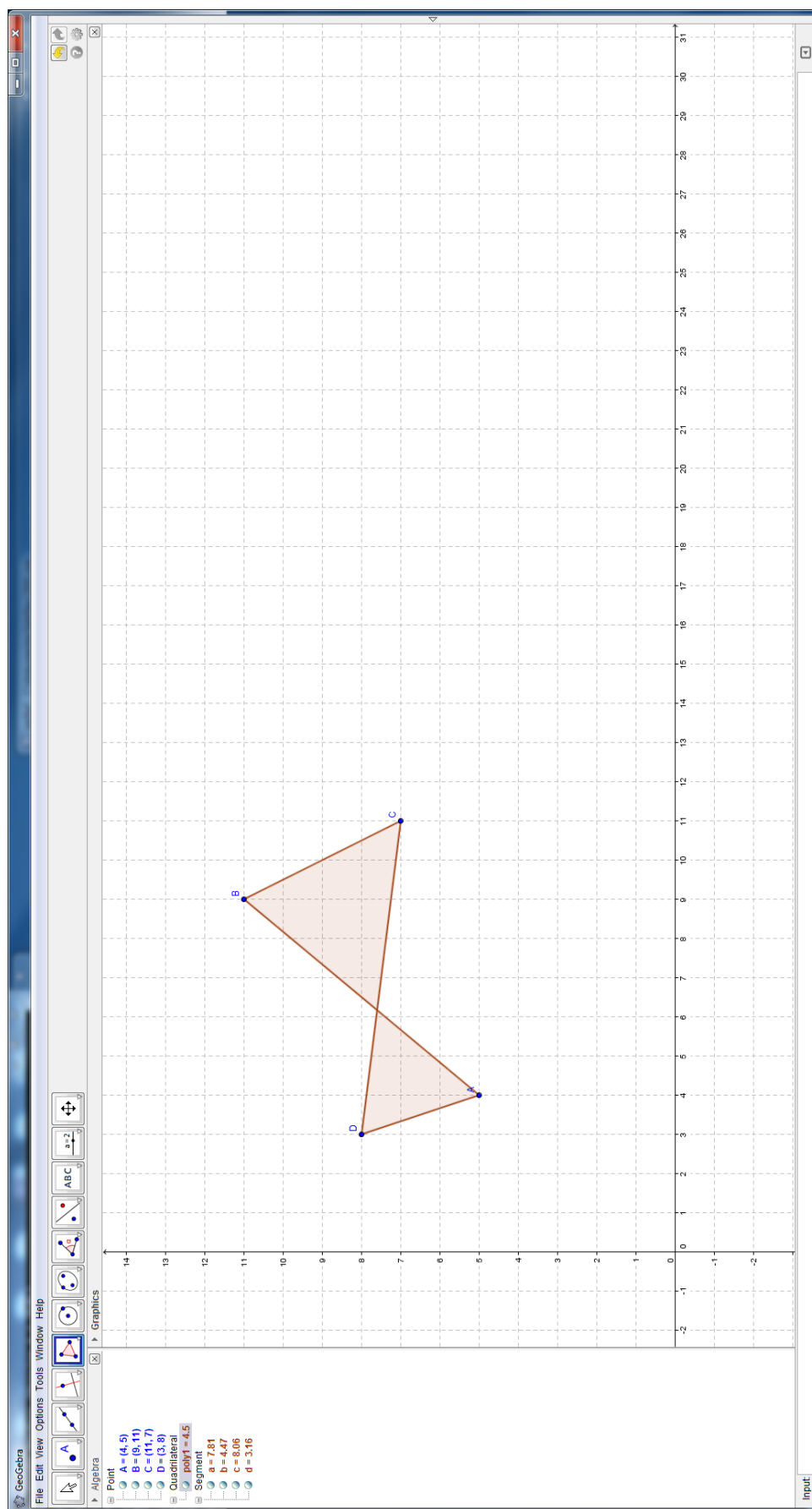
Figur 2(a): GeoGebra med et gitter slået til.



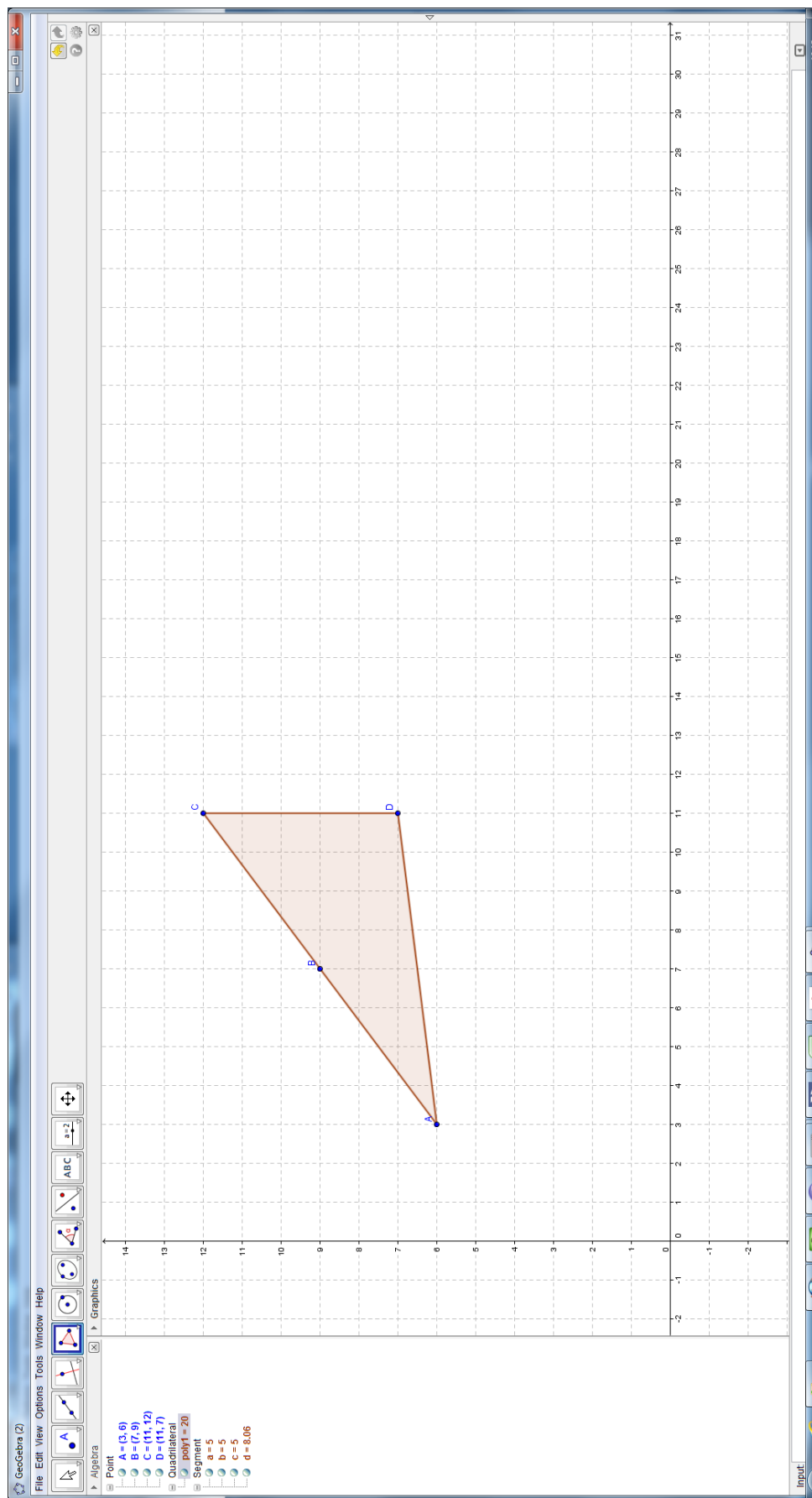
Figur 2(b): Et eksempel på et gitter-polygon i GeoGebra.



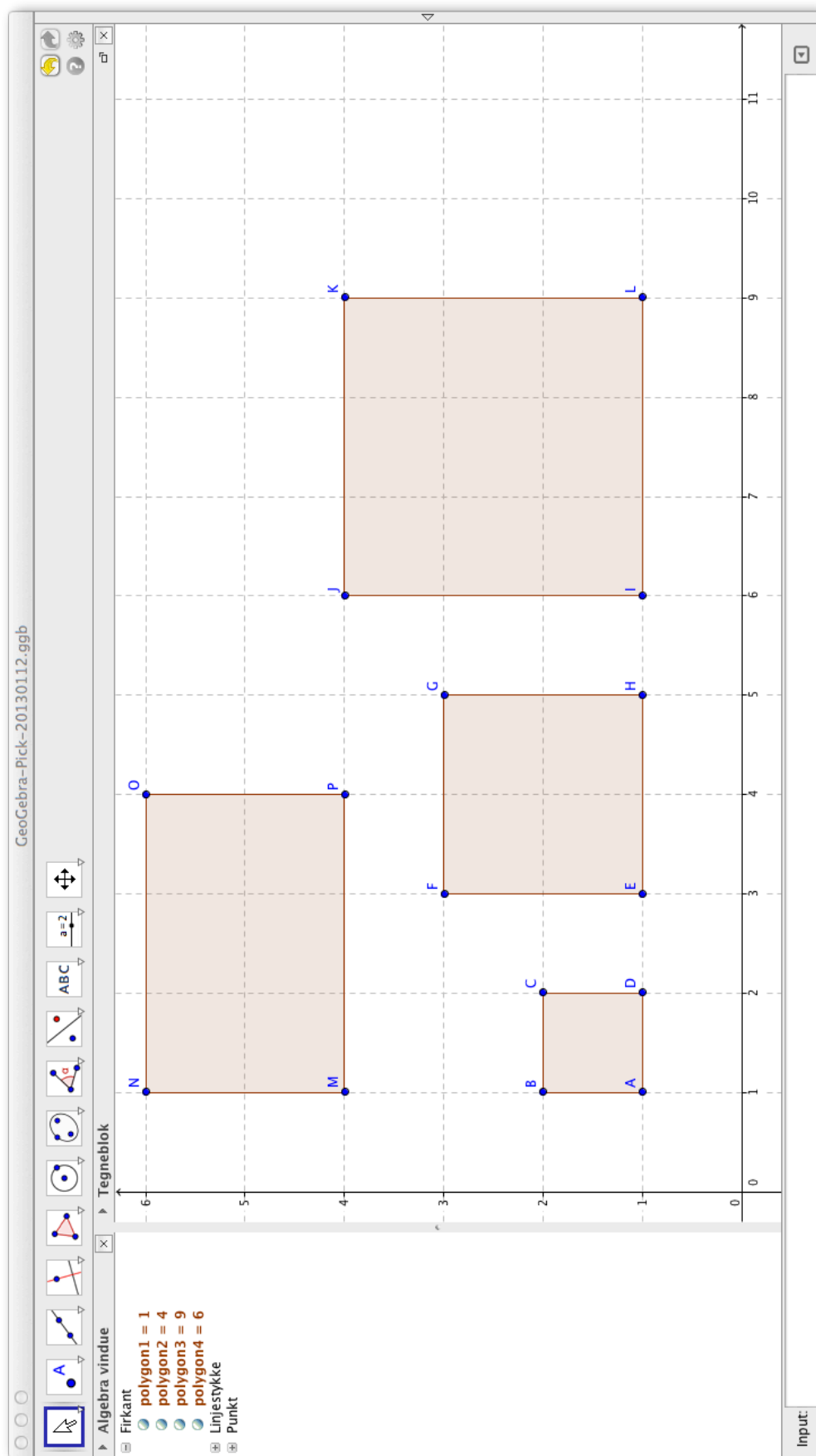
Figur 2(c): Mere systematisk afprøvning af simple gitterpolygoner.



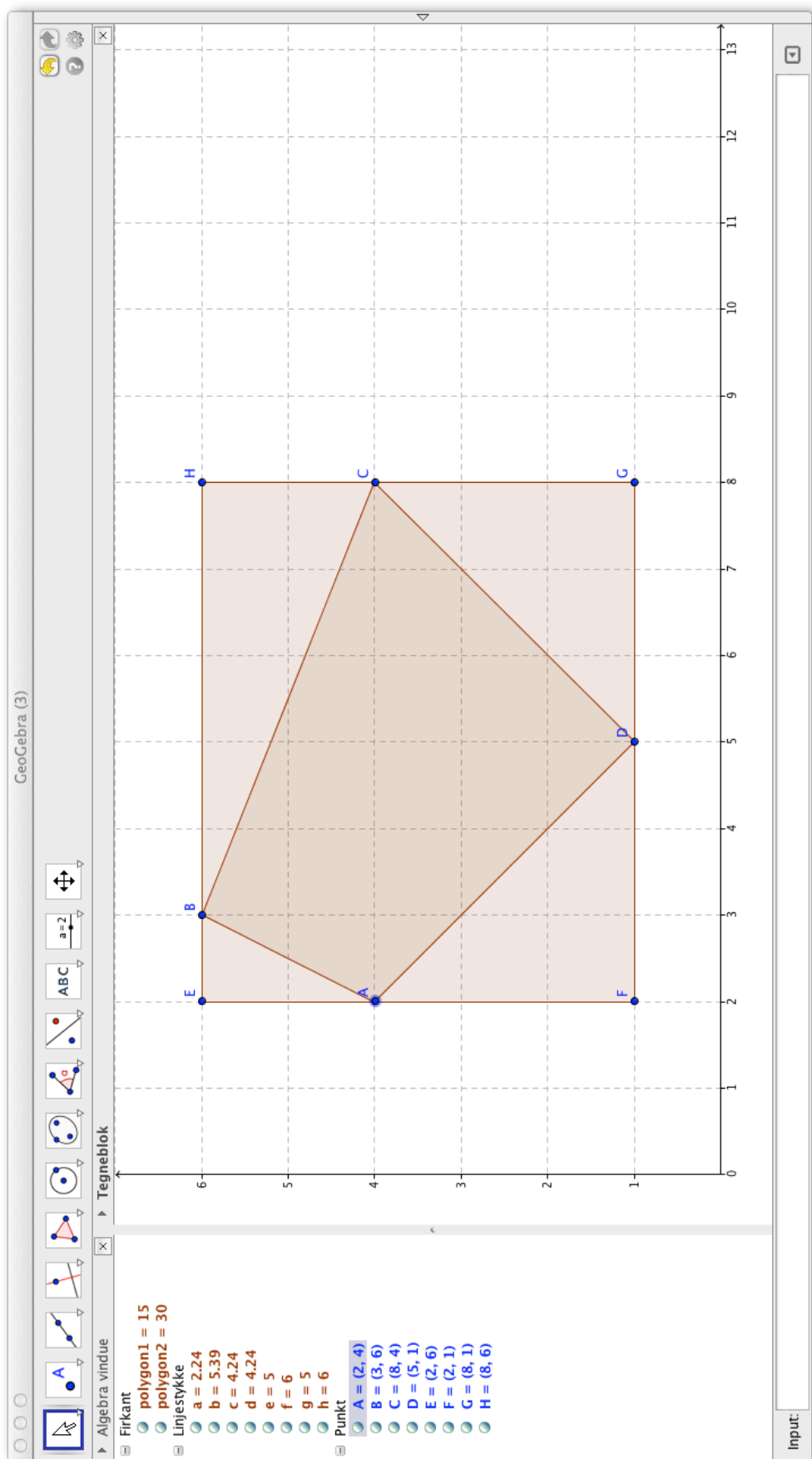
Figur 2(d): En figur tegnet med polygon-redskabet i GeoGebra med to krydsende kanter.



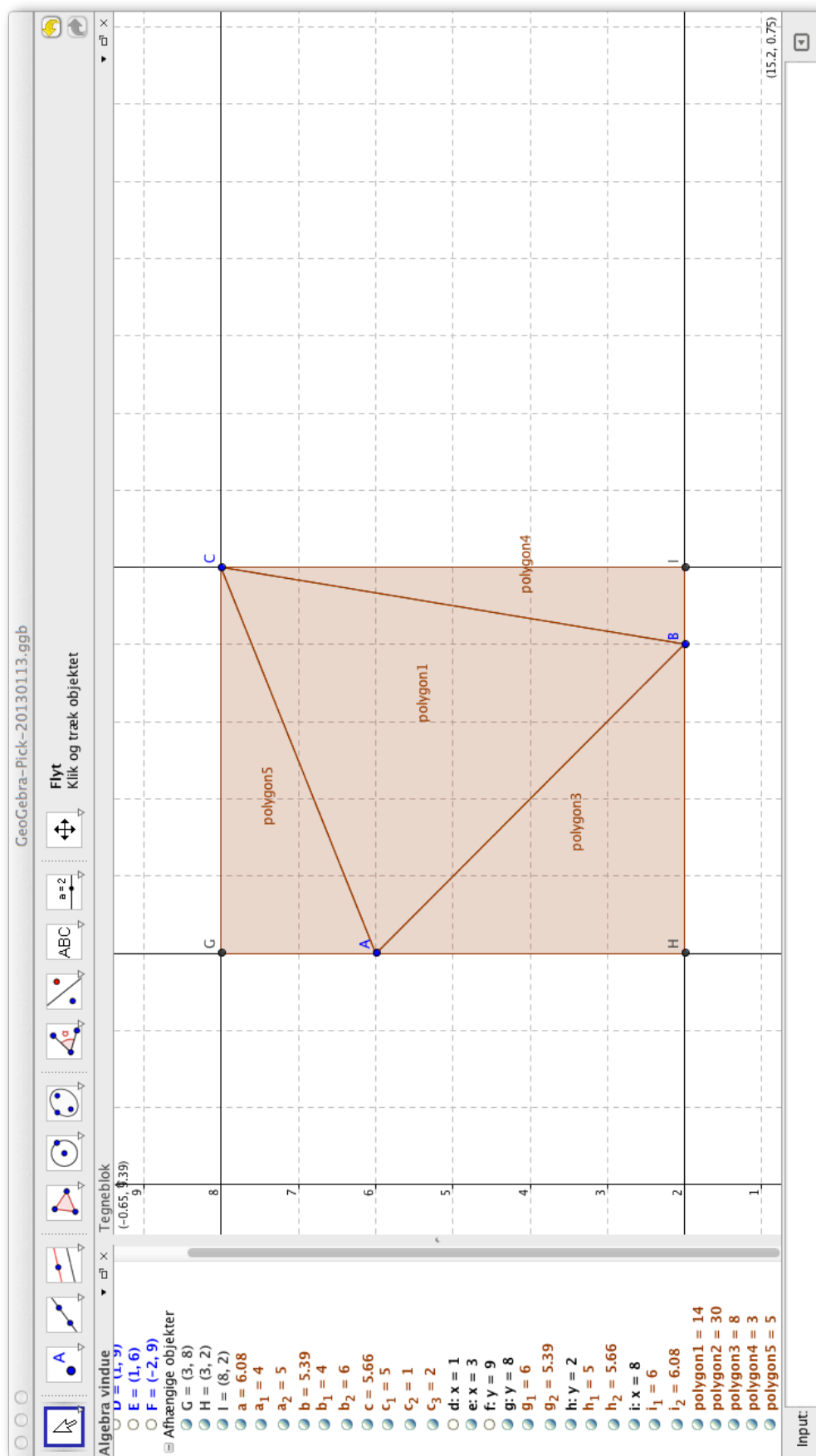
Figur 2(e): En figur tegnet med polygon-redskabet i GeoGebra med tre co-lineære punkter.



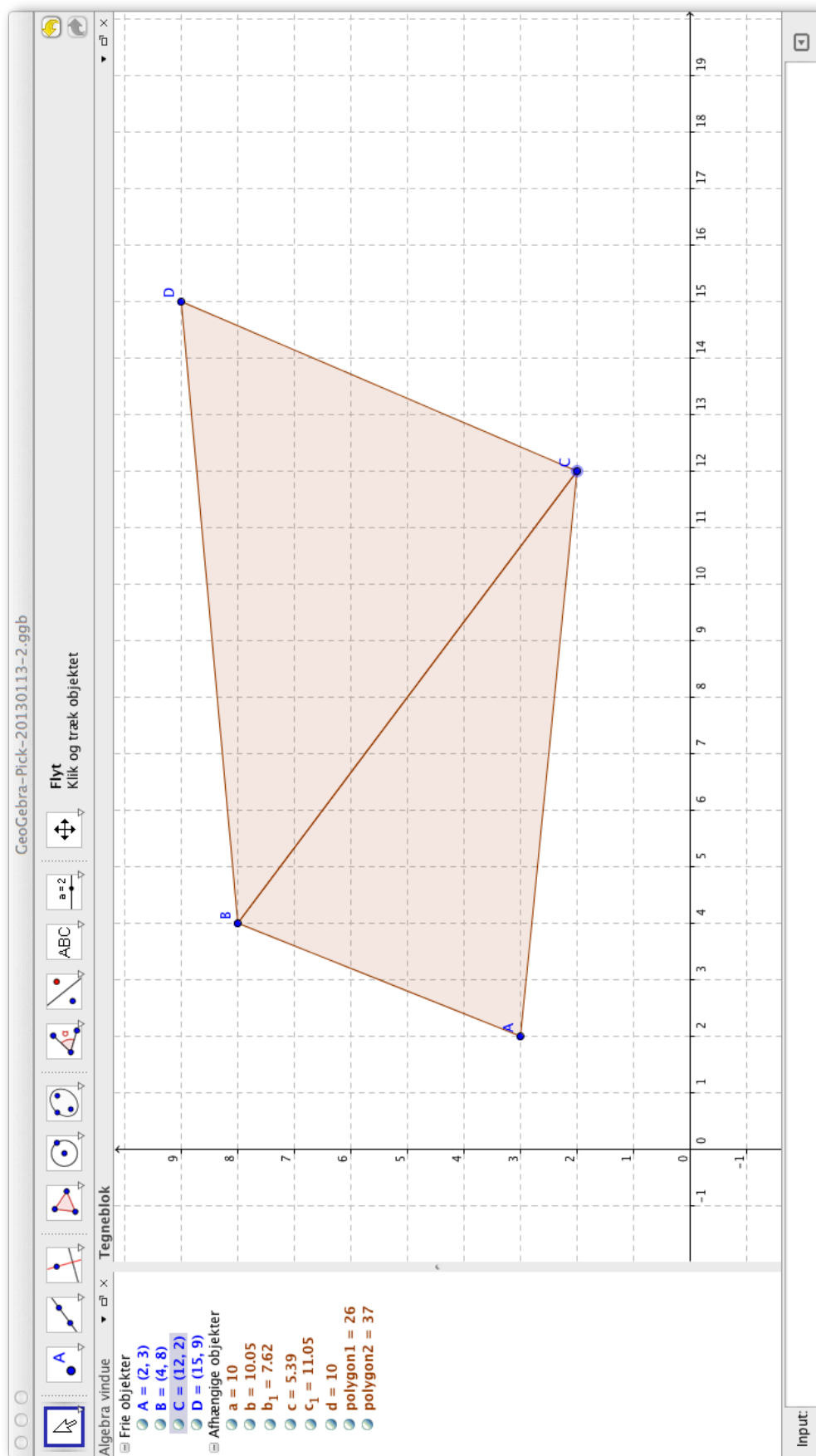
Figur 3(a): Forskellige firkanter kan bruges til at anskueliggøre kant- og indre punkters bidrag til gitterpolygonens areal.



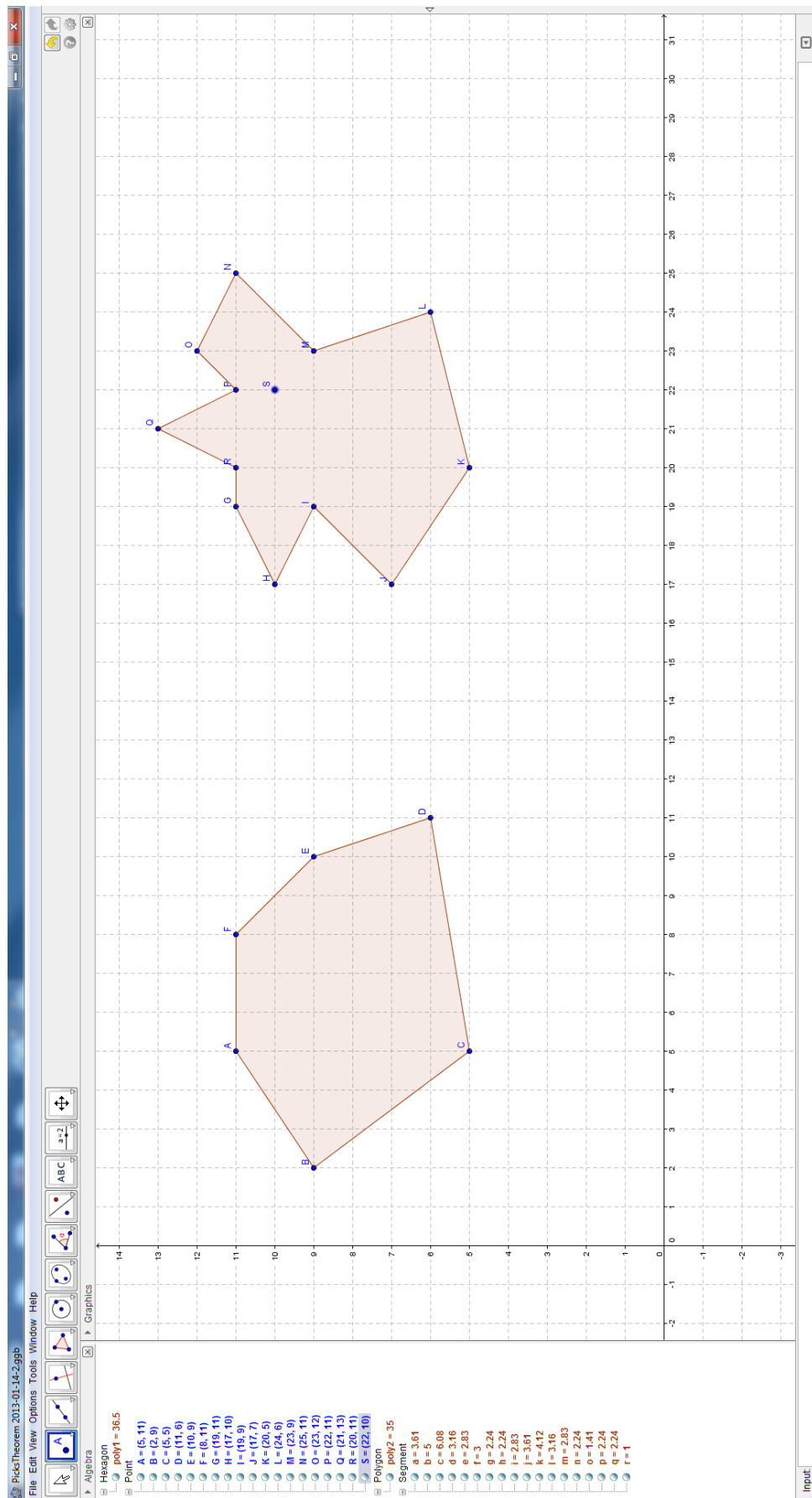
Figur 3(b): En gitterpolygons areal kan bestemmes både direkte ved triangulering og ved triangulering af dens “hylster”.



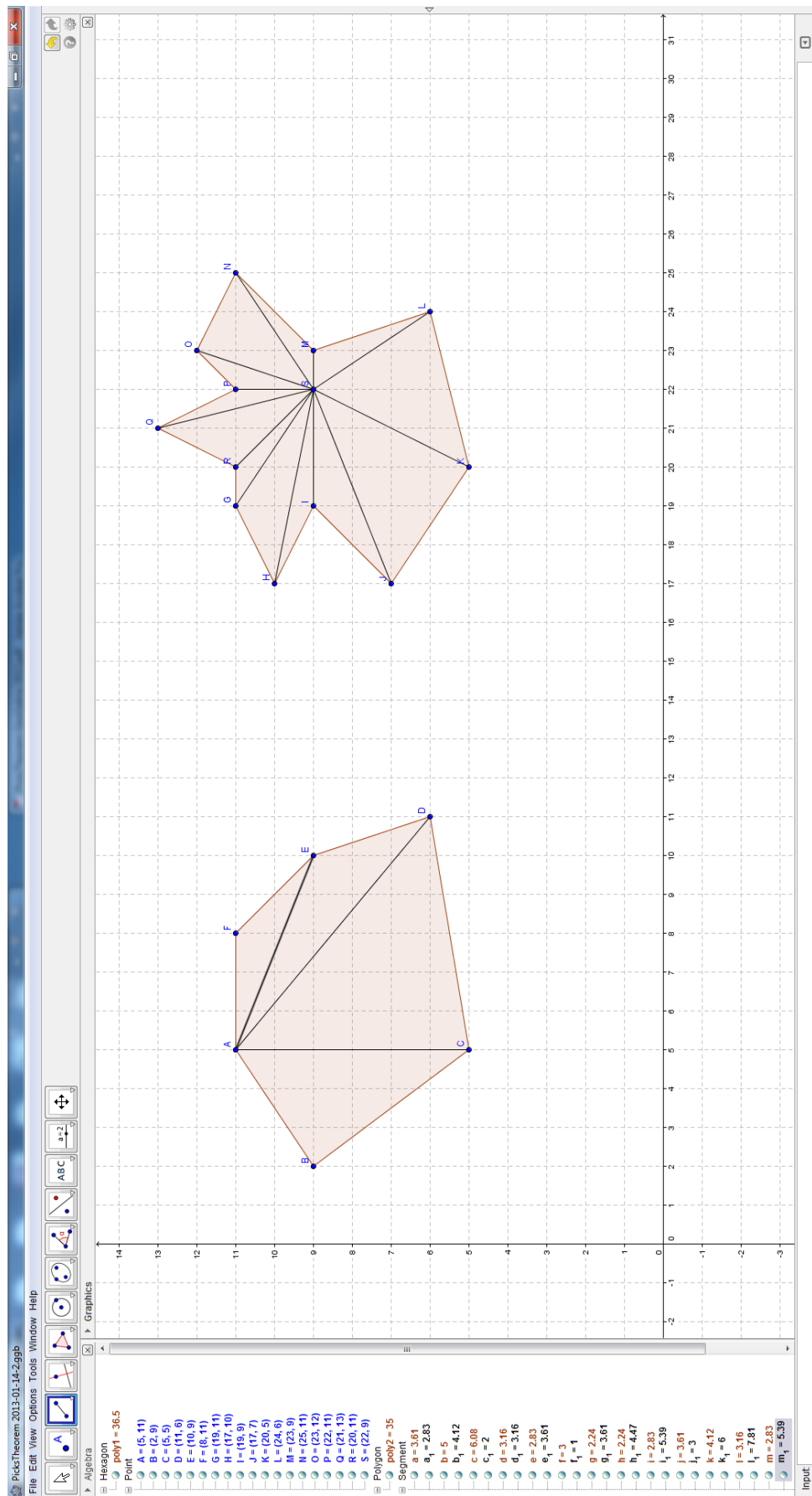
Figur 3(c): En næsten vilkårlig gittertrekant og dens hylster.



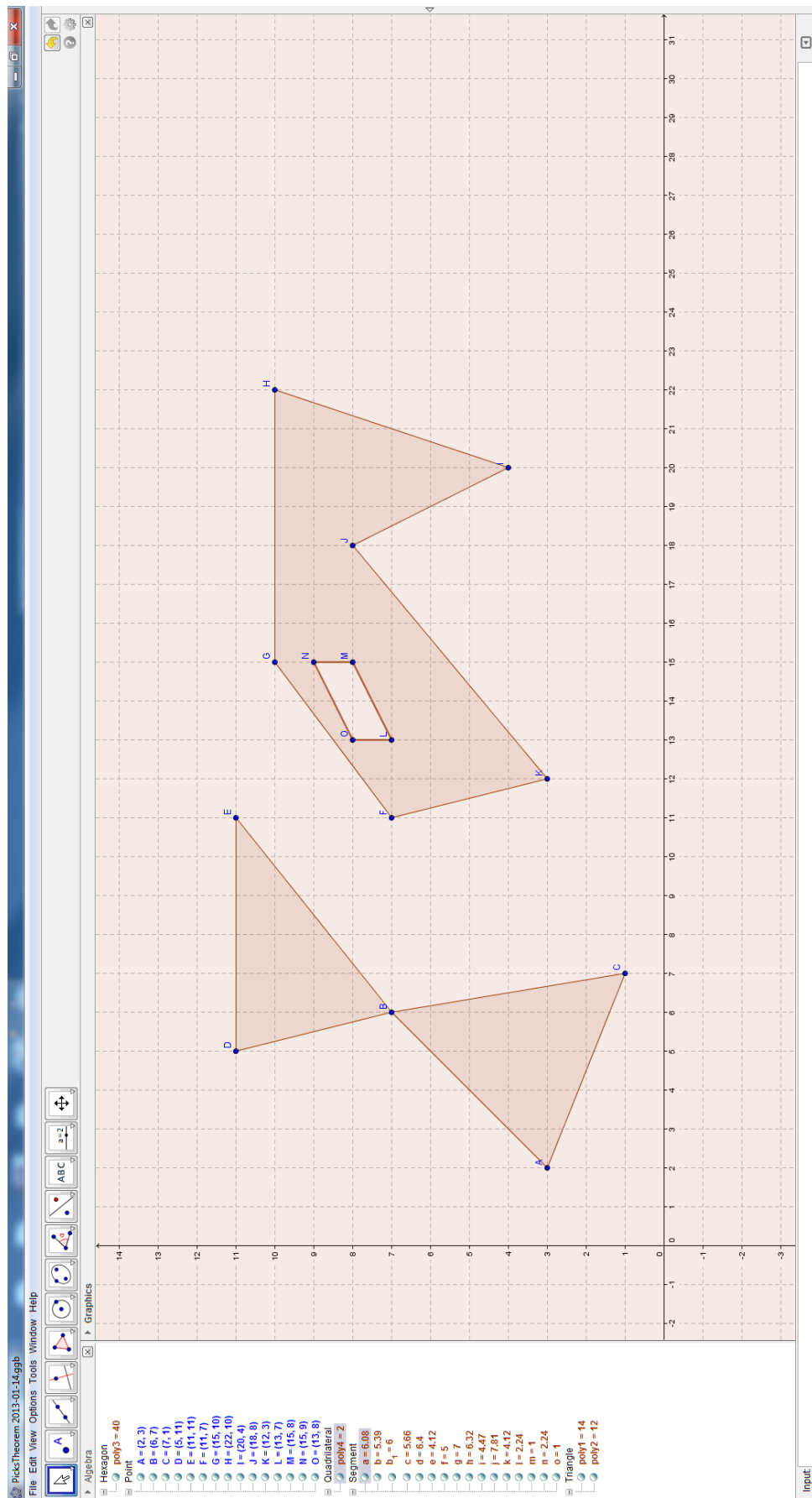
Figur 3(d): To gitter-trekanter med en fælles kant.



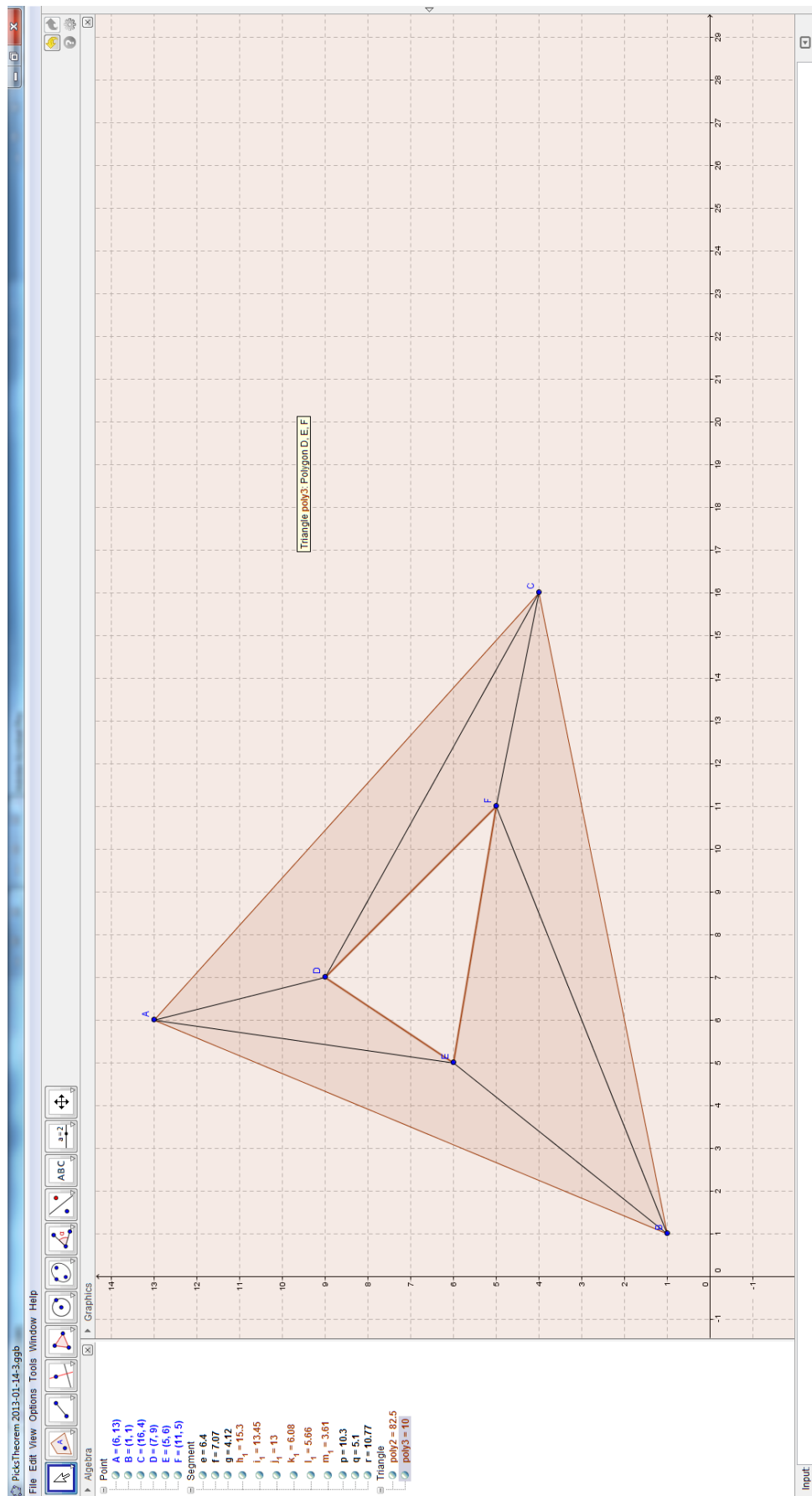
Figur 5(a): Eksempel på konvekse og stjerne-konvekse gitterpolygoner.



Figur 5(b): Indtegnring af triangulering.



Figur 8(a): To typer modeksempler til såvel trianguleringen som selve formodningen (globale modifikationer).



Figur 8(b): En gittertrekant med et gittertrekantet hul.

Recent RePoSS issues

- #13 (2011-1) **Kristian Danielsen and Laura Søvsø Thomassen (eds.):** "Fra laboratoriet til det store lærred" (Preprint)
- #14 (2011-2) **Helge Kragh:** "*Quantenspringerei*: Schrödinger vs. Bohr" (Talk)
- #15 (2011-7) **Helge Kragh:** "Conventions and the Order of Nature: Some Historical Perspectives" (Talk)
- #16 (2011-8) **Kristian Peder Moesgaard:** "Lunar Eclipse Astronomy" (Article)
- #17 (2011-12) **Helge Kragh:** "The Periodic Table in a National Context: Denmark, 1880-1923" (Book chapter)
- #18 (2012-1) **Henrik Kragh Sørensen:** "Making philosophy of science relevant for science students" (Talk)
- #19 (2012-8) **Helge Kragh:** "Newtonianism in the Scandinavian Countries, 1690–1790" (Book chapter)
- #20 (2012-9) **Helge Kragh:** "Har Naturvidenskaben en Fremtid?" (Book chapter)
- #21 (2013-6) **Helge Kragh:** "Empty space or ethereal plenum? Early ideas from Aristotle to Einstein" (Article)
- #22 (2014-7) **Helge Kragh:** "Jørgen From (1605–1651): Et Billede fra Dansk Astronomi- og Lærdomshistorie" (Article)
- #23 (2014-8) **Nils Randlev Hundebøl:** "Big ambitions and supercomputing: A case of industry engagement in climate modeling" (Preprint)
- #24 (2014-8) **Julie Louise Hørberg Kristensen:** "Jagten på en god oplevelse i zoologisk have" (Masters thesis)
- #25 (2014-9) **Allan Lyngs Kjærgaard:** "Offentlig støtte til forskning og udvikling i industrien fra 1940'erne til 1990'erne" (Masters thesis)
- #26 (2014-10) **Julie Nørgaard Hostrup:** "Når discipliner mødes: Et casestudie af faglig integration i nanoforskning" (Masters thesis)
- #27 (2014-10) **Kristian Danielsen, Morten Misfeldt and Henrik Kragh Sørensen:** "Picks Sætning: Inspiration til undervisning om eksperimenterende udforskning i matematik med et videnskabsteoretisk sigte" (Preprint)

This list is up-to-date as of October 14, 2014. The full list of RePoSS issues can be found at www.css.au.dk/reposs.

RePoSS (Research Publications on Science Studies) is a series of electronic publications originating in research done at the Centre for Science Studies, University of Aarhus.

The publications are available from the Centre homepage
(www.css.au.dk/reposs).

ISSN 1903-413X

Centre for Science Studies
University of Aarhus
Ny Munkegade 120, building 1520
DK-8000 Aarhus C
DENMARK
www.css.au.dk



Faculty of Science
Department of Science Studies

AARHUS UNIVERSITET

